Geometría proyectiva – notas de curso

Alvaro Rittatore

Índice general

A modo de introducción

Lo que sigue es el resultado de la planificación de las clases para el curso de *Tópicos de geometría 2018 – Geometría proyectiva*. No pretenden (al momento de ser escritas) ser un texto formal, ni notas de curso.

Capítulo 1

Geometría afín

1. El plano afín

La noción de "plano y espacio (de 3 dimensiones)" aparece tempranamente en el desarrollo de la matemática. En occidente, Euclides dio en sus *Postulados*, un sistema de axiomas para estudiar al mismo:

Postulado de Euclides

1. Dos puntos cualquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. *Postulado de las paralelas.* Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos — posteriormente, este postulado se cambio por otro equivalente: por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.

Esta presentación de las "relaciones de incidencia en el plano", está modelada en la percepción de la "realidad" como en plano o espacio 3-dimensional *real*.

Abstraigamos estas relaciones, independizándonos de la descripción del plano "real":

Definición 1.1 (Plano afín). Un *plano afín* es un conjunto π y un conjunto $\mathcal{L}$ de subconjuntos de π, llamados *rectas*, cuyos elementos, llamados *puntos*, satisfacen los siguientes axiomas :

A1: Dados dos puntos $P, Q \in \pi$, existe una única recta contiendo a P y Q (*por dos puntos pasa una única recta*).

A2: Dada una recta ℓ y un punto $P \notin \ell$, existe una única recta m tal que $P \in m$ y $\ell \cap m = \emptyset$ (*dada un recta ℓ y un punto P*

no perteneciente a ella, se puede trazar una única paralela a ℓ por P).

A3: Existen 3 puntos *no colineales*, es decir no pertenecientes a una misma recta.

Observación 1.2. El axioma A3 está implícito en los postulados de Euclides, ya que una circunferencia contiene puntos que no están en una recta.

Notación 1.3. Notaremos al plano afín π con conjunto de rectas $\mathcal{L}$ como $(\pi, \mathcal{L})$. A veces diremos "π es un plano afín" omitiendo especificar el conjunto de rectas.

Definición 1.4. Sea π un plano afín. Dos rectas $\ell, m \in \pi$ se dicen *paralelas* si coinciden o no tienen puntos en común (*no se cortan*).

Ejemplos 1.5. (1) El conjunto $\mathbb{R}^2 = \big(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$ junto con las rectas ℓ de ecuación $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ es un plano afín, llamado el *plano afín real*.

(A1) Dados $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$, la única recta que pasa por ellos es la recta de ecuación $(q_2-p_2)x+(p_1-q_1)y+(p_2-q_2)p_1+(q_1-p_1)p_2 = 0$.

(A2) Dado $P = (p_1, p_2)$ y ℓ de ecuación $ax+by+c = 0$ tal que $P \notin \ell$, la única paralela a ℓ por P es la recta de ecuación $ax+by-ap_1-bp_2 = 0$.

(A3) $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ no son colineales.

(2) Más en general, si $\Bbbk$ es un cuerpo, el conjunto $\Bbbk^2 = \big(x, y) : x, y \in \Bbbk\big\}$ junto con las rectas ℓ de ecuación $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \Bbbk$ es un plano afín, llamado el $\Bbbk$*–plano afín*.

Ejemplo 1.6 (El plano afín de 4 puntos). Si en el ejemplo anterior consideramos $\Bbbk = \mathbb{Z}_2$, obtenemos un plano afín de 4 puntos:

Sea $\pi = \{P, Q, R, S\}$ y consideremos como rectas todos los subconjuntos de 2 elementos de π. Entonces π con sus rectas son un plano afín.

Confirmemos ahora que los axiomas elegidos respetan nuestra intuición que "las rectas no son puntos"

Proposición 1.7. *Sea $(\pi, \mathcal{L})$ un plano afín y $\ell \in \mathcal{L}$ una recta. Entonces ℓ tiene al menos 2 puntos.*

Prueba: Supongamos por absurdo que existe una recta con un único punto: $\{P\} \in \mathcal{L}$. Como π tiene al menos 3 puntos no colineales, existen otros 2 puntos distintos $Q, R \in \pi \setminus \{P\}$, tales que P, Q, R no son colineales (sino, todos los puntos de π serían colineales). Consideremos la recta PQ y sea ℓ la única recta paralela a PQ por R. Entonces $\{P\}$ y PQ son 2 rectas distintas, paralelas ambas a ℓ por P, absurdo. $\square$

PROPOSICIÓN 1.8. *Dos rectas de un plano afín o son paralelas, o se cortan en un único punto.*

PRUEBA: Si se cortan en más de un punto, coinciden. $\square$

PROPOSICIÓN 1.9. *Sea π un plano afín. Entonces la relación de paralelismo es una relación de equivalencia en el conjunto de las rectas.*

PRUEBA: Es claro que una recta ℓ es paralela a sí misma, y que si $\ell \| m$ entonces $m \| \ell$. Supongamos ahora que $\ell \| m$ y que $m \| n$. Si $\ell \cap n = \emptyset$ no hay nada que probar. Sea $P \in \ell \cap n$. Entonces ℓ y n son paralelas a m por P, por lo que coinciden. $\square$

PROPOSICIÓN 1.10. *Un plano afín tiene al menos 4 puntos.*

PRUEBA: Sea π un plano afín. Por (A3), π contiene al menos 3 puntos distintos P, Q, R. Consideremos la recta QR. Por $(A2)$, existe una recta ℓ que pasa por P, paralela a QR. Del mismo modo, existe una recta m paralela a PQ que pasa por R.

Si $\ell \| m$, entonces $QR \| \ell \| m \| PQ$, por lo que $PQ \| QR$. Pero entonces $PQ = QR$ y los puntos P, Q, R son colineales, absurdo. Luego $\ell \not\| m$, por lo que se cortan en un punto S, que no puede ser Q. $\square$

DEFINICIÓN 1.11. Sea π un plano afín. Un *haz de rectas* es o bien

(1) el conjunto de rectas que pasa por un punto $P \in \pi$, o

(2) el conjunto de rectas paralelas a una recta $\ell \subset \pi$.

Notaremos al haz de rectas paralelas a $\ell \in \mathcal{L}$ como $[\ell]$.

El siguiente lema puede ser útil para resolver los ejercicios.

LEMA 1.12. *Sea π un plano afín con más de 4 puntos. Entonces π no puede ser la unión de dos rectas paralelas.*

PRUEBA: Sea ℓ y m dos rectas paralelas tales que $\pi = \ell \cup m$. Entonces podemos suponer que m tiene al menos dos puntos P, Q y que ℓ tiene al menos 3 puntos R, S, T. Tenemos que $PR \| QT$, ya que si no se intersectarían en un punto de ℓ o m. Pero entonces $PS \cap QT \neq \emptyset$ (por la unicidad de la paralela a QT por P), absurdo. $\square$

EJERCICIO 1.1. Probar que un plano no puede tener 5 puntos.

PARA PENSAR:. ¿El conjunto $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, podrá convertirse en un plano afín eligiendo astutamente las rectas?

2. Transformaciones del plano afín

Ejemplo 1.13. Sea π el plano euclídeo. Si aceptamos que la línea recta euclídea está en biyección con los números reales, eligiendo dos rectas ℓ y m que se cortan en un único punto O, podemos establecer un sistema de coordenadas, es decir una biyección entre π y $\mathbb{R}^2$:

EL punto O determina dos semirrectas en ℓ y m, y eligiendo un punto en cada una de ellas distinto de O, determinamos biyecciones $x : \ell \to \mathbb{R}$ e $y : m \to \mathbb{R}$. De este modo, a cada punto $P \notin \ell \cup m$ le podemos asociar los vértices del paralelogramo determinado por P y O, con lados paralelos a ℓ y m (considerando las paralelas a ℓ y m por P.

Tenemos entonces que $\operatorname{coord}_{\ell,m} : \pi \to \mathbb{R}^2$, $\operatorname{coord}_{\ell,m}(P) = \big(x(Q), y(S)\big)$ es una biyección del plano euclídeo con $\mathbb{R}^2$.

La biyección construida depende de la elección de las dos rectas ℓ y m.

Dadas dos rectas ℓ' y m' que se cortan en O', podemos establecer la función de cambio de coordenadas como sigue.

Supongamos que ℓ' es la recta por O' de dirección (a, b) y que m' es la recta por O' con dirección (b, c). Sea $(x_0, y_0) = \operatorname{coord}_{\ell',m'}(P)$ las coordenadas de O' en el sistema ℓ', m'. Entonces

$$\operatorname{coord}_{\ell,m}(P) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \operatorname{coord}_{\ell' m'}(P) - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.14. Consideremos el plano de 4 puntos (Ejemplo 1.6). Si consideramos una permutación σ cualquiera de $\{P, Q, R, S\}$, tenemos que lleva rectas en rectas. Si consideramos ahora los puntos en el orden $\{\sigma(P), \sigma(Q), \sigma(R), \sigma(S)\}$, tenemos que "las relaciones de incidencia entre las rectas son las mismas que antes".

Tratemos de formalizar un poco los ejemplos anteriores.

Proposición 1.15. *Sea $(\pi, \mathcal{L})$ un plano afín, y sea $\varphi : \pi \to \zeta$ una biyección. Entonces si $\varphi(\mathcal{L}) = \big\{\varphi(\ell) : \ell \in \mathcal{L}\big\}$ denota el conjunto de los subconjuntos formado por las imágenes de las rectas de π, entonces $\big(\zeta, \varphi(\mathcal{L})\big)$ es un plano afín.*

Los ejemplos 1.13 y 1.14 muestran dos biyecciones de un plano afín en sí mismo, tales que producen el mismo plano afín de partida.

Definición 1.16. Sean $(\pi, \mathcal{L})$ y $(\pi', \mathcal{L}')$ dos planos afines. Un *isomorfismo entre π y π'* es una biyección $\varphi : \pi \to \pi'$ de modo que $\varphi(\mathcal{L}) = \mathcal{L}'$.

Un *automorfismo* de π es un isomorfismo de π en si mismo. En otras palabras, un automorfismo es un isomorfismo que lleva puntos colineales en puntos colineales.

OBSERVACIONES 1.17. (1) Por definición la restricción de un automorfismo $\varphi : \pi \to \pi$ a una recta $\ell \subset \pi$, produce una biyección $\varphi|_\ell : \ell \to \varphi(\ell)$.
(2) Sea $\varphi : \pi \to \pi$ un automorfismo. Entonces

1. $\varphi(\ell \cap m) = \varphi(\ell) \cap \varphi(m)$ para todo par de rectas $\ell, m \subset \pi$.
2. $\varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q)$ para todo par de puntos $P, Q \in \pi$.

