

Práctico 3

- Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas.
 - Un producto interno debe tener valores sobre los reales o complejos.
 - Un producto interno es lineal en ambas componentes.
 - Hay un único producto interno sobre \mathbb{R}^n .
 - La desigualdad triangular solo vale en espacios de dimensión finita.
 - Todo conjunto ortonormal es LI
- Sean $u = (2, 1 + i, i)$, $v = (2 - i, 2, 1 + 2i) \in \mathbb{C}^3$, con el producto interno habitual. Calcular $\langle u, v \rangle$, $\|u\|$ y $\|v\|$ y verificar que se cumplen la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular.
- Probar que $\langle x, y \rangle = xAy^*$ define un producto interno en \mathbb{C}^2 , donde $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$.
Calcular $\langle (1 - i, 2 + 3i), (2 + i, 3 - 2i) \rangle$.
- Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre \mathbb{k} .
 - Probar la *ley del paralelogramo*: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.
 - Probar las *identidades polares*:
 - $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2$, si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.
 - $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=3} i^k \|u + i^k v\|^2$, si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.
- En los siguientes casos, hallar una base ortonormal \mathcal{B} de V aplicando el método de Gram-Schmidt al conjunto S dado y calcular los coeficientes de Fourier con respecto a la base \mathcal{B} del vector v dado.
 - $V = \mathbb{R}^3$, con el producto interno habitual, $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 3)\}$, $v = (1, 1, 2)$.
 - $V = \mathbb{C}^2$ con el producto interno definido en el ejercicio 3, $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $v = (i, -1)$.
 - $S = \{(1, i, 0), (1 - i, 2, 4i)\}$, V es el subespacio de \mathbb{C}^3 generado por S , con el producto interno habitual en \mathbb{C}^3 , $v = (3 + i, 4i, -4)$.
- Se define $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $\langle (x, y), (x', y') \rangle = 2xx' + yy' + xy' + yx'$.
 - Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en \mathbb{R}^2 .
 - Hallar una base de \mathbb{R}^2 que sea ortonormal respecto a este producto interno.
- Sea V un espacio vectorial real o complejo (aquí no suponemos que V tenga producto interno) de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base cualquiera de V . Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ por $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ si $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ y $w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno en V y que \mathcal{B} es una base ortonormal respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Hallar explícitamente un producto interno en \mathbb{R}^2 que verifique que $\{(2, 3), (1, 2)\}$ sea una base ortonormal de \mathbb{R}^2 .

9. Sean $V = \mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual y W el subespacio generado por $\{(i, 0, 1)\}$. Hallar bases ortonormales de W y de W^\perp . Calcular P_W y P_{W^\perp} y verificar que $P_W + P_{W^\perp} = \text{id}$.
10. Sea V un espacio vectorial con producto interno, W un subespacio de V y $v \in V$. Se pide:
- Hallar W^\perp .
 - Calcular la proyecciones $P_W(v)$ y $P_{W^\perp}(v)$.
 - Calcular la distancia de v a W .

En los casos siguientes :

- a) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, y) : y = 4x\}$, $v = (2, 6)$, con el producto interno habitual.
- b) $V = \mathbb{C}^3$, W es el subespacio generado por $\{(1, i, 1 - i), (i, 1 + i, 2)\}$, $v = (0, 2i - 1, 1 + i)$, con el producto interno habitual.
- c) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathbb{R}_1[x]$, $p(x) = 4 + 3x - 2x^2$, con el producto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p q$. (¿Por qué $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p q$ define un producto interno en $\mathbb{R}_2[x]$?)
11. Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de un espacio vectorial con producto interno V . Probar que $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ y que $W_1^\perp + W_2^\perp \subset (W_1 \cap W_2)^\perp$. Probar que si V es de dimensión finita, entonces $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.
12. Sea V un espacio vectorial con producto interno, S y T subconjuntos de V y W un subespacio de V . Probar:
- a) $S \subset T$ implica $T^\perp \subset S^\perp$.
- b) $S \subset (S^\perp)^\perp$, y luego $[S] \subset (S^\perp)^\perp$.
- c) $W = (W^\perp)^\perp$, si V es de dimensión finita.
13. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, W un subespacio de V y $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\varphi|_W = \text{id}$ y $W^\perp \subset \ker \varphi$. Probar que φ es la proyección ortogonal sobre W .
14. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, W un subespacio de V y $v \notin W$. Probar que existe $z \in W^\perp$ tal que $\langle v, z \rangle \neq 0$.
15. Sea V el conjunto de sucesiones $(x_n)_{n=1}^\infty$ tales que $x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 1$ y que $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty$.
- a) Sean $x, y \in V$, $x = (x_n)$, $y = (y_n)$. Probar que
- $$\left(\sum_{n=1}^N |x_n y_n| \right)^2 \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \sum_{n=1}^\infty |y_n|^2$$
- para todo $N \geq 1$ y concluir que la serie $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ converge.
- b) Probar que V es un espacio vectorial real con las operaciones:
- $$(x + y)_n = x_n + y_n, \quad (\lambda x)_n = \lambda x_n,$$
- para todo $n \geq 1$, donde $x = (x_n)$, $y = (y_n)$.
- c) Probar que $\langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ es un producto interno en V , donde $x = (x_n)$, $y = (y_n)$.
- d) Sea W el subespacio generado por $\{x^i : i = 1, 2, \dots\}$, donde $x_i = (x_n^i)_n$, con $x_n^i = 0$ si $n \neq i$ y $x_n^i = 1$. Probar que $W \subsetneq W^{\perp\perp}$.