

Práctico 7

1. Sea  $\mathbb{k}$  un cuerpo de característica distinta de 2 y  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial. Si  $\varphi \in \text{Bil}(V)$ , definimos  $\varphi^t \in \text{Bil}(V)$  mediante  $\varphi^t(u, v) = \varphi(v, u)$ , para todo  $u, v \in V$ . Probar:
  - a) Dada  $\varphi \in \text{Bil}(V)$ , es  $\varphi \in \text{Bil}_S(V)$  si y solo si  $\varphi^t = \varphi$  y  $\varphi \in \text{Alt}_2(V)$  si y solo si  $\varphi^t = -\varphi$ .
  - b)  $\text{Bil}(V) = \text{Bil}_S(V) \oplus \text{Alt}_2(V)$ .
2. Escribir las siguientes formas alternadas en función de la base  $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ , siendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .
  - a)  $\omega \in \text{Alt}_2(\mathbb{R}^3)$ ,  $\omega((x, y, z), (x', y', z')) = 3xy' - 3x'y - yz' + y'z + 2xz' - 2x'z$ .
  - b)  $\omega \in \text{Alt}_2(\mathbb{R}^3)$ ,  $\omega((x, y, z), (x', y', z')) = xy' + xz' + yz' - (x'y + x'z + y'z)$ .
  - c)  $\omega \in \text{Alt}_3(\mathbb{R}^3)$ ,  $\omega((x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'')) = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x & y & z \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$ .
  - d)  $\omega \in \text{Alt}_3(\mathbb{R}^4)$ ,  $\omega = e_1^* \wedge e_4^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^* \wedge e_1^* + e_4^* \wedge e_3^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_2^*$ .
  - e)  $\omega \in \text{Alt}_3(\mathbb{R}^4)$ ,  $\omega((x, y, z, t), (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t'')) = \begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ x'' & x' & x \\ t'' & t' & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & x & t \\ z' & x' & t' \\ z'' & x'' & t'' \end{vmatrix}$ .
  - f)  $\alpha \wedge \beta \in \text{Alt}_2(\mathbb{R}^3)$ , siendo  $\alpha(x, y, z) = x + y + z$  y  $\beta(x, y) = 2x - y$ . (Sugerencia: escribir  $\alpha$  y  $\beta$  en función de la base dual de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .)
  - g)  $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \in \text{Alt}_3(\mathbb{R}^3)$ , siendo  $\alpha(x, y, z) = x + y$ ,  $\beta(x, y, z) = x + z$  y  $\gamma(x, y, z) = y + z$ .
3. Calcular  $\sum_{k=0}^{\infty} \dim \text{Alt}_k(\mathbb{R}^n)$ , para  $n = 1, 2, \dots$