LEMA 1.18. *Sea $\varphi : \pi \to \pi'$ una biyección tal que $\varphi(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}'$. Entonces φ es un isomorfismo.*

PRUEBA: Sean $P, Q, R \in \pi'$ tres puntos colineales. Tenemos que probar que $A = \varphi^{-1}, B = \varphi^{1}(Q), C = \varphi^{-1}(R)$ son colineales (de este modo, $\varphi(AB) = PQ$). Si no lo fueran, $AB \neq BC$, por lo que $PQ = \varphi(AB) \neq \varphi(BC) = QR$, absurdo — recordar que φ lleva rectas en rectas, y que la restricción de φ a una recta es una biyección. □

El lema 1.18 puede "mejorarse" de este modo:

PROPOSICIÓN 1.19. *Sean $(\pi, \mathcal{L})$ y $(\pi', \mathcal{L}')$ dos planos afines y $T : \pi \to \pi'$ una biyección. Entonces T es un isomorfismo si y sólo si lleva puntos alineados en puntos alineados.*

PRUEBA: Si π es el plano afín de 4 puntos entonces toda biyección es un automorfismo. Supongamos que π tiene más de 4 puntos. Si T es una biyección que lleva rectas en rectas entonces lleva puntos alineados en puntos alineados.

Sea T una biyección que lleva puntos alineados en puntos alineados, y $\ell \in \mathbb{P}\mathcal{L}$. sean $P, Q \in \ell$. Entonces $T(\ell)$ está contenido en la recta $\ell' = T(P)T(Q) \in \mathbb{P}\mathcal{L}'$. Sea $R' \in \ell'$ y supongamos que $T^{-1}(R') \notin PQ = \ell$. Entonces $T^{-1}(R') = PT^{-1}(R') \cap QT^{-1}(R')$. Aplicando T, tenemos que $T\big(PT^{-1}(R)\big) \subset \ell$. Sea $S \in \mathbb{P}$ un punto y consideremos la recta $m = ST^{-1}(R')$. Entonces, o bien ℓ corta a m en un punto H o bien son paralelas. Como $T(m) = T\big(T^{-1}(R)H\big)$, tenemos que $T(m) \subset \ell'$. Si $m \| \ell$, entonces m es la única recta que paralela a ℓ por $T^{-1}(R)$. Tenemos entonces que $\mathbb{P}' = T(\mathbb{P}) \subset \ell \cup T(S)R$, lo que es un absurdo, pues ningún plano afín de más de 4 puntos puede ser la unión de 2 rectas.

Finalmente, si $\ell' \in \mathbb{P}\mathcal{L}'$ es una recta y P, Q dos puntos distintos de ella, tenemos que $T(T^{-1}(P)T^{-1}(Q) = \ell$.

La última afirmación es obvia. □

Proposición 1.20. *Sea* $\mathrm{Aut}(\pi)$ *el conjunto de automorfismos del plano afín* π*. Entonces* $\mathrm{Aut}(\pi)$ *es un grupo, con neutro* $\mathrm{id}_\pi : \pi \to \pi$*.*

Prueba: Es claro que la identidad es un automorfismo, y que la composición de automorfismos es un automorfismo. El lema 1.18 implica que φ^{-1} es también un automorfismo. □

Proposición 1.21. *Un automorfismo* $\varphi : \pi \to \pi$ *del plano afín lleva rectas paralelas en rectas paralelas*

Prueba: Si $\varphi(\ell) \cap \varphi(m) \neq \emptyset$, tenemos que $\ell \cap m = \varphi^{-1}\big(\varphi(\ell)\big) \cap \varphi^{-1}\big(\varphi(m)\big) \neq \emptyset$. □

Definición 1.22. Una *transformación afín del plano* $\mathbb{R}^2$, es una función de la forma

$$\varphi(x, y) = A \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \end{smallmatrix} \right)$$

donde $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ es una matriz invertible.

Ejercicio 2.1. Probar que las transformaciones afines del plano son automorfismos.

Probar que un automorfismo del plano que deja fijo al origen, lleva la suma de vectores en la suma de vectores.

Definición 1.23. Una *dilatación del plano afín* π es un automorfismo $\varphi : \pi \to \pi$ tal que $PQ \| \varphi(P)\varphi(Q)$. Notaremos por $\mathrm{Dil}(\pi)$ al conjunto de sus dilataciones.

Ejemplo 1.24. Las traslaciones y las homotecias con centro en un punto son dilataciones de $\mathbb{R}^2$.

Proposición 1.25. *Sea* π *un plano afín. Entonces* $\mathrm{Dil}(\pi) \subset \mathrm{Aut}(\pi)$*, es un subgrupo.*

Prueba: Claramente $\mathrm{id} \in \mathrm{Dil}(\pi)$. Por otra parte es claro que la composición de dilataciones es una dilatación. Sea $\varphi \in \mathrm{Dil}(\pi)$. Entonces $\varphi\big(\varphi^{-1}(P)\big)\varphi\big(\varphi^{-1}Q)\big) \| \varphi^{-1}(P)\varphi^{-1}(Q)$ para todo $P, Q \in \pi$; es decir, φ^{-1} es una dilatación.

Proposición 1.26. *Una dilatación está determinada por su valor en dos puntos distintos.*

Prueba: Sean $\varphi, \psi \in \mathrm{Dil}(\pi)$ que coinciden en dos puntos distintos P, Q. Como la composición de dilataciones es una dilatación, tenemos que $\varphi \circ \psi^{-1}$ es una dilatación que deja fijos P, Q. Luego, alcanzo con probar que una dilatación que deja fijo dos puntos P, Q es la identidad.

Sea $R \notin PQ$. Entonces $PR \| P\varphi(R)$ y $QR \| Q\varphi(R)$, por lo que $\varphi(R) \in PR \cap QR = R$. Sea ahora $S \in PQ$. Aplicando el mismo argumento para los puntos P, R, probamos que $\varphi(S) = S$. $\square$

Definición 1.27. Una *traslación del plano afín* π es una dilatación $\varphi \in \mathrm{Dil}(\pi)$ sin puntos fijos, o la identidad. Notaremos $\mathrm{Tras}(\pi)$ al conjunto de las traslaciones.

Proposición 1.28. *Si* $\varphi\,\mathrm{Tras}(\pi)$ *es una traslación distinta de la identidad es una traslación, entonces para todo todo* $P, Q \in \pi$*, se cumple que* $P\varphi(P) \| Q\varphi(Q)$.

Prueba: Supongamos que $\varphi \neq \mathrm{id}$ es una traslación y $P, Q \in \pi$ puntos tales que $P\varphi(P) \not\| Q\varphi(Q)$. Entonces $P\varphi(P) \cap Q\varphi(Q) = \{O\}$. Pero $\varphi\big(P\varphi(P)\big)$ es la paralela a $P\varphi(P)$ por $\varphi(P)$, por lo que $\varphi\big(P\varphi(P)\big) = P\varphi(P)$. Del mismo modo $\varphi\big(Q\varphi(Q)\big) = Q\varphi(Q)$, por lo que $\varphi(O) = O$. lo que es una contradicción.

Sea ahora $\psi \neq \mathrm{id}$ una dilatación tal que $P\varphi(P) \| Q\varphi(Q)$ para todo $P, Q \in \pi$.

Proposición 1.29. *El conjunto de las traslaciones* $\mathrm{Tras}(\pi)$ *es un subgrupo normal del grupo de las dilataciones del plano* π*.*

Prueba: La identidad es una traslación por definición, y claramente la inversa de una traslación no tiene puntos fijos, por lo que es una traslación. Sean $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Tras}(\pi)$ dos traslaciones y supongamos que $\tau_1 \circ \tau_2$ tiene un punto fijo P. Debemos probar que en ese caso $o\tau_1 \circ \tau_2 = \mathrm{id}$. Tenemos que $\tau_1\big(\tau_2(P)\big) = P$. Sea $Q \notin P\tau_2(P)$. Entonces por la Proposición 1.28 tenemos $P\tau_2(P) \| Q\tau_2(Q)$, por lo que $\tau_2(Q) = Q\tau_2(Q) \cap \tau_2(P)\tau_2(Q)$, la intersección de la paralela a $P\tau_2(P)$ por Q y la paralela a PQ por $\tau_2(P)$ (¡recordar que Q no pertenece a $P\tau_2(P)$!).

Por otro lado, tenemos que Q es la intersección de la recta paralela a $\tau_2(P)\tau_2(Q)$ por $P = \tau_1\big(\tau_2(P)\big)$ con la recta paralela a $\tau_1\big(\tau_2(P)\big)\tau_2(P) = P\tau_2(P)$ por $\tau_2(Q)$. por lo que $\tau_1\big(\tau_2(Q)\big) = Q$.

Entonces $\tau_1 \circ \tau_2$ tiene dos puntos fijos, y es la identidad.

Si $\tau \in \mathrm{Tras}(\pi)$ y $\sigma \in \mathrm{Dil}(\pi)$, tenemos que $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in \mathrm{Dil}(\pi)$. Supongamos que existe $P \in \pi$ tal que $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}(P) = P$. Entonces $\tau \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1}(P)$, por lo que $\tau = \mathrm{id}$, de donde $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}$. $\square$

3. Ejercicios

1. a. Sea π un plano afín y ℓ y m dos rectas paralelas. Probar que $\#\ell = \#m$.

b. Probar que dos rectas cualesquiera de π tiene el mismo cardinal.

2. Sea π un plano afín y $\ell \subset \pi$ una recta con n puntos. Probar que $\#\pi = n^2$.

3. ¿Cuáles son los automorfismos del plano con 4 puntos?

EJERCICIO 3.1. a) Hallar las transformaciones afines del plano $\mathbb{k}^2$ que son dilataciones.

b) Probar que toda traslación del plano real es una transformación afín. SUGERENCIA: recordar la "regla del paralelogramo" — este resultado vale para todo cuerpo.

Capítulo 2

El plano proyectivo

1. El plano proyectivo como completación del plano afín

DEFINICIÓN 2.1. Sea $(\pi, \mathcal{L})$ un plano afín. Consideremos la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{L}$ definida por el paralelismo. Dada una recta $\ell \in \mathcal{L}$, notamos $P_{[\ell]}$ al punto del espacio cociente $\mathcal{L}/\sim$ que se corresponde al haz de rectas paralelas definido por ℓ lo llamamos *punto ideal* o *punto al infinito definido por la dirección de la recta* ℓ.

Definimos la *completación de* $(\pi, \mathcal{L})$ como el par $(S, \mathcal{L}')$, donde $S = \pi \cup (\mathcal{L}/\sim)$, y $\mathcal{L}'$, el *conjunto de rectas proyectivas*, es el conjunto de subconjuntos de S cuyos elementos son

(a) Los subconjuntos de la forma $\ell \cup P_{[\ell]}$, con $\ell \in \mathcal{L}$.
(b) La *recta al infinito* $\ell_\infty = \{P_{[\ell]} : \ell \in \mathcal{L}\}$.

