Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2004

Práctico 4

En los ejercicios de este repartido se considera siempre a $\mathbb{k}^n$ con el producto interno habitual y en $\mathbb{R}_n[x]$ el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p\,q$.

1. Para cada una de las siguientes funcionales $\alpha : V \to \mathbb{k}$, encontrar un vector w tal que $\alpha(v) = \langle v, w\rangle$ para todo $v \in V$.

    a) $V = \mathbb{R}^3$, $\alpha(x, y, z) = x - 2y + 4z$.

    b) $V = \mathbb{C}^3$, $\alpha(x, y, z) = 2z - x + i(3x + y)$.

    c) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\alpha(p) = p(0) + p'(1)$.

2. En los casos siguientes, para cada $T \in \mathcal{L}(V)$ hallar el adjunto T^*.

    a) $V = \mathbb{C}^3$, $T(x, y, z) = (2x + iy, (1 - i)z - x, iy)$.

    b) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $T(p) = p'$.

    c) $T(v) = \langle v, u\rangle\, w$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y u y w son vectores fijos de V.

3. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interno y T un operador en V. Probar que si T es invertible, entonces T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

4. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interno y T un operador en V. Probar que $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

5. Para cada una de los siguientes operadores, determinar si es normal o autoadjunto.

    a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$.

    b) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $T(x, y) = (2x + iy, x + 2y)$.

    c) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $T(p) = p'$.

6. Sean T y S operadores autoadjuntos. Probar que $T \circ S$ es autoadjunto si y solo si $T \circ S = S \circ T$.

7. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y T un operador en V. Se define

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

    a) Probar que T_1 y T_2 son autoadjuntos y que $T = T_1 + i\,T_2$.

    b) Probar que si $T = S_1 + i\,S_2$ con S_1 y S_2 autoadjuntos, entonces $S_1 = T_1$ y $S_2 = T_2$.

    c) Probar que T es normal si y solo si $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

8. Sea T un operador en un espacio con producto interno V y sea W un subespacio T-invariante de V. Probar:

    a) Si T es autoadjunto, entonces $T|_W$ es autoadjunto.

b) El subespacio $W^\perp$ es T^*-invariante.

9. Sea T un operador normal en un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno V. Probar que $\ker T = \ker T^*$ e $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$.

10. Sea T un operador autoadjunto en un espacio de dimensión finita con producto interno V. Probar que para todo v en V es
$$\|T(v) \pm iv\|^2 = \|T(v)\|^2 + \|v\|^2.$$
Deducir que $T - i \text{ id}$ es invertible y que $\left((T - i \text{ id})^{-1}\right)^* = (T + i \text{ id})^{-1}$.

11. Sea T un operador en un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno. Probar:

    a) Si T es autoadjunto, entonces $\langle T(v), v\rangle$ es real para todo $v \in V$.

    b) Si T satisface $\langle T(v), v\rangle = 0$ para todo $v \in V$, entonces $T = 0$. (*Sugerencia:* Sustituir v por $v + w$ y luego por $v + iw$).

    c) Si $\langle T(v), v\rangle$ es real para todo $v \in V$, entonces $T = T^*$.

12. Sea T un operador autoadjunto en un espacio vectorial V con producto interno de dimensión finita n, y sea $A = [T]_{\mathcal{B}}$ donde $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V. El operador T se dice que es *definido (semidefinido) positivo* si $\langle T(v), v\rangle > 0$ para todo $v \neq 0$ ($\langle T(v), v\rangle \geq 0$ para todo v). Probar:

    a) T es definido positivo (semidefinido) si y solo si todos sus valores propios son positivos (no negativos).

    b) T es definido positivo (semidefinido) si y solo si L_A lo es.

    c) T es definido positivo si y solo si
$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, \overline{x_i}\, x_j > 0 \quad \text{para todo } (x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

13. Sea T un operador (invertible) en un espacio vectorial V de dimensión finita con producto interno. Probar que $T \circ T^*$ y $T^* \circ T$ son operadores semidefinidos (definidos) positivos.

14. *a)* Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sean T y S operadores autoadjuntos tales que $T \circ S = S \circ T$. Probar que existe una base ortonormal de V tal que diagonaliza simultáneamente a T y a S.

    b) Enunciar y probar el resultado análogo para matrices.

15. Sea V un espacio con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ y sea T un operador definido positivo en V. Probar que $\langle u, v\rangle' = \langle T(u), v\rangle$ define otro producto interno en V.

16. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interno y sean T y S operadores autoadjuntos con S definido positivo. Probar que $T \circ S$ y $S \circ T$ son operadores diagonalizables que solo tienen valores propios reales. (*Sugerencia:* Mostrar que $T \circ S$ es autoadjunto con respecto al producto interno $\langle u, v\rangle' = \langle S(u), v\rangle$).

17. Probar el recíproco del ejercicio 15: Sea V un espacio de dimensión finita con un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Probar que cualquier otro producto interno en V se puede expresar de forma única como $\langle u, v\rangle' = \langle T(u), v\rangle$, siendo $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador definido positivo.