Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2004

Práctico 6

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   a) Si φ es una forma bilineal en un espacio vectorial V de dimensión finita, existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es diagonal.

   b) Si φ es una forma bilineal simétrica en un espacio vectorial V de dimensión finita, $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es simétrica para toda base $\mathcal{B}$ de V.

   c) Dos matrices congruentes tienen los mismos valores propios.

   d) Toda matriz simétrica es congruente a una matriz diagonal.

2. Determinar cuáles de las siguientes funciones $\varphi : V \times V \to \Bbbk$ son formas bilineales, donde V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\Bbbk$.

   a) $\varphi(u, v) = \alpha(u)\,\beta(v)$, donde $\alpha, \beta \in V^*$.

   b) $V = \mathbb{R},\ \Bbbk = \mathbb{R},\ \varphi(x, y) = x + 2y$.

   c) $V = \mathbb{R}^2,\ \Bbbk = \mathbb{R},\ \varphi(u, v) = \det[u, v]$, donde u y v indican la primera y segunda columna de $[u, v]$, respectivamente.

3. Verificar que las siguientes funciones son formas bilineales y hallar la matriz asociada a cada una de ellas en la base $\mathcal{B}$ dada.

   a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi((x, y, z)(x', y', z')) = xx' - 2xy' + yx' - zz'$, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$.

   b) $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \varphi(A, B) = \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B)$,
   $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\Bbbk$ y $\eta \in \mathcal{L}(V, W)$. Si $\varphi \in \operatorname{Bil}(W)$ sea $\hat{\eta}(\varphi) : V \times V \to \Bbbk$ definida por $[\hat{\eta}(\varphi)](u, v) = \varphi(\eta(u), \eta(v))$ para todo $u, v \in V$.

   a) Probar que $\hat{\eta}(\varphi) \in \operatorname{Bil}(V)$ para toda $\varphi \in \operatorname{Bil}(W)$.

   b) Probar que $\hat{\eta} : \operatorname{Bil}(W) \to \operatorname{Bil}(V)$ es una transformación lineal.

   c) Probar que si η es un isomorfismo, entonces $\hat{\eta}$ también lo es.

5. Sea $\Bbbk$ un cuerpo cualquiera. Se define $\varphi : M_n(\Bbbk) \times M_n(\Bbbk) \to \Bbbk$ mediante $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}\left(A^t \cdot B\right)$.

   a) Probar que $\varphi \in \operatorname{Bil}_S\left(M_n(\Bbbk)\right)$.

   b) Probar que φ es no degenerada.

6. Sea $A \in M_n(\Bbbk)$. Probar que si realizar una operación elemental en las columnas de A corresponde a multiplicar por la derecha a A con una cierta matriz elemental E, entonces realizar la misma operación elemental en las filas de A corresponde a multiplicar por la izquierda a A con E^t. *Sugerencia*: observar que $E^t A = \left(A^t E\right)^t$.

7. Para cada una de las siguientes matrices A con entradas en $\mathbb{R}$, encontrar una matriz diagonal D y una matriz invertible Q tales que $Q^t\,A\,Q = D$.

$$(\mathbf{a})\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{b})\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{c})\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sugerencia para (**b**): Usar una operación elemental distinta de intercambiar columnas.

8. Sea $\varphi \in \mathrm{Bil}_S\left(\mathbb{R}^3\right)$ tal que la forma cuadrática asociada es

$$\Phi(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 6yz, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ sea diagonal.

9. Indicar cuáles de las siguientes matrices reales son congruentes entre sí.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Sea $S_n(\mathbb{R})$ el espacio de matrices reales $n \times n$ simétricas. Probar que el número de clases de equivalencia por congruencia en $S_n(\mathbb{R})$ es $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

11. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrices simétricas tales que B tiene todos sus valores propios del mismo signo. Probar que existe una matriz invertible $Q \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $Q^t A\,Q$ y $Q^t B\,Q$ son matrices diagonales. *Sugerencia:* considerar primero el caso en que B tiene todos sus valores propios positivos y definir a partir de B un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

12. Hallar en los siguientes casos la forma bilineal simétrica φ asociada a la forma cuadrática Φ, una base ortonormal $\mathcal{B}$ del espacio tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es diagonal y el índice, la signatura y el rango de φ. En todos los casos se considera el producto interno habitual en $\mathbb{R}^n$.

   a) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x,y) = -2x^2 + 4xy + y^2$.
   b) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x,y) = 7x^2 - 8xy + y^2$.
   c) $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \Phi(x,y,z) = 3x^2 - 2xz + 3y^2 + 3z^2$.

13. Sea $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xz + 2\sqrt{2}(x+z) + 1 = 0\}$. Calcular la ecuación de $\mathcal{S}$ en función de las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ hallada en $12c$ y describir $\mathcal{S}$ geométricamente.

14. Clasificar las siguientes cuádricas:

$3x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 1 = 0$; $\quad x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy + 6xz + 6yz + c = 0,\ c = 0, -1$;
$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + x + y + z + c = 0$, discutir según $c \in \mathbb{R}$;
$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + x + y - 2z + 1 = 0$; $\quad 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + x + y + z - 1 = 0$.

15. Sea $\mathcal{S}$ la superficie cuádrica definida por $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6xy - 2yz + 3x - 2y - z + 14 = 0$.

   a) ¿Qué tipo de cuádrica es $\mathcal{S}$?
   b) Hallar explícitamente las ecuaciones de los ejes en los cuales $\mathcal{S}$ tiene su forma reducida.