La completación de un plano afín es el ejemplo por excelencia de un *plano proyectivo*:

DEFINICIÓN 2.2. Un *plano proyectivo* es un par $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$, donde $\mathbb{P}$ es un conjunto y $\mathbb{P}\mathcal{L}$ es un conjunto de subconjuntos de $\mathbb{P}$ (las *rectas* o *rectas proyectivas* de $\mathbb{P}$, que verifica los siguientes axiomas

(P1) Dados $P, Q \in \mathbb{P}$ existe una única recta ℓ que los contiene — existe una única recta pasando por ellos.

(P2) Dos rectas distintas se cortan en exactamente 1 punto.

(P3) Existen 3 puntos no alineados.

(P4) Toda recta contiene por lo menos 3 puntos.

OBSERVACIÓN 2.3. El axioma (P2) puede reemplazarse por *dos rectas distintas se cortan*, ya que por (P1), si dos rectas se cortan en más de un punto, coinciden.

EJEMPLO 2.4 (La completación de un plano afín es un plano proyectivo). Probemos que si $(\pi, \mathcal{L})$ es un plano afín, entonces su completación es un plano proyectivo.

(P1) Si P, Q son dos puntos distintos de π, no pertenecen a ℓ_∞, y solo pasa una recta de $\mathcal{L}$ por ellos. Si P, Q son puntos ideales, como la única recta con más de un punto ideal es ℓ_∞, ésta es la única recta que pasa por ellos. Supongamos que $P \in \pi$ y $Q = P_{[\ell]}$ para alguna recta $\ell \in \mathcal{L}$, entonces por P pasa una única recta paralela a ℓ, que debe entonces contener a Q_ℓ; esta es la única recta que contiene a ambos.

(P2) Es claro que una recta $P \cup P_{[\ell]}$ corta a ℓ_∞ en $P_{[\ell]}$. Por otra parte, observemos que $\ell' = \ell \cup P_{[\ell]}$ es distinta de $m' = m \cup P_{[m]}$ si y sólo si $\ell \neq m$. Si $\ell \| m$, tenemos que $P_{[\ell]} = P_{[m]}$ y $\ell' \cap m = \{P_{[\ell]}\}$. Si $\ell \not\| m$, entonces $\ell \cap m = \{Q\}$, y como $P_{[\ell]} \neq P_{[m]}$, tenemos que $\ell' \cap m' = \{Q\}$.

(P3) Sea $P, Q, R \in \pi$ tres puntos no alineados. Entonces no están alineados en S.

(P4) Toda recta $\ell \in \mathcal{L}$ tiene al menos dos puntos de π (ver Proposición 1.7), y como tiene además al punto $P_{[\ell]}$, tenemos que tiene al menos 3 puntos.

Nos queda ver que la recta al infinito ℓ_∞ tiene al menos 3 puntos. esto es equivalente a probar que hay 3 haces de rectas paralelas distintos. Consideremos tres puntos no alineados $P, Q, R \in \pi$. Entonces PQ, PR, QR determinan 3 haces de rectas paralelas distintos.

Ejemplo 2.5 (La completación del plano real). Los haces de rectas paralelas de plano real se pueden identificar de esta manera: tomemos un par de rectas que se cortan como ejes coordenados; llamémoslas Ox, Oy, donde O es el punto de corte, que identificamos con el 0 de cada una de las rectas. Sea ℓ la recta paralela a Oy por 1. Entonces ℓ corta a todas las rectas por el origen, menos a Oy. La recta ℓ_∞ posee está entonces en biyección con la recta $\ell \cup P_{[\ell]}$.

Ejemplo 2.6 (El plano proyectivo de 7 puntos). Es fácil probar que la completación del plano con 4 puntos produce un plano proyectivo con 7 puntos (ejercicio!)

Definición 2.7. Sean $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ y $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L}')$ dos planos proyectivos. Una biyección $T : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ es un *isomorfismo* si lleva puntos colineales en puntos colineales.

Si $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L}) = (\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L}')$ y T es un isomorfismo, diremos que T es un *automorfismo del plano proyectivo* $\mathbb{P}$. Notaremos por $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ al conjunto de los automorfismos de $\mathbb{P}$.

Proposición 2.8. *Sean $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ y $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L}')$ dos planos proyectivos y $T : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ una biyección. Entonces T es un isomorfismo si y sólo si induce una biyección $\widetilde{T} : \mathbb{P}\mathcal{L} \to \mathbb{P}\mathcal{L}'$ — es decir, lleva las rectas de $\mathbb{P}$ en las rectas de $\mathbb{P}'$ de un modo biyectivo.*

En particular, si $\ell \in \mathbb{P}\mathcal{L}$, entonces $T|_\ell : \ell \to T(\ell)$ es una biyección entre las rectas ℓ y $T(\ell)$.

Prueba: Si T es una biyección que lleva rectas en rectas entonces lleva puntos alineados en puntos alineados.

Sea T un isomorfismo, y $\ell \in \mathbb{P}\mathcal{L}$. sean $P, Q \in \ell$. Entonces $T(\ell)$ está contenido en la recta $\ell' = T(P)T(Q) \in \mathbb{P}\mathcal{L}'$. Sea $R \in \ell'$ y supongamos que $T^{-1}(R) \notin PQ = \ell$. Entonces $T^{-1}(R) = PT^{-1}(R) \cap QT^{-1}(R)$. Aplicando T, tenemos que $T\big(PT^{-1}(R)\big) \subset \ell$. Sea $S \in \mathbb{P}$ un punto y consideremos la recta $m = ST^{-1}(R)$. Entonces, ℓ corta a m en un punto H por el axioma (P2). Como $T(m) = T\big(T^{-1}(R)H\big)$, tenemos que $T(m) \subset \ell'$.

Finalmente, si $\ell' \in \mathbb{P}\mathcal{L}'$ es una recta y P, Q dos puntos distintos de ella, tenemos que $T(T^{-1}(P)T^{-1}(Q) = \ell$.

La última afirmación es obvia. □

Corolario 2.9. *El conjunto de los automorfismos del plano proyectivo* $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ *es un grupo con la composición.*

Prueba: Es claro que id es un automorfismo y que la composición de automorfismos es un automorfismo. Sea $T : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ y $P, Q < R$ 3 puntos alienados de $\mathbb{P}$. Si $T^{-1}(P), T^{-1}(Q), T^{-1}(R)$ no están alineados, tenemos que $PQ \neq RQ$, absurdo. □

2. El espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial

Ejemplo 2.10 (El plano proyectivo real como un cociente). Consideremos en $\mathbb{R}^3 \setminus \{)\}$, donde $O = (0,0,0)$ la relación siguiente: $(x_0, x_1, x_2) \sim (y_0, y_1, y_2)$ si $\big\{(x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2)\big\}$ es linealmente independiente o coinciden (en otras palabras, si $O, (x_0, x_1, x_2)$ y (y_0, y_1, y_2) están alienados). Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia (¡probarlo!)

Llamemos $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \big(\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}\big)/\sim$ al conjunto cociente; notaremos $[x_0 : x_1 : x_2]$ a la clase de equivalencia de (x_0, x_1, x_2).

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ la proyección canónica. Consideremos un plano por el origen $\gamma = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\big\}$. Definamos $\ell_\gamma := \pi\big(\gamma \setminus \{O\}\big) \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$. Sea

$$\mathbb{P}\mathcal{L} = \big\{\ell_\gamma : \gamma \subset \mathbb{R}^3 \text{ plano por el origen }\big\}$$

Entonces $\big(\mathbb{P}(\mathbb{R}^3), \mathbb{P}\mathcal{L}\big)$ es un espacio proyectivo:

(P1) Dados dos puntos $P = [x_0 : x_1 : x_2], Q = [y_0 : y_1 : y_2] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, tenemos que existe un único plano por el origen γ que contiene a (x_0, x_1, x_2) y (y_0, y_1, y_2). Luego, ℓ_γ es la única recta de $\mathbb{P}(R^3$ que contiene a P y Q.

(P2) Sean $\ell_\gamma, \ell_\rho \in \mathbb{P}\mathcal{L}$ dos rectas distintas. Entonces, por construcción

$$\ell_\gamma \cap \ell_\rho = \pi\big(\gamma \setminus \{O\}\big) \cap \pi\big(\rho \setminus \{O\}\big) = \pi\big((\gamma \cap \rho) \setminus \{O\}\big).$$

Pero como γ y ρ son dos planos por el origen distintos, se cortan en una recta por el origen. Luego $\pi\big((\gamma \cap \rho) \setminus \{O\}\big)$ es un punto.

(P3) Sea $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ tales que O no pertenece al plano que determinan P, Q, R. Entonces $[P], [Q], [R]$ nos son colineales.

(P4) Sea γ un plano por el origen, y sean $P, Q, R \in \gamma$ tres puntos tales que las rectas OP OQ, OR son distintas dos a dos. Entonces $[P], [Q], [R]$ son puntos distintos de ℓ_γ (ver ejercicio 6.3).

Teorema 2.11. *El plano proyectivo construido en el ejemplo 6.4 y la completación de $\mathbb{R}^2$ son planos proyectivos isomorfos.*

Prueba: Sea $\big(S(\mathbb{R}^2), \mathcal{L}'\big)$ la completación del plano real afín. Para construir la biyección $T : \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \to S(\mathbb{R}^2)$, buscamos una "copia" del plano afín $\mathbb{R}^2$ dentro de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$. De acuerdo a la construcción de la completación, en caso de ser cierto el teorema, debemos restarle a $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ una recta proyectiva (que se corresponderá a la recta ℓ_∞ de puntos ideales).

Consideremos $U_2 = \big\{[x_0 : x_1 : 1] : x_0, x_1 \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, el conjunto de las clases de equivalencia con tercera coordenada no nula. La proyección en las primeras coordenadas, $p_{12} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $p_{1,2}(x_0, x_1, x_2) \to (x_0, x_1)$ es una transformación lineal, por lo que lleva rectas por el origen en rectas por el origen. Luego, la restricción de p_{12} a $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ es constante en las clases de equivalencia, e induce una función $\widetilde{p_{12}} : \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^2$. Definimos T en U_2 como la restricción de $\widetilde{p_{12}}$. $T|_{U_2} : U_2 \to \mathbb{R}^2$, $T\big([x_0 : x_1 : 1]\big) = (x_0, x_1)$.

