Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2004

Práctico 2

Sea T un operador en V y W un subespacio de V. Decimos que W es un subespacio T-*invariante* si $T(W) \subset W$. En este caso la restricción $T|_W : W \to W$ es un operador en W.

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas. En todos los casos $T \in \mathcal{L}(V)$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita.
   a) Si el número de valores propios diferentes de T es estrictamente menor que la dimensión de V, T no es diagonalizable.
   b) Dos vectores propios de T correspondientes a un mismo valor propio son linealmente dependientes.
   c) Si T es diagonalizable, tiene al menos un valor propio.
   d) El operador T es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad de cada uno de sus valores propios λ es igual a la dimensión del subespacio E_λ.
   e) Si λ_1 y λ_2 son valores propios diferentes de T, $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.

2. En los siguientes casos determinar si la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable y si lo es hallar una matriz $Q \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $Q^{-1}AQ$ es diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. En los siguientes casos determinar si $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable y si lo es hallar una base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz $[T]_B$ es diagonal.
   a) $V = \mathbb{R}_3[x],\ T(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$.
   b) $V = \mathbb{R}_2[x],\ [T(p)](x) = p(0) + p(1)\left(x + x^2\right)$.
   c) $V = \mathbb{C}^2,\ T(z, w) = (z + iw, iz + w)$.
   d) $V = \mathbb{R}_3[x],\ T(p(x)) = p'(x) + p''(x)$.
   e) $V = M_2(\mathbb{R}),\ T(A) = A^t$.

4. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, calcular A^n para cualquier n entero positivo. (Sugerencia: escribir $A = PDP^{-1}$, donde D es diagonal.)

5. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ invertible, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que T es diagonalizable si y sólo T^{-1} lo es.

6. Un operador T se dice *nilpotente* si existe algún $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $T^n = 0$. Probar que si un operador T en un espacio de dimensión finita es diagonalizable y nilpotente, entonces es $T = 0$.

7. Sea T un operador diagonalizable en un espacio de dimensión finita. Probar que T es una proyección si y solo si todo valor propio de T es 0 o 1.

8. La sucesión de *Fibonacci* se define por inducción de la siguiente manera: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n > 1$. Calcular el $n-$ésimo término de dicha sucesión. (*Sugerencia:* encontrar una matriz A tal que $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$ y resolver esta ecuación explicitamente.

9. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Probar que A es diagonalizable si y solo si A^t es diagonalizable.

10. Sean T y $S \in \mathcal{L}(V)$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita. Se dice que T y S son *simultáneamente diagonalizables* si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_\mathcal{B}$ y $[S]_\mathcal{B}$ son diagonales.

    a) Sean T y S simultáneamente diagonalizables. Probar que T y S conmutan, es decir $T \circ S = S \circ T$.
    b) Probar que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable, entonces T y T^n son simultáneamente diagonalizables para todo entero positivo n.

11. Sea T un operador diagonalizable en un espacio de dimensión finita V y sea $W \neq \{0\}$ un subespacio T-invariante de V.

    a) Sean $v_1, \ldots, v_k$ vectores propios de T correspondientes a valores propios distintos. Probar que si $v_1 + \cdots + v_k \in W$ entonces $v_i \in W$ para todo i. (Sugerencia: probarlo por inducción en k.)
    b) Probar que $T|_W$ es diagonalizable.

12. Probar que si T y S son dos operadores diagonalizables en un espacio de dimensión finita V que conmutan, entonces T y S son simultáneamente diagonalizables. (*Sugerencia:* para todo valor propio λ de T mostrar que el subespacio propio $E_{\lambda,T}$ es S-invariante y aplicar el ejercicio anterior para obtener una base de $E_{\lambda,T}$ de vectores propios de S.)

13. Hallar la descomposición espectral de T en el ejercicio 3, dando explícitamente las proyecciones sobre los subespacios propios. Para alguno de estos casos, escribir explícitamente cada proyección como un polinomio evaluado en el operador.

14. Probar que si T es diagonalizable e invertible con descomposición espectral $T = \sum_{i=1}^h \lambda_i \, \rho_i$, entonces $T^{-1} = \sum_{i=1}^h \lambda_i^{-1} \rho_i$. Observar que esto se puede usar también para probar el ejercicio 5.

15. Sea T un operador diagonalizable en un espacio de dimensión finita. Usar la descomposición espectral $T = \lambda_1 \, P_1 + \cdots + \lambda_k \, P_k$ para probar:

    a) Si $p(x)$ es un polinomio cualquiera, es $p(T) = \sum_{i=1}^k p(\lambda_i) \, P_i$.
    b) Un operador S conmuta con T si y solo si S conmuta con cada P_i.
    c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y todos los valores propios de T son no negativos, entonces existe un operador diagonalizable S tal que $S^2 = T$. ¿Qué se puede decir en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?