

Práctico 8

1. Para cada uno de los siguientes operadores  $T$ , determinar si el subespacio  $W$  es un subespacio  $T$ -invariante de  $V$ .

a)  $V = \mathbb{R}_3[x]$ ,  $T(f) = f'$  y  $W = \mathbb{R}_2[x]$ .

b)  $V = M_2(\mathbb{R})$ ,  $T(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}A$  y  $W = \{A \in V : A^t = A\}$ .

2. Sea  $T$  un operador en  $V$  y sea  $W$  un subespacio  $T$ -invariante de  $V$ . Probar que  $W$  es  $p(T)$ -invariante para cualquier polinomio  $p(x) \in \mathbb{k}[x]$ .

3. Sea  $T$  un operador en  $V$ . Probar que la intersección de una familia cualquiera de subespacios  $T$ -invariantes es también un subespacio  $T$ -invariante.

4. Para cada uno de los operadores  $T$  en  $V$  encontrar una base para el subespacio  $T$ -cíclico generado por  $v$ .

a)  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $T(x, y, z, t) = (x + y, y - z, x + z, x + t)$  y  $v = (1, 0, 0)$ .

b)  $V = \mathbb{R}_3[x]$ ,  $T(p(x)) = p''(x)$  y  $v = x^3$ .

c)  $V = M_2(\mathbb{R})$ ,  $T(A) = A^t$  y  $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

d)  $V = M_2(\mathbb{R})$ ,  $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}A$  y  $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

5. Sea  $T$  un operador en un espacio de dimensión finita  $V$ .

a) Probar que si el polinomio característico de  $T$  escinde, entonces también escinde el polinomio característico de la restricción de  $T$  a un subespacio  $T$ -invariante.

b) Deducir que si el polinomio característico de  $T$  escinde, entonces todo subespacio  $T$ -invariante no trivial contiene un vector propio de  $T$ .

6. Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  con polinomio característico  $\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$ .

a) Probar que si  $A$  es invertible entonces  $A^{-1} = \frac{-1}{a_0} ((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 I)$ .

b) Calcular  $A^{-1}$  para  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

7. Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{h-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{h-1} \end{pmatrix} \in M_h(\mathbb{k})$  donde  $a_0, a_1, \dots, a_{h-1}$  son escalares arbitrarios. Probar

que  $\chi_A(t) = (-1)^h (t^h + a_{h-1} t^{h-1} + \dots + a_1 t + a_0)$ .

8. Sea  $T$  un operador en  $V$  tal que  $V$  es un subespacio  $T$ -cíclico de él mismo. Probar que si  $S$  es un operador lineal en  $V$ , entonces  $S \circ T = T \circ S$  si y solo si  $S = p(T)$  para algún polinomio  $p(x)$ . (*Sugerencia:* suponer que  $V$  es generado por  $u$  y elegir  $p(x)$  tal que  $p(T)(u) = S(u)$ .)
9. Sea  $T$  un operador en un espacio  $V$  de dimensión 2. Probar que o  $V$  es un subespacio  $T$ -cíclico de él mismo o  $T = c \text{ id}$  para algún escalar  $c$ .
10. Probar que si  $T$  es un operador diagonalizable en un espacio de dimensión finita  $n$  y  $\chi_T$  escinde, entonces  $T$  es nilpotente si y solo si  $\chi_T(t) = (-1)^n t^n$ . (Observación: este resultado vale también sin la hipótesis de que  $\chi_T$  escinde.)
11. Dar un ejemplo de un operador  $T$  tal que  $T$  no es nilpotente pero 0 es el único valor propio de  $T$ .
12. Indicar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:
  - a) El polinomio minimal y el polinomio característico de un operador diagonalizable son iguales.
  - b) Sea  $T$  un operador en  $V$ ,  $n = \dim V$ ,  $m_T(x)$  el polinomio minimal de  $T$  y  $\chi_T(x)$  el polinomio característico de  $T$ . Si  $\chi_T(x)$  escinde, entonces  $\chi_T(x)$  divide a  $m_T(x)^n$ .
  - c) Si el polinomio minimal de  $T$  escinde, entonces  $T$  es diagonalizable.

13. Calcular el polinomio minimal de las siguientes matrices.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -14 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Calcular el polinomio minimal de los siguientes operadores.
  - a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donde  $T(x, y) = (x + y, x - y)$ .
  - b)  $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  donde  $T(p(x)) = p'(x) + 2p(x)$ .
  - c)  $T : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  donde  $T(A) = A^t$ .
15. Determinar cuales de las matrices y operadores de los dos ejercicios anteriores son diagonalizables.
16. Describir todos los operadores  $T$  en  $\mathbb{R}^2$  tales que  $T$  es diagonalizable y  $T^3 - 2T^2 + T = 0$ .
17. Sea  $T$  operador en  $V$  diagonalizable. Probar que  $V$  es  $T$ -cíclico si y solo si cada subespacio propio de  $T$  es unidimensional.
18. Sea  $T$  un operador un espacio de dimensión finita  $V$  y supongamos que  $W$  es un subespacio  $T$ -invariante de  $V$ . Probar que el polinomio minimal de  $T|_W$  divide al polinomio minimal de  $T$ .
19. Sea  $T$  un operador en un espacio de dimensión finita  $V$ . Sean  $W_1$  y  $W_2$  subespacios  $T$ -invariantes de  $V$  tales que  $W_1 \oplus W_2 = V$  y sean  $p_1(x)$  y  $p_2(x)$  los polinomios minimales de  $T|_{W_1}$  y  $T|_{W_2}$  respectivamente. Probar o dar un contraejemplo de que  $p_1(x)p_2(x)$  es el polinomio minimal de  $T$ .
20. Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ . Probar que  $\dim [I, A, A^2, \dots] = \text{gr } m_A(t)$ .