Nótese que si $x_2 \neq 0$, tenemos que $[x_0 : x_1 : x_2] = [x_0/x_2 : x_1/x_2 : 1]$, por lo que $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \setminus U_2 = \big\{[x_0 : x_1 : 0] : x_0, x_1 \in \mathbb{R}\big\}$. Definimos $T\big([x_0 : x_1 : 0]\big) = P_{\{x_1 x - x_0 y = 0\}}$, el punto ideal de la recta $y = x_1/x_0 x$. (¡si $x_0 \neq 0$!: si $x_0 = 0$, es el punto ideal del eje Oy). Es fácil ver que esta definición tiene sentido: si consideramos la función $\mathbb{R}^3 \to \ell_\infty \subset S(\mathbb{R}^2)$ definida por $(x_0, x_1, x_2) \mapsto P_{\{x_1 x - x_0 y = 0\}}$, esta función es constante en las clases de equivalencia, por lo que induce una función $J : \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \to \ell_\infty$. Nótese que $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \setminus U_2 = \ell_{\{x_2 = 0\}}$, la recta proyectiva asociada al plano $\{x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

Tenemos que probar que la función T que hemos definido es una biyección que lleva puntos alienados en puntos alineados.

Observemos que $T|_{U_2}$ es una biyección entre U_2 y $\mathbb{R}^2$: claramente T_{U_2} es sobreyectiva, y si $T\big([x_0 : x_1 : 1]\big) = T\big([y_0 : y_1 : 1]\big)$, entonces

$x_i = y_i$, por lo que $[x_0 : x_1 : 1] = [y_0 : y_1 : 1]$. Por otra parte, $T|_{\ell_{\{x_2=0\}}}$ es una biyección entre $\ell_{\{x_2=0\}}$ y ℓ_∞: dada una recta del plano de ecuación $ax + by + c = 0$, $T\big([b : -a : 0]\big) = P_{\{ax+by+c=0\}}$, y si $P_{\{x_1x-x_0y=0\}} = P_{\{y_1x-y_0y=0\}}$, tenemos que (x_0, x_1) e (y_0, y_1) son colineales, por lo que $[x_0 : x_1 : 0] = [y_0 : y_1 : 0]$. Como $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ es la unión disjunta de U_2 y $\ell_{\{x_2=0\}}$ y $S(\mathbb{R}^2)$ es la unión disjunta de $\mathbb{R}^2$ y ℓ_∞, tenemos que T es biyectiva.

Veamos que T lleva puntos alineados en putos alineados. Ya vimos que $T_{\ell_{\{x_2=0\}}} = T\big(\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \setminus U_2\big) = \ell_\infty$. Entonces, necesitamos estudiar la imagen de una recta $\ell_\gamma \in \mathbb{P}\mathcal{L}$, con $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ un plano de ecuación $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$. Si $[x_0 : x_1 : x_2] \in \ell_\gamma$ con $x_2 \neq 0$, entonces $[x_0 : x_1 : x_2] = [x_0/x_2 : x_1/x_2 : 1]$ y $T\big([x_0 : x_1 : x_3]\big) = (x_0/x_2, x_0/x_2)$, con $a(x_0/x_2) + b(x_1/x_2) = -c$. En otras palabras, los puntos de ℓ_γ que no tienen su tercera coordenada cero son enviados por T a la recta m de ecuación $ax + by + c = 0$. Si $x_2 = 0$, entonces $T\big([x_0 : x_1 : 0]\big) = P_{\{x_1x-x_0y=0\}}$. Pero de la ecuación $ax_0 + bx_1 = 0$, deducimos que (a, b) es colineal con $(x_1, -x_0)$, por lo que m es paralela a la recta de ecuación $x_1x - x_0y = 0$; en otras palabras $T\big([x_0 : x_1 : 0]\big) = P_{\{ax+by+c=0\}}$, por lo que $T\big([x_0 : x_1 : 0]\big)$ pertenece a la recta proyectiva $\{a(x_0/x_2) + b(x_1/x_2) + c = 0\} \cup P_{\{a(x_0/x_2)+b(x_1/x_2)+c=0\}} \in \mathcal{L}'$. □

NOTACIÓN 2.12. Notaremos por $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ al plano proyectivo real.

PROPOSICIÓN 2.13. *Sea* $\ell \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ *una recta proyectiva. Si* $\pi = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \ell$ *y* $\mathcal{L} = \big\{m \cap \pi : \mathbb{P}\mathcal{L} \setminus \{\ell\}\big\}$*, entonces* $(\pi, \mathcal{L})$ *es un plano afín, de modo que* $S(\pi)$ *es isomorfo a* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$*.*

PRUEBA: Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ el plano tal que $\ell_\gamma = \ell$; supongamos que γ tiene ecuación $ax+by+cz = 0$. Consideremos una base de γ $\{e_0, e_1\}$ (por ejemplo $e_0 = (b, -a, 0)$ y $e_1 = (c, 0, -a)$), y completemos a una base $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, e_2\}$. Entonces, si trabajamos con coordenadas (x_0, x_1, x_2) en la base $\mathcal{B}$ tenemos que γ tiene ecuación $x_2 = 0$. Se sigue que $U_2 = \pi$ es un plano afín, tal que su completación es isomorfa a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (la recta al infinito se corresponde con ℓ_γ). □

Nótese que en el ejemplo 2.10 no usamos que estábamos trabajando con los números reales: la construcción del ejemplo mencionado es válida para cualquier cuerpo (ver ejercicio 6.4. Más aún, la construcción anterior se generaliza a dimensiones mayores, obteniendo de ese modo la noción de *espacio proyectivo*.

DEFINICIÓN 2.14. Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial. Definimos el *espacio proyectivo* $\mathbb{P}(V)$ como el cociente de $V \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia $v \sim w$ si v y w colineales: es decir, si $v = w$ o $\{v, w\}$ es un conjunto linealmente independiente.

La *recta proyectiva* en $\mathbb{P}(V)$ es la imagen por la proyección canónica $\pi : V\backslash\{0\} \to \mathbb{P}(V)$ de $W\backslash\{0\}$, con $W \subset V$ un subespacio de dimensión 2.

Ejemplo 2.15 (El plano proyectivo como cociente de la esfera). Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de centro el origen y radio 1. Entonces los puntos de S^2 satisfacen la ecuación $x^2+y^2+z^2 = 1$. Consideremos en S^2 la relación de equivalencia "ser puntos antípodas": $P, Q \in S^2$ son equivalentes si coinciden o están alineados con el origen.

La restricción $p : S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ de la proyección canónica $\mathbb{R}^3\backslash\{O\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ a la esfera es constante en las clases de equivalencia, por lo que induce una función $S^2/\sim \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, claramente biyectiva. La preimagen por p de una recta ℓ_γ en $\mathbb{P}^2(R)$ se corresponde con la intersección $\gamma \cap S^2$, es decir, con un círculo meridiano. Luego, si definimos en $S^2/\sim$ las rectas como $\pi(\gamma \cap S^2)$, donde $\pi : S^2 \to S^2/\sim$ es la proyección canónica, tenemos que el plano proyectivo se puede ver con $S^2/\sim$. Ver ejercicio 6.5.

3. El axioma de Desargues

En 1648 A. Bosse publicó un libro (en francés) sobre el uso de las técnicas de la perspectiva. En un apéndice al mismo, atribuye a Desargues la prueba del siguiente resultado:

Teorema 2.16 (Teorema de Desargues). *Si dos triángulos ABC y $A'B'C$ están en perspectiva central, entonces sus lados respectivos están en perspectiva axial.*

Expliquemos un poco el significado del llamado *Teorema de Desargues*:

Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ están en *perspectiva central*, si las rectas AA', BB' y CC' se cortan en un único punto común, que notaremos O. Los triángulos están en *perspectiva axial*, si los lados respectivos se cortan en puntos alineados: $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, y $BC \cap B'C'$ están alienados.

El resultado anterior es válido en el espacio euclídeo real, pero tenemos que tener en cuenta algunas configuraciones especiales (*degeneradas*): ¿qué pasa cuando $A = A'$? Si $A'B'C'$ es la imagen de ABC por una homotecia, entonces los triángulos están en perspectiva central pero sus lados son paralelos, ...

Hay varias pruebas del teorema de Desargues, en varios contextos (para el plano real, para el espacio real, para el plano proyectivo, para el espacio proyectivo...)

Resulta interesante ver si no se puede generalizar el teorema 2.16 a, digamos, un plano proyectivo cualquiera. Primero veamos que el enunciado sigue teniendo sentido, ya que si bien no tenemos la noción de "triángulo" (los puntos de nuestras rectas no están ordenados), las definiciones de perspectiva central y perspectiva axial están hechas en términos de relaciones de incidencia entre rectas.

Definición 2.17. Tres rectas ℓ, m, n de un plano proyectivo se dicen *concurrentes en* O si $\ell \cap m = m \cap n = \ell \cap n = O$. Observemos que en particular las 3 rectas son distintas, y perteneces todas al haz de rectas por O.

Consideraremos entonces el siguiente

Axioma de Desargues (P5) Sea $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ un plan proyectivo y A, B, C, A', B, C seis puntos diferentes tales que tales que A, B, C y $A'B', C'$ no están alineados y las rectas AA, BB' y CC se cortan en un único punto común. Entonces los puntos $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, y $BC \cap B'C'$ están alienados.

El lector atento notará que pusimos la etiqueta de "Axioma" y no de "Teorema": el Teorema de Desargues para el espacio euclídeo no se puede probar usando exclusivamente los axiomas (P1) – (P4): se utilizan otras propiedades del espacio real, que no se derivan de los axiomas.

De hecho, es posible construir planos proyectivos en donde (P5) no se verifica: "el enunciado (P5) es independiente de los axiomas (P1)–(P4)", por lo que podemos agregarlo como axioma — y producir resultados interesantes: el plano proyectivo real sí cumple (P5).

Un plano proyectivo que no cumple (P5) se dice que es no-desarguiano (y uno que lo cumple, obviamente, desarguiano). Su construcción está ligada al problema de la existencia de planos proyectivos (o afines) que no son isomorfos a espacios vectoriales de dimensión 2.

La prueba del teorema de Desargues en el caso real, puede hacerse de modo sintético, usando que existen proyecciones del espacio real en el plano real (*nótese que usamos más axiomas!*).

Veamos aquí una prueba analítica, dejando la prueba sintética para más adelante (ver **??**)

Teorema 2.18 (Teorema de Desargues para el plano proyectivo real). *Sean A, B, C y A', B', C' dos ternas de puntos no alineados tales que las rectas AA BB' y CC son concurrentes en el punto O. Entonces $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ y $R = BC \cap V'C'$ están alineados.*

Prueba: Notemos que por hipótesis, los puntos A, B, C, O y $A'B'C', O$ son tales que ninguna terna de ellos está alineada. Más aún, podemos suponer que $O \neq A', B', C'$ (de lo contrario, intercambiamos los triángulos). Sean $v_A, v_B, v_C, v_O \in \mathbb{R}^3$ representantes de las clases de equivalencia de A, B, C, O respectivamente. Entonces, tomando coordenadas en la base $\mathcal{B} = \{v_A, v_B, v_C\}$, tenemos que ninguna coordenada de v_O se anula. Si $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v_O) = (a, b, c)$, consideremos la base $\mathcal{B}' = \{av_A, bv_B, bv_C\}$. Entonces $\text{coord}_{\mathcal{B}}(v_O) = (1, 1, 1)$. Tenemos entonces que $A = [v_A] = [bv_A]$, $B = [v_B] = [bv_B]$, $C = [v_C] = [cv_C]$. Tomando coordenadas, tenemos que $A = [1 : 0 : 0]$, $B = [0 : 1 : 0]$, $C = [0 : 0 : 1]$ y $O = [1 : 1 : 1]$.

Calculemos ahora las coordenadas de A', B', C'. Como $A' = [a_0 : a_1 : a_2] \in OA$, tenemos que (a_0, a_1, a_2) pertenece al plano que pasa por $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (!, 1, 1)$, que tiene ecuación paramétrica $(\lambda(1, 0, 0) + \mu(1, 1, 1)$, luego $A' = [\lambda + \mu : \mu : \mu]$ para algún par λ, μ no simultáneamente nulos. Más aún, como $A' \neq A$, tenemos que $\mu \neq 0$. Entonces (dividiendo por μ) tenemos que $A' = [a' : 1 : 1]$ para algún $a' \in \mathbb{R}$. Del mismo modo, tenemos que $B' = [1 : b' : 1]$ y $C = [1 : 1 : c']$. Observemos que $a', b;'$ yc' no son 1 pues $O \neq A', B'C'$.

Aparte: Dados A, B, C, como el resultado es válido para toda terna A', B', C' que verifique el resultado, debemos probar el resultado para cualquier valor de $a', b', c' \neq 1$

Determinemos ahora P, Q, R. La recta AB se corresponde con el plano determinado por $(0, 0, 0), (1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$, que tiene ecuación $x_2 = 0$. Del mismo modo, la recta $A'B'$ se corresponde con el plano determinado por $(0, 0, 0), (a', 1, 1)$ y $1, b', 1$, que tiene ecuación $(1 - b')x_0 + (1 - a')x_1 + (a'b' - 1)x_2 = 0$. La intersección de estos planos es la recta de ecuación

$$\begin{cases} x_2 = & 0 \\ (1 - b')x_0 + (1 - a')x_1 = & 0 \end{cases}$$

Tenemos entonces que $P = [1 - a' : b' - 1 : 0]$. Del mismo modo, tenemos que $Q = [a' - 1 : 0 : 1 - c']$ y $R = [0 : 1 - b' : c' - 1]$. Como $(1-a', b'-1, 0)+(a'-1, 0, 1-c')+(0, 1-b', c'-1) = (0, 0, 0)$, el conjunto $\big\{(1 - a', b' - 1, 0), (a' - 1, 0, 1 - c'), (0, 1 - b', c' - 1)\big\}$ es linealmente dependiente, determinando un plano por el origen. En otras palabras ,P, Q y R están alineados. $\square$

DEFINICIÓN 2.19. Una *configuración* es par (C, L) donde C es un conjunto (los *puntos* y L es un conjunto de subconjuntos de C (las *rectas*) tales que satisfacen el siguiente axioma:

(C1) Dos puntos distintos pertenecen a lo sumo a una recta.

Notemos que dos rectas si se cortan, lo deben hacer en a lo sumo un punto.

EJEMPLO 2.20 (La configuración de Desargues). Tomemos 2 triángulos A, B, C y A', B', C' del espacio euclídeo que en que estén en perspectiva central "en posición general" (es decir, evitamos paralelismos, coincidencia de puntos , etc) . Sean $O = AA' \cap BB' \cap CC'$ y P, Q, R las intersecciones de los respectivos lados. Entonces, junto con las 10 rectas $AB, AC, BC, A'B', A'C', B'C', PQ = PR = QR, OA = AA', OB = BB'.OC = CC'$, formamos una configuración de 10 puntos y 10 rectas.

En la configuración podemos detectar 5 planos "obvios": $ABC, A'B'C', OAB = OA'B', OAC = OA'B', OBC = OB'C'$.

Cualquier punto de la configuración se puede ver como en centro de perspectiva de dos triángulos: la configuración de Desargues tiene muchas simetrías.

4. El ejemplo de Moulton

El ejemplo de Moulton es un plano afín tal que su completado no satisface el axioma (P5). Como ya vimos que si $\Bbbk$ es un cuerpo, entonces el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\Bbbk)$ satisface el axioma (P5), deducimos que estamos en presencia de un plano que no se obtiene a partir de un cuerpo.

La idea atrás del ejemplo de Moulton es "muy simple": en la configuración de Desargues "torcer" la recta QR de modo que no pase por P. El principio usado para "torcer" las rectas es el observado en la refracción de la luz (cuando un rayo de luz cambia de medio, "se tuerce"). Entonces si la configuración de Desargues está ubicada astutamente en relación al "cambio de medio" la recta QR se torcerá de modo adecuado y no pasará por P.

Formalicemos la idea anterior.

EJEMPLO 2.21 (*Plano de Moulton*). Definimos el plano de Moulton como el par $\mathbb{R}^2, \mathcal{L}$ donde $\mathcal{L}$ es un conjunto indexado por $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \times \mathbb{R}$.

La *recta de Moulton* ℓ_{mb} asociada al par (m, b) es

$$\ell_{mb} = \begin{cases} y = mx + b & \text{si } m \leq 0 \\ x = b & \text{si } m = \infty \\ \begin{cases} y = mx + b & \text{si } y \geq 0 \\ y = \frac{m}{2}x + \frac{b}{2} & \text{si } y \leq 0 \end{cases} & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

Probemos que el plano de Moulton es un plano afín.

Sean $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ dos puntos distintos. Si $p_1 = q_1$ entonces ambos están en la recta vertical que los une. Supongamos que $p_1 < q_1$. Si $q_2 \leq p_2$, entonces ambos están en una recta de pendiente negativa, que es la única que los contiene.

Queda ver el caso cuando $q_2 > p_2$. Si $p_2 \geq 0$, o $q_2 \leq 0$, entones es fácil ver que hay una única recta que los une. Si tenemos que $q_2 > 0 > p_2$, debemos resolver un pequeño sistema de ecuaciones para ver que efectivamente hay una única recta que los une.

Si $\ell \in \mathcal{L}$ y $P \in \mathbb{R}^2$. Tomamos la recta de Moulton de misma pendiente por P: ser a la única paralela a ℓ por P.

Finalmente, claramente tres puntos de semiplano superior no alineados (para las rectas usuales) son no alineados para las rectas de Moulton.

Tomemos ahora una configuración de Desargues y la movámosla (usando simetrías, rotaciones, traslaciones) para que sólo el punto P esté en el semiplano superior, y de modo que la pendiente de QR sea positiva. Entonces la recta de Moulton por RQ no pasa por P.

5. Dualidad

Definición 2.22. Sea $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ un plano proyectivo y $P \in \mathbb{P}$. El *haz de rectas por* P ("pencil of lines" en inglés) es el conjunto de rectas que pasa por P.

Lema 2.23. *Sea* $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ *un plano proyectivo y* $P, Q \in \mathbb{P}$ *dos puntos distintos. Entonces los haces de rectas por* P *y* Q *son distintos, y* PQ *es la única recta que pertenece a ambos haces.*

Prueba: Sea R un punto no colineal con P, Q. Entonces PR está en el haz por P pero no en el haz por Q, ya que en caso contrario P, Q, R están alineados. Sea ℓ una recta en ambos haces. Entonces $P, Q \in \ell$, por lo que ℓ es la única recta que pasa por P, Q. □

Definición 2.24. Sea $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ un plano proyectivo. Definimos el *plano proyectivo dual* como el par $(\mathbb{P}^\vee, \mathbb{P}\mathcal{L}^\vee)$, donde $\mathbb{P}^\vee = \mathbb{P}\mathcal{L}$ y $\mathbb{P}\mathcal{L}^\vee$ es el conjunto de haces de rectas en $\mathbb{P}$.

Proposición 2.25. *Sea* $(\mathbb{P}, \mathbb{PL})$ *un plano proyectivo. Entonces el plano proyectivo dual es un plano proyectivo. Más aún, si* $\mathbb{P}$ *es desarguiano, entonces* $PP^\vee$ *también lo es.*

Prueba: Veamos primero cómo se leen los axiomas P1–P5 en términos de los "puntos" y "rectas" del plano proyectivo dual.

(D1) Existe un único haz de rectas que contiene a dos rectas distintas dadas.

(D2) Dos haces de rectas distintos tienen una única recta en común.

(D3) Existen 3 rectas de $\mathbb{P}$ que no se intersectan en un punto común (no son *concurrentes*).

(D4) Todo haz de rectas tiene al menos 3 rectas.

(D5) Sean a, b, c y a', b', c' dos ternas de rectas de modo que los haces determinados por a, a', b, b' y c, c' contienen una (única) recta o en común. Entonces las rectas comunes a los haces determinados por a, b y a', b', a, c y a', c', b, c y b', c' pertenecen a un haz de rectas (son concurrentes).

Si $\ell, m \in \mathbb{P}^\vee$ son dos puntos distintos (dos rectas distintas de $\mathbb{P}$), entonces ℓ y m se intersectan en un único punto P de $\mathbb{P}$. Luego, el único haz de rectas que contiene a ℓ y m es el haz de rectas por P.

Sean A y B dos haces de rectas por P y Q. Entonces A y B son distintos si y solo si $P \neq Q$, y en ese caso la única recta en común de A y B es la recta PQ.

Sean P, Q, R 3 puntos no alineados de $\mathbb{P}$. Entonces las rectas PQ, PR, QR no coinciden, y $PQ \cap PR \cap QR = \emptyset$. Luego, no existe ningún haz de rectas que contenga a las 3 rectas.

Consideremos el haz de rectas por un punto P, y sea $\ell \in \mathbb{PL}$ una recta que no contiene a P. Como ℓ tiene al menos 3 puntos A, B, C, tenemos que el haz de rectas por P contiene a las rectas PA, PB, PC. Como estas rectas se cortan en A, no pueden ser iguales.

Supongamos que $\mathbb{P}$ satisface el axioma de Desargues. Sean a, b, c y $a'b, c'$ 2 ternas de rectas tales que los haces determinados por a, a', b, b' y c, c' tienen una recta o en común. Queremos probar que las rectas comunes a los haces determinados por a, b y a', b', a, c y a', c', b, c y b', c' son concurrentes.

