

Práctico 1

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas.
 - a) Todo operador lineal en un espacio vectorial de dimensión n tiene n valores propios distintos.
 - b) Si una matriz real tiene un vector propio entonces tiene un número infinito de vectores propios.
 - c) Existe una matriz que no tiene vectores propios.
 - d) Los valores propios son escalares no nulos.
 - e) Dos vectores propios cualesquiera son linealmente independientes.
 - f) La suma de dos valores propios de un operador T es también un valor propio de T .
 - g) Los operadores en espacios vectoriales de dimensión infinita no tienen valores propios.
 - h) Una matriz A $n \times n$ con entradas en un cuerpo \mathbb{k} es semejante a una matriz diagonal si y solo si existe una base para \mathbb{k}^n compuesta de vectores propios de A .
 - i) Matrices semejantes tienen siempre los mismos valores propios.
 - j) Matrices semejantes tienen siempre los mismos vectores propios.
 - k) La suma de dos vectores propios de un operador T es también un vector propio de T .
2. Para las siguientes matrices $A \in M_n(\mathbb{k})$:
 - a) Hallar los valores propios de A y los subespacios propios correspondientes a cada uno de ellos.
 - b) Si es posible, hallar una base de \mathbb{k}^n que consista en vectores propios de A y dar una matriz diagonal D y una matriz invertible Q tales que $Q^{-1}AQ = D$.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ para } \mathbb{k} = \mathbb{R}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ para } \mathbb{k} = \mathbb{R}; \quad A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix} \text{ para } \mathbb{k} = \mathbb{C}.$$
3. Probar que los valores propios de una matriz triangular superior A son las entradas en la diagonal de A .
4.
 - a) Probar que un operador lineal T en un espacio de dimensión finita es invertible si y solo si 0 no es valor propio de T
 - b) Sea T un operador invertible. Probar que $\lambda \in \mathbb{k}$ es un valor propio de T si y solo si λ^{-1} es un valor propio de T^{-1} .
5. Sea T un operador lineal en un espacio V y sea v un vector propio de T correspondiente a un valor propio λ . Para cada entero positivo m , probar que v es un vector propio de T^m correspondiente al valor propio λ^m . (Recordar que $T^m = T \circ \dots \circ T$, m veces.)
6. Una *matrix escalar* es una matriz de la forma λI con $\lambda \in \mathbb{k}$.
 - a) Probar que si A es semejante a una matriz escalar λI entonces $A = \lambda I$.

b) Probar que una matriz diagonalizable que tiene un solo valor propio es una matriz escalar.

c) Deducir que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

7. Para una matriz cuadrada A , probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico (y entonces tienen los mismos valores propios).

8. Sea $T : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ la función que asigna a una matriz su traspuesta, $T(A) = A^t$.

a) Probar que T es lineal y que sus únicos valores propios son 1 y -1.

b) Hallar los subespacios de vectores propios correspondientes a 1 y -1.

c) ¿Existe una base de $M_n(\mathbb{R})$ cuyos elementos sean vectores propios de T ?

9. Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio característico

$$\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0.$$

a) Probar que $a_0 = \det(A)$. Deducir que A es invertible si y solo si $a_0 \neq 0$.

b) Probar que $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A)$, donde $\operatorname{tr}(A)$ es la traza de A .