

Práctico 5

- Indicar si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas (suponemos que todos los espacios con producto interno son de dimensión finita):
 - Todo operador unitario es normal.
 - Todo operador ortogonal es diagonalizable.
 - Si dos matrices son unitariamente equivalentes, entonces son semejantes.
 - La suma de dos matrices unitarias es unitaria.
 - El adjunto de un operador unitario es unitario.
 - Si T es un operador ortogonal en V , entonces $[T]_{\mathcal{B}}$ es una matriz ortogonal para cualquier base \mathcal{B} .
 - Si todos los valores propios de un operador son 1 entonces el operador es unitario u ortogonal.
- Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$. Probar que T es autoadjunto y hallar una base ortonormal de \mathbb{R}^2 que consista en vectores propios de T .
- Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de \mathbb{k}^n y $A = {}_{\mathcal{B}'}[\text{id}]_{\mathcal{B}}$. Probar:
 - Si \mathcal{B} y \mathcal{B}' son bases ortonormales de \mathbb{k}^n , entonces $AA^* = A^*A = I$.
 - Si \mathcal{B} (\mathcal{B}') es una base ortonormal de \mathbb{k}^n y A verifica $AA^* = A^*A = I$, entonces \mathcal{B}' (\mathcal{B}) es una base ortonormal de \mathbb{k}^n .
- Para cada una de las siguientes matrices A encontrar una matriz ortogonal o unitaria P y una matriz diagonal D tal que $P^*AP = D$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Probar que la composición de isometrías es una isometría.
- Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $T_{\lambda} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $T_{\lambda}(z) = \lambda z$. Hallar los valores de λ para los cuales T_{λ} es a) normal, b) autoadjunto, c) positivo (ver práctico anterior) d) isometría.
- ¿Cuales de los siguientes pares de matrices son unitariamente equivalentes?
 - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

$$c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Sea V el espacio de las funciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{C} con el producto interno: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \bar{g}$. Sea $h \in V$ fija. Se define $T : V \rightarrow V$ mediante $T(f) = hf$. Probar que T es una isometría si y solo si $|h(t)| = 1$ para todo $t \in [0, 1]$.
9. Sea V un espacio con producto interno y sea $T : V \rightarrow V$ un operador autoadjunto. Probar que $T - i \text{id}$ es invertible y que $S := (T + i \text{id}) \circ (T - i \text{id})^{-1}$ es una isometría.
10. Sea T un operador en un espacio con producto interno de dimensión finita V . ¿Si $\|T(v)\| = \|v\|$ para todo v en alguna base ortonormal, debe ser T una isometría? Probar o dar un contraejemplo.
11. Encontrar una matriz ortogonal cuya primera fila sea $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
12. Sea $V = \mathbb{R}^2$, $W = [(1, 3)]$ y \mathcal{B} la base canónica de V . Calcular $[P_W]_{\mathcal{B}}$ donde P_W es la proyección ortogonal sobre W . Hacer lo mismo para \mathbb{R}^3 y $W = [(1, 0, 1)]$.
13. Para cada una de las matrices del ejercicio 4:
 - a) Describir la descomposición espectral de L_A .
 - b) Definir explícitamente cada una de las proyecciones ortogonales sobre los subespacios propios de L_A .
14. Sea V un \mathbb{k} -espacio de dimensión finita con producto interno y sea $P : V \rightarrow V$ una proyección.
 - a) Si P es una proyección ortogonal probar que $\|P(v)\| \leq \|v\|$ para todo $v \in V$. Dar un ejemplo de una proyección para la cual no sea válida la desigualdad anterior. ¿Que se puede deducir si se da la igualdad?
 - b) Si P es normal y $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, probar que P debe ser una proyección ortogonal.
 - c) Sea P una proyección sobre un espacio de dimensión finita con producto interno V . Probar que si $\|P(v)\| \leq \|v\|$ para todo v , entonces P es una proyección ortogonal.
15. Sea T un operador normal en un \mathbb{C} -espacio con producto interno y de dimensión finita. Usar la descomposición espectral $T = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k$ para probar:
 - a) $T = -T^*$ si y solo si todo valor propio de T es un número imaginario puro.
 - b) Existe un operador normal S tal que $S^2 = T$.
 - c) Si existe un operador autoadjunto S tal que $S^2 = T$, entonces T es un operador semidefinido positivo.
 - d) Si T es un operador semidefinido positivo, entonces existe un único operador semidefinido positivo S tal que $S^2 = T$.
16. Sea T un operador invertible en un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita. El objetivo de este ejercicio es probar que existen únicos operadores S y U tales que S es definido positivo, U es unitario y $T = U \circ S$.
 - a) Probar que existe un operador definido positivo S tal que $S^2 = T^* \circ T$.
 - b) Probar que $U := T \circ S^{-1}$ es un operador unitario.
 - c) Probar la unicidad de la descomposición $T = U \circ S$, con U unitario y S definido positivo. Sugerencia: si $T = U \circ S$ es una tal descomposición, probar que $T^* \circ T = S^2$ y aplicar 15d.