Consideremos los puntos $O = a \cap a' = o \cap a \cap a'$, $A = b \cap b' = o \cap b \cap b'$, $B = a \cap b$, $C = a' \cap b'$, $A' = c \cap c' = o \cap c \cap c'$, $B' = a \cap c$, $C' = a' \cap c'$. Entonces las rectas $AA' = o$, $BB' = a$, $CC' = a'$ se intersectan en O, por lo que podemos aplicar el axioma de Desargues (en $\mathbb{P}$), obteniendo que los puntos $P = AB \cap A'B' = b \cap c$, $Q = AC \cap A'C' = b' \cap c'$

y $R = BC \cap B'C'$ están alineados. Pero $r = PQ$ es la recta común a los haces determinados por b, c y b', c', mientras que la recta BC y $B'C'$ son las rectas comunes a los haces determinados por a, b y a', b' y por a, c y a', c' respectivamente. Tenemos entonces que las rectas $r \cap BC \cap B'C' = R$. $\square$

COROLARIO 2.26 (Teorema de Desargues recíproco). *Sea* $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ *un plano proyectivo. Si dos triángulos están en perspectiva axial, están en perspectiva central.*

PRUEBA: Es simplemente el enunciado del axioma (D5). $\square$

Tomar "doble dual" da un plano proyectivo isomorfo al original.

PROPOSICIÓN 2.27. *Sea* $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ *un plano proyectivo. Entonces* $\big(\mathbb{P}^{\vee\vee} = (\mathbb{P}^{\vee})^{\vee}, \mathbb{P}\mathcal{L}^{\vee\vee} = (\mathbb{P}\mathcal{L}^{\vee})^{\vee}\big)$ *es isomorfo a* $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$.

PRUEBA: Notemos que como las rectas de $\mathbb{P}^{\vee}$ son los haces de rectas de $\mathbb{P}$, los puntos de $\mathbb{P}^{\vee\vee}$ son los haces de rectas por los puntos de $\mathbb{P}$. El isomorfismo buscado consiste en la biyección que envía P al haz de rectas por P. Ver ejercicio 6.7. $\square$

PARA PENSAR:. ¿Habrá alguna manera de establecer un isomorfismo entre $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}^{\vee}$?

OBSERVACIÓN 2.28 (El principio de dualidad). Consideremos un plano proyectivo $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ y su dual $(\mathbb{P}^{\vee}, \mathbb{P}\mathcal{L}^{\vee})$. Entonces toda propiedad que se deduzca de los axiomas (P1)–(P4) (o (P1)–(P5) si el plano es desarguiano), es válida para los "puntos" y "rectas" del plano dual $\mathbb{P}^{\vee}$, por lo que tenemos un enunciado "dual", que se enuncia para las rectas y los haces de rectas de $\mathbb{P}$. La correspondencia en el léxico tiene el siguiente aspecto:

Dado un enunciado para puntos y rectas del plano $\mathbb{P}$, el enunciado dual se obtiene intercambiando las palabras:

$$\begin{array}{rcl} \text{punto} & \longleftrightarrow & \text{recta} \\ \text{(el punto) pertenece (a la recta)} & \longleftrightarrow & \text{(la recta) pasa por (el punto)} \\ \text{alineados} & \longleftrightarrow & \text{concurrentes} \\ \text{intersección} & \longleftrightarrow & \text{recta por (recta común)} \\ & \dots & \end{array}$$

PARA PENSAR:. ¿Cómo sería una prueba del enunciado dual?

¿Habrá alguna manera de dar una prueba "que sirva en todos los casos"?

Veamos un ejemplo del principio de dualidad:

PROPOSICIÓN 2.29. *Sea* $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ *un plano proyectivo, supongamos que una recta de* $\mathbb{P}$ *tiene* $n+1$ *puntos. Entonces* $\#\mathbb{P} = n^2 + n + 1$.

PRUEBA: Sea $\ell \in \mathbb{P}\mathcal{L}$ una recta de $n+1$ puntos, y consideremos $P \notin \ell$. Entonces toda recta del haz de rectas por Q intersecta a ℓ en un punto, por lo que el haz de rectas por Q tiene $n+1$ rectas. Como la unión de las rectas de un haz es todo el plano proyectivo (¿por qué?), tenemos que $\mathbb{P}$ consiste de los $n+1$ puntos de la recta ℓ, P, y otros $n-1$ puntos por cada recta del haz de rectas por P, con un total de $n + 1 + 1 + (n+1)(n-1) = n^2 + n + 1$. □

El enunciado dual es entonces:

PROPOSICIÓN 2.30. *Supongamos que* P *es un punto de* $\mathbb{P}$ *tal que el haz de rectas por* P *tiene* $n+1$ *rectas. Entonces* $\mathbb{P}$ *tiene* n^2+n+1 *rectas.* □

PARA PENSAR:. Revisando los enunciados del plano proyectivo, ver si dualizando obtenemos resultados nuevos, o si reobtenemos algún resultado que ya habíamos probado directamente, sin usar el principio de dualidad.

6. Ejercicios

EJERCICIO 6.1. Dibujar la completación del plano de 4 puntos.

EJERCICIO 6.2. a) Probar que la relación en $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ dada por $(x_0, x_1, x_2) \sim (y_0, y_1, y_2)$ si $\big\{(x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2)\big\}$ es linealmente independiente (o coinciden) es una relación de equivalencia.

b) Más en general, probar que dado un $\Bbbk$-espacio vectorial V, la relación en $V \setminus 0$ dada por $v \sim w$ si y sólo si $\{v, w\}$ es linealmente independiente o $v = w$ es una relación de equivalencia.

EJERCICIO 6.3. Determinar los puntos de una recta de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$.

EJERCICIO 6.4. Dado un cuerpo $\Bbbk$, construir el plano proyectivo como el cociente de $\Bbbk^3 \setminus \big\{(0,0,0)\big\}$ (léase: probar que el cociente cumple con los axiomas).

EJERCICIO 6.5. Consideremos la representación del plano proyectivo con un cociente de la esfera. Probar que las rectas proyectivas pueden verso como cocientes de círculos meridianos.

EJERCICIO 6.6. Consideremos en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ el conjunto $U_0 = \big\{[1 : x_1 : x_2] : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\big\}$. Entonces, de acuerdo a la proposición 2.13, tenemos que U_0 es un plano afín, y la recta $\{x_0 = 0\} = \big\{[0 : x_1 : x_2] : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\big\}$ puede verse como la "la recta al infinito".

(a) Probar que podemos definir una función $T : U_0 \cap U_2 \to U_0 \cap U_2$ por la fórmula $[1 : x_1 : x_2] \mapsto [1/x_2 : x_1/x_2 : 1]$.

(b) Estudiar qué pasa con la imagen de una recta (intersectada con U_0) por T.

(c) Probar que $U_0 \cup U_2 \subsetneq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, pero que si definimos $U_1 \big\{ [x_0 : 1 : x_2] : x_0, x_2 \in \mathbb{R} \big\}$ entonces $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = U_0 \cup U_1 \cup U_2$.

Ejercicio 6.7. Completar la prueba de la proposición 2.27.

Capítulo 3

El espacio proyectivo

1. Espacio proyectivo

Definición 3.1. Un *espacio proyectivo (*3*-dimensional)* es una terna $(\mathbb{P}^3, \mathbb{P}\mathcal{L}, \mathbb{P}\mathcal{P})$, con $\mathbb{P}^3$ un conjunto (de *puntos*), y $\mathbb{P}\mathcal{L}$ (las *rectas*) y $\mathbb{P}\mathcal{P}$ (los *planos* dos conjuntos de subconjuntos de $\mathbb{P}^3$, satisfaciendo los siguientes *axiomas de incidencia*

(S1) Dos puntos distintos $P, Q \in \mathbb{P}^3$ determinan una única recta que los contiene.

(S2) Tres puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano que los contiene.

(S3) Una recta y un plano tienen en común *por lo menos* un punto.

(S4) Dos planos tienen en común por lo menos una recta.

(S5) Existen 4 puntos no coplanares, de modo que ninguna terna de puntos está alineada.

(S6) Cada recta tiene por lo menos 3 puntos.

Observación 3.2. Dado que tres puntos no alineados determinan un único plano que los contienen si la intersección de dos planos contiene estrictamente una recta, los planos coinciden.

Observemos que de los axiomas de deduce que si una recta tiene dos puntos en común con un plano, entonces la recta está contenida en el plano.

Lema 3.3. *Toda recta del espacio proyectivo es intersección de dos planos.*

Prueba: Sea ℓ una recta y $P, Q \in \ell$ dos puntos distintos. Por el axioma (S5) existen $R, S \in \mathbb{P}^3$ tal que P, Q, R, S no son coplanares y ninguna terna de ellos está alineada (sino se contradice el axioma). Como P, Q, R y P, Q, S determinan planos distintos, estos se cortan en una única recta distinta que necesariamente contiene a P, Q, por lo que se cortan en ℓ. □

Proposición 3.4. *Sea* $(\mathbb{P}^3, \mathbb{PL}, \mathbb{PP})$ *un plano proyectivo,* $\ell \in \mathbb{PL}$ *una recta y* $\pi \in \mathbb{PP}$ *un plano. Si* $\#\ell \cap \pi \geq 2$*, entonces* $\ell \subset \pi$*.*

Prueba: Sean $P, Q \in \ell \cap \pi$ y sea $R \in \pi \setminus \ell$. Sea $S \notin (\pi \cup \ell)$ — si no existiera un tal S, todo conjunto de 4 puntos no satisfacería el axioma (S5). Entonces π y el plano PQS se cortan en una única recta, que contiene a P, Q, por lo que es ℓ; en particular, $\ell \subset \pi$. ☐

Corolario 3.5. *Sea* $(\mathbb{P}^3, \mathbb{PL}, \mathbb{PP})$ *un plano proyectivo,* $\ell \in \mathbb{PL}$ *una recta y* $\pi \in \mathbb{PP}$ *un plano. Si* ℓ *no está contenida en* π*, entonces* $\#\ell \subset \pi = 1$*.*

Lema 3.6. *Sea* $(\mathbb{P}^3, \mathbb{PL}, \mathbb{PP})$ *un espacio proyectivo,* $\ell, m \in \mathbb{PL}$ *dos rectas distintas que se cortan. Entonces* $\ell \cup m$ *están contenidas en un único plano.*

Prueba: Está claro que si $\ell \neq m$, entonces $\#\ell \cap m \leq 1$. Luego, $\ell \cap m = \{P\}$. Sean $Q \in \ell \setminus m$ y $R \in m \setminus \ell$. Entonces P, Q, R determinan un único plano π, que contiene a $\ell \cup m$, ya que contiene dos puntos de cada una de las rectas. Como todo plano que contenga a $\ell \cup m$ debe contener a P, Q, R, probamos el resultado. ☐

Proposición 3.7. *En el espacio proyectivo, existen rectas que se cruzan, es decir que no son coplanares.*

Prueba: Este resultado es una consecuencia directa del axioma (S5): si P, Q, R, S son 4 puntos que satisfacen (S5), entonces las rectas PQ y RS se cruzan, ya que si se cortan, determinan un plano por el lema 3.6. ☐

Lema 3.8. *Sea* $(\mathbb{P}^3, \mathbb{PL}, \mathbb{PP})$ *un espacio proyectivo. Entonces los puntos no son rectas, y las rectas no son planos.*

Prueba: Como las rectas tienen al menos 3 puntos, un punto no es una recta. Sea ℓ una recta, supongamos que es un plano. Sea π un plano distinto de ℓ (existe pues sino se contradice el axioma (S5)). Entonces $\pi \cap \ell$ es un punto P por ser ℓ una recta y es una recta por ser ℓ un plano, Luego $\ell \cap \pi = \ell = \{P\}$, absurdo.

