

Práctico 0

Repaso de suma directa y proyecciones.

1. Sea V un espacio vectorial y $T \in \mathcal{L}(V)$. El operador T se dice que es una *proyección* si $T^2 = T$.
 - a) Supongamos que un espacio vectorial V se descompone como $V = W \oplus U$ y consideremos la función $T_W : V \rightarrow V$ definida por $T_W(v) = w$ si $v = w + u$, $w \in W$, $u \in U$. Probar que T_W es una proyección en V que verifica $\text{Im}(T_W) = W$ y $\text{Ker}(T_W) = U$. El operador T_W se llama la *proyección sobre W en la dirección de U* .
 - b) Probar que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es una proyección entonces $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$ y $T = T_W$ siendo $W = \text{Im}(T)$. (Sugerencia: $v = v - T(v) + T(v)$.)
 - c) Supongamos que un espacio vectorial V se descompone como $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, y consideremos para cada $i = 1, \dots, n$ la función $T_i : V \rightarrow V$ definida por $T_i(v) = v_i$ si $v = v_1 + \cdots + v_n$, $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$. Probar que las funciones T_i son proyecciones que verifican
 - 1) $T_i \circ T_j = 0$ si $i \neq j$.
 - 2) $T_1 + \cdots + T_n = \text{id}$.
 - 3) $\text{Im}(T_i) = V_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.
 - d) Recíprocamente, si tenemos un espacio vectorial V y proyecciones $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{L}(V)$ que verifican $1c1, 1c2$ y $1c3$, entonces $V = \text{Im}(T_1) \oplus \cdots \oplus \text{Im}(T_n)$.

2. Sean $T, S : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ definidas por

$$T(a + bx + cx^2) = -b + bx - bx^2, \quad S(a + bx + cx^2) = a + b + (b + c)x^2.$$

Se pide:

- a) Probar
 - 1) $T^2 = T$ y $S^2 = S$.
 - 2) $T \circ S = S \circ T = 0$.
 - 3) $T + S = \text{id}$.
 - b) Hallar bases de $U = \text{Im}(T)$ y de $V = \text{Im}(S)$.
 - c) Verificar que $\mathbb{R}_2[X] = U \oplus V$.
3. Sean $M_n(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices reales $n \times n$, S el subespacio formado por las matrices simétricas y A el subespacio formado por las matrices antisimétricas.
 - a) Probar que $M_n(\mathbb{R}) = S \oplus A$.
 - b) Hallar explícitamente la proyección de $M_n(\mathbb{R})$ sobre S en la dirección de A y la proyección de $M_n(\mathbb{R})$ sobre A en la dirección de S .

4. Hallar una proyección P que proyecte \mathbb{R}^2 sobre el subespacio generado por el vector $(1, -1)$ en la dirección del subespacio generado por el vector $(1, 2)$.
5. Demostrar que si $V = U \oplus W$ y P es la proyección sobre U en la dirección de W , entonces $\text{id} - P$ es la proyección sobre W en la dirección de U .
6. Demostrar que si $P : V \rightarrow V$ es una proyección y V tiene dimensión finita, entonces existe una base \mathcal{B} de V tal que la matriz asociada a P en la base \mathcal{B} tiene la forma $\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Qué información nos da la traza de una proyección?
7. Sea V un espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita) y $P : V \rightarrow V$ una proyección. Probar que $\text{id} + P$ es invertible y hallar su inversa.