Proposición 3.9. *Sea* $(\mathbb{P}^3, \mathbb{PL}, \mathbb{PP})$ *un espacio proyectivo y* $\pi \in \mathbb{PP}$ *un plano. Entonces* π *es un plano proyectivo, si consideramos como rectas las rectas de* $\mathbb{PL}$ *que están contenidas en* π*.*

Prueba: Si $P, Q \in \pi$ entonces determinan una única recta PQ corta a π en al menos dos puntos, por lo que está contenida en π.

Sean ℓ, m dos rectas distintas contenidas en π. Consideremos $P, Q \in \ell$ dos puntos distintos. Como existe $R \notin \pi$ (sino se contradice el axioma (S5)), tenemos que P, Q, R determinan un plano γ distinto de π, que corta a π en ℓ. Pero $m \cap \gamma$ contiene al menos un punto S, y m no está incluida en γ, tenemos que que debe entonces pertenecer a $m \cap \ell$, por lo que $S = m \cap \ell$.

Por el lema 3.8, una recta no es un plano, por lo que existes 3 puntos no alineados.

El axioma (P4) es consecuencia directa del axioma (S6). □

2. El teorema de Desargues

En esta sección probaremos que si $\mathbb{P}^3$ es un espacio proyectivo, entonces sus planos proyectivos son desarguianos. Como los planos del espacio proyectivo real son isomorfos a un plano proyectivo, tendremos en particular una nueva prueba del teorema de Desargues. A diferencia de la prueba vista en el teorema 2.18, la prueba que veremos ahora es sintética.

Teorema 3.10 (Teorema de Desargues para el espacio proyectivo). *Sea $(\mathbb{P}^3, \mathbb{P}\mathcal{L}, \mathbb{P}\mathcal{P})$ un espacio proyectivo. Sean A, B, C y P, Q, R dos ternas de puntos no alineados, tales que las rectas AP, BQ, CR se cortan en un único punto O (*2 triángulos en perspectiva central*). Entonces los puntos de cortes de las rectas de lados correspondientes $AB \cap PQ, AC \cap PR, BC \cap QR$ están alineados.*

Prueba: Supongamos primero que los puntos no son coplanares. Entonces los puntos A, B, P, Q, O son coplanares, por lo que las rectas AB y PQ se cortan en un punto U. Del mismo modo $AC \cap PR = V$ y $BC \cap QR = W$. Pero los puntos U, V, W pertenecen a rectas de los planos ABC y PQR por lo que están en la intersección de ambos planos, que es una recta.

Supongamos ahora que los planos ABC y PQR coinciden y sea $X \notin ABC$. Sea $D \in XB$ diferente de X y B (recordar que las rectas tienen al menos 3 puntos). Como X, D, B, Q, O con coplanares (XDB y BQO están alineados), tenemos que las rectas OD y XQ se cortan en un punto Y. Luego, los triángulos ADC y PYR están en perspectiva central desde O, y no son coplanares. Luego, los puntos $U' = AD \cap PY$, $V = AC \cap PR$ y $W' = DC \cap YR$ están alineados.

Afirmamos que los puntos XUU' están alineados, y lo mismo sucede con XWW'. Si esto es cierto, tenemos que los puntos UVW están en la intersección del plano $XU'VW'$ con ABC, por lo que están alineados.

para probar la afirmación, observemos que los puntos X, U, U' pertenecen a los planos $XAB = XABD = XAD$ y $XPQ = XPQY = XPY$. Del mismo modo, los puntos X, W, W' están en la intersección de los planos $XBC = XBCD = XDC$ y $XQR = XQRY = XYR$. □

Observaciones 3.11. (1) En la prueba del teorema 3.10, usamos para el caso “plano” el caso “espacial”: esta prueba sólo es válida para planos proyectivos que pueden verse como planos de un espacio proyectivo. Como consecuencia, tenemos que un plano no desarguiano no puede ser el plano de un espacio proyectivo.

(2) El último argumento de la prueba se puede decir de este modo” los puntos U, V, W son la proyección de U', V, W' desde X hacia el plano ABC, ver ejercicio **??**.

Capítulo 4

Geometría sintética del plano proyectivo

1. El axioma de Fano

El axioma de Fano es un axioma de incidencia en el plano proyectivo, sobre los "puntos diagonales" de un "cuadrángulo completo".

DEFINICIÓN 4.1. Sea $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ Un plano proyectivo. Consideremos 4 puntos $ABCD$ de modo que ninguna terna de ellos esté alineada. El *cuadrángulo completo* determinado por los cuatro puntos es la colección de los siguientes 7 puntos y 6 rectas:

1. La rectas AB, AC, AD, BC, BD, CD.
2. Las intersecciones de las rectas anteriores: $A = AB \cap AC = AC \cap AD = AB \cap AD = AB \cap AC \cap AD$, $B = BA \cap BC \cap CD$, $C = CA \cap CB \cap CD$, $D = DA \cap DB \cap DC$, $P = AB \cap CD$, $Q = AC \cap BD$, $R = AD \cap BC$.

Los puntos P, Q, R se denominan los *puntos diagonales del cuadrángulo.*

EJEMPLO 4.2. Si consideramos el plano afín de 4 puntos A, B, C, D y su completado (el plano proyectivo de 7 puntos), entonces los puntos diagonales del cuadrángulo $ABCD$ (los 3 puntos al infinito) están alineados.

PROPOSICIÓN 4.3. *Dado un cuadrángulo de* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$*, los puntos diagonales no están alineados*

PRUEBA: Dado un cuadrángulo $ABCD$, establecemos coordenadas como en la prueba del teorema de Desargues 2.18: si $A = [v_A]$, $B = [v_B]$, $C = [v_C]$ no son colineales, $\{v_A, v_B, v_C\}$ esuna base de $\mathbb{R}^3$. Si $D = [v_D]$, tenemos que $v_D = av_A + bv_B + cv_C$, con $abc \neq 0$, ya que D no es colineal con ninguno de los pares AB, BC, AC. En la base $\{av_S, bv_B, cv_C\}$, tenemos que $A = [1 : 0 : 0]$, $B = [0 : 1 : 0]$, $C = [0 : 0 : 1]$ y $D = [1 : 1 : 1]$.

Calculemos ahora la intersección $AB \cap CD$: debemos intersectar los planos $\{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ y $\{(c, c, c + d) : c, d \in \mathbb{R}\}$. la intersección es la recta $\{(\lambda, \lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Luego $P = AB \cap CD = [1 : 1 : 0]$. Del mismo modo $Q = AC \cap BD = [1 : 0 : 1]$ y $R = AD \cap BC = [0 : 1 : 1]$. Como $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ es linealmente independiente, los puntos P, Q, R no están alineados. $\square$

El ejemplo 4.2 y la proposición 4.3 nos dicen que el hecho que los puntos diagonales estén alineados o no puede tomarse como axioma. Tenemos entonces el

Axioma P6 de Fano. Los puntos diagonales de un cuadrángulo no están alineados.

DEFINICIÓN 4.4. Un *plano de Fano* es un plano proeyctivo que satisface el axioma P6.

Veamos la versión dual del axioma de Fano.

DEFINICIÓN 4.5. Un *cuadrilátero completo* de un plano proyectivo consiste en 7 rectas y 6 puntos, que verifican lo siguiente:

1. 4 rectas a, b, c, d (de las 7) son tales que ninguna recta es concurrente.
2. Los 6 puntos son $A = b \cap d$, $B = c \cap d$, $C = a \cap b$, $D = a \cap c$, $E = b \cap c$, $F = a \cap d$.
3. Las otras 3 rectas son las rectas $p = BC$, $q = AD$, $r = EF$.

Las rectas p, q, r son las *rectas diagonales* del cuadrilátero.

PROPOSICIÓN 4.6. *Si* $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ *es un plano de Fano, entonces* $(\mathbb{P}^\vee, \mathbb{P}\mathcal{L}^\vee)$ *también lo es — es decir, las rectas diagonales de un cuadrilátero completo no son concurrentes.*

PRUEBA: Sea $(abcdpqr, ABCDEF)$ un cuadrilátero completo. Probemos que $ABCD$ es un cuadrángulo. Si ABC son colineales, tenemos que $C \in AB = d$, por lo que $a \cap b \cap d = C$, lo que es una contradicción. Del mismo modo se prueba que ABD, BCD y ACD no son colineales.

Consideremos el cuadrángulo completo asociado a $ABCD$. Entonces $P = AB \cap CD = d \cap a = F$, $Q = AC \cap BD = b \cap c = E$ y $R = AD \cap BC = p \cap q$ — además $r = PQ$. Entonces $R \in PQ$ si y solo si p, q, r con concurrentes. $\square$

2. Puntos armónicos

DEFINICIÓN 4.7. Una cuádrupla *ordenada* de puntos distintos A, B, C, D en una recta ℓ se dice *una cuádrupla armónica* si existe un cuadrángulo completo $XYZW$ tal que A, B son puntos diagonales del cuadrángulo — ordenamos los puntos del cuadrángulo para que $A = XY \cap ZW$

y $B = XZ \cap YW$ —, y C, D está cada uno en los otros lados del cuadrángulo — ordenamos para que $C = XW \cap \ell$ y $D = YZ \cap \ell$.

Si A, B, C, D son una cuádrupla armónica, notaremos $H(A, B; C, D)$ (por *Harmonic*, en inglés).

OBSERVACIONES 4.8. (1) En la definición, los roles de A, B y C, D son diferentes. Si A, B, C, D son armónicos, entonces tenemos $H(B, A; C, D)$, $H(A, B; D, C)$ y $H(B, A; D, C)$.
(2) Nótese que si $C = XW \cap YZ$ es el otro punto diagonal del cuadrángulo entonces $C = D$: para construir una cuádrupla armónica, necesitamos que los puntos diagonales no estén alineados.

En el resto de la sección, asumiremos que estamos trabajando en un plano proycetivo de Fano.

PROPOSICIÓN 4.9. *Sea* $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ *un plano proyectivo de Fano, y* A, B, C *3 puntos alineados. Entonces existe* D *tal que* $H(A, B; C, D)$. *Más aún, si* $\mathbb{P}$ *es desarguiano, entonces* D *es único. Diremos que* D *es el* cuarto punto armónico *de* A, B, C, *o que es el* conjugado armónico *de* C *respecto a* A, B.

PRUEBA: Debemos construir un cuadrángulo completo tal que A, B sean puntos diagonales y C pertenezca a un lado. Por el axioma (D3), sabemos que exiten dos rectas ℓ, m por A diferentes que de recta ABC (todo haz tiene al menos 3 rectas). Sea n una recta por C, diferente de ABC — la encontramos aplicando (D3) de nuevo. Sea r la recta por B y $\ell \cap r$, y s la recta por B y $W = s \cap m$; como $n \neq m$, tenemos que $r \neq s$, y ambas rectas son distintas de n, m y ABC. Tenemos entonces que $X = \ell \cap r, Y = \ell \cap s, Z = m \cap r, W$ conforman un cuadrángulo — $Y \neq Z$ pues $W \notin r$ —, tal que A, B son dos puntos diagonales. Sea t la recta por $r \cap m$ y $s \cap \ell$. Como $t \neq ABC$, tenemos que $t \cap ABC = D$. Como el plano $\mathbb{P}$ es de Fano, sabemos que D es distinto de A, B, C, y se cumple $H(A, B; C, D)$.

Supongamos ahora que se cumple el axioma (P5) — es decir, que el plano es desarguiano. Queremos probar que el D construido es único. Sea D' otro punto tal que $H(A, B; C, D')$. entonces tenemos un cuadrángulo $X'Y'Z'W'$ tal que $A = X'Y' \cap Z'W'$, $B = X'Z' \cap Y'X'$, $C = X'W' \cap AB$, $D = Y'Z' \cap AB$. Si llamamos $\ell' = AX'$, $m' = AZ'$, $n' = CX'$, y aplicamos la construcción anterior, tenemos $t' = Y'Z'$.

De lo anterior, deducimos que para probar la unicidad de D, alcanza con probar que la construcción que realizamos al principio no depende de la elección de las rectas ℓ, m, n. Lo hacemos variando cada recta por separado.

Variación de ℓ Sea ℓ' otra recta por A, distinta de m. Tenemos entonces un cuadrángulo $X' = \ell' \cap r$, $Y' = \ell' \cap s$, $Z' = m \cap r'$, $W = m \cap s$, donde r' es la recta por B y $\ell' \cap n$. Tenemos que probar que $t' = Y'Z'$ pasa por D, es decir que $YZ \cap Y'Z'$ pertenece a la recta AB. Para ello, observamos que los triángulos XYX y $X'Y'Z'$ están en perspectiva central por W, por lo que están en perspectiva axial: $A = XY \cap X'Y'$, $B = XZ \cap X'Z'$ y $YZ \cap Y'Z'$ están alineados.

Variación de m. Cambiando los roles de ℓ y m en la prueba anterior, probamos que en este caso obtenemos también el mismo D.

Variación de n. En este caso los 4 puntos del cuadrángulo cambian, por lo que la pprueba sigue un derrotero diferente. Probaremos que los triángulos XYZ y $W'Z'Y'$ están en perspectiva central, de donde deducimos que $A = XY \cap W'Z'$, $B = XZ \cap W'Y'$ e $YZ \cap Z'Y$ están alineados; en otras palabras, $D = D'$. Primero, observemos que los triángulos XYW y $W'Z'X'$ están en perspectiva axial, ya que $A = XY \cap W'Z$, $B = YW \cap Z'X$ y $C = XW \cap W'X'$. Luego, los triángulos están en perspectiva central desde el punto $O = XW' \cap YZ' \cap WX'$ (por el axioma dual (D5)). Del mismo modo, observamos que los triángulos ZWX y $Y'X'W$ están también en perspectiva axial, por lo que están en perspectiva central desde $ZY' \cap WX' \cap XW'$. Pero observemos que esta última intersección tiene que ser O, de donde deducimos que los triángulos XYZ y $W'Z'Y'$ están perpectiva central desde $XW' \cap YZ' \cap ZY' = O$. $\square$

Proposición 4.10. *Sea* $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ *un plano proyctvo de Fano. Entonces si* $H(A, B; C, D)$*, entonces* $H(C, D; A, B)$*, por lo que*

$$H(A, B; C, D) \Leftrightarrow H(A, B; D, C) \Leftrightarrow H(B, A; C, D) \Leftrightarrow H(B, A; D, C) \Leftrightarrow$$
$$H(C, D; A, B) \Leftrightarrow H(C, D; B, A) \Leftrightarrow H(D, C; A, B) \Leftrightarrow H(D, C; B, A)$$

Prueba: Sea $XYZW$ un cuadrángulo asociado a A, B, C, D; consideremos $U = DX \cap CZ$ y $T = XW \cap YZ$. Entonces $XTUZ$ es un cuadrángulo tal que C, D son dos de sus puntos diagonales (¡ejercicio!). Como $B = XZ \cap CD$, alcanza con probar que $A \in TU$.

Los triángulos XUZ yYTW están en perspectiva axial, ya que $XU \cap YT = D$, $XZ \cap YW = B$ y $UZ \cap TW = C$. Luego, los triángulos están en perspectiva cventral, por lo que $A = XY \cap WZ = UT \cap XY \cap WZ$. $\square$

Ejemplo 4.11. Consideremos el completado de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$; es un plano proeyctivo con $9+3+1 = 13$ puntos. Veremos luego que si un cuerpo $\Bbbk$ tiene característica disntina de 2, entonces el plano proyectivo asociado $\mathbb{P}(\Bbbk^3)$ es de Fano. Tenemos entonces que los 4 puntos de una recta son armónicos, no importa el orden en que se tomen: en efecto, dados 3 puntos de una recta existe un cuarto punto armónico por la proposición 4.9. El cuarto punto armónico debe ser el restante punto.

Ejemplo 4.12 (Puntos armónicos y razón doble). La construcción del cuarto punto armónico está ligadon el caso real, a la noción de *razón doble*.

Dados 3 putnos alineados del plano real A, B, C, consideremos el valor $\frac{C-A}{C-B}$ (el cociente de las distancias con signo de A y B a C). Si consideramos el caso especial cuando C pertenece al segmento AB, vemos que el valor anterior (la *razón simple* $(A, B; C) = \frac{C-A}{C-B}$) indica la proporción de la longitud de los segmentos en que C divide a A, B. Es fácil ver que $(A, B; C)$ es negativo si C pertenece al segmento AB, y positivo sino.

Por ejemplo, si C es el punto medio del segmento AB, entonces $(A, B; C) = -1$.

El *tereoma de Tales* nos dice que $\frac{C-A}{C-B}$ es invariante por proyección paralela en otra recta ("proyeccion desde el infinito"). Ahora bien, si realizamos una proyección central desde un punto del plano hacia otra recta, es claro que el valor $(A, B; C)$ cambia. En otras palabras: la razón sinmple no es un invariante proyectivo.

Ahora bien, si tenemos 4 putnos alineados A, B, C, D, entonces el valor

$$R_\chi(A, B; C, D) = \frac{C-A}{C-B} \Big/ \frac{D-A}{D-B}$$

es invaraínte por proyección central. QUeda como ejercicio ver que los puntos A, B, C, D son armónicos su y solamente si $R_\chi(A, B; C, D)$ — su *razón doble* —, es igual a -1.

3. Perspectividades y proyectividades

Definición 4.13. Sean ℓ, m dos rectas en un plano proyectivo; cosnideremos un punto $O \notin \ell \cup m$. Entonces toda recta por O corta a ℓ y m en un único punto, estableciendo una biyección entre los puntos de ℓ y los de m, que llamaremos *perpectividad*. Notaremos $p_{O,\ell,m} : \ell \to m$ la perspectividad de centro O — diremos qeu O es el *centro de perspectiva*. Cuando las rectas ℓ, m estén claras por el contexto, notaremos p_O.

Observaciones 4.14. (1)Si $p_{O,\ell,m} : \ell \to m$ es una perspectividad, entonces su inversa $p^{-1}_{O,\ell,m} : n \to \ell$ es una perspectividad.

(2) Si ℓ y m son dos rectas distintas y $p_{O,\ell,m}$ es una perspectividad, entonces $p_O(\ell \cap m) = \ell \cap m$.

(3) La única perspectividad de ℓ en sí misma es la identidad.

La composición de perspectividades no es en general una perspectividad.

LEMA 4.15. *Sean ℓ, m dos rectas que se cortan y $p_{O,\ell,m} : \ell \to m$ y $p_{Q,m,n} : m \to n$ dos perspectividades tal que la composición $p_Q \circ p_O = p_{R,\ell,n}$ es una perspectividad. Entonces $\ell \cap n \in OO'$.*

PRUEBA: En efecto, sea $Y = \ell \cap n$ e $Y' = p_{O,\ell,m}$. Entonces $Y = p_{R,\ell,n}(Y) = p_{Q,m,n}(Y')$. Luego $Y' = O'Y \cap m = OY \cap m$, por lo que tenemos la igualdad de las rectas $YY' = OY = O'Y$. □

COROLARIO 4.16. *La composición de perspectividades no es necesariamente una perspectividad.* □

DEFINICIÓN 4.17. Una *proyectividad* entre dos rectas ℓ, m de un espacio proeyctivo es una biyección $p_{\ell,m} : \ell \to m$ tal que existen una cantidad finita de perspectidades $p_{O_0,\ell,\ell_1}, , p_{O_1,\ell_1,\ell_2}, \ldots, p_{O_n,\ell_n,m}$ tal que $p_{\ell,m} = p_{O_n,\ell_n,m} \circ \cdots \circ p_{O_0,\ell,\ell_1}$.

PROPOSICIÓN 4.18. *Sea $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ un plano proyectivo y $\ell \in \mathbb{P}\mathcal{L}$ una recta. Entonces el conjunto de las proyectividades de ℓ en sí misma es un grupo, que notaremos $PJ(\ell)$.*

PRUEBA: Es claro por la definición de proyectividad. □

Es fácil ver que las proyectividades de una recta ℓ en sí misma son 2-transitivas, es decir dados dos pares de puntos $A_1, A_2 \in \ell$ y $A'_1, A'_2 \in \ell$, con $A_1 \neq A_2$ y $A'_1 \neq A'_2$, entonces existe una proyectividad $p_{\ell,\ell}$ que lleva A_i en A'_i.

LEMA 4.19. *Sean ℓ, m dos rectas distintas, $X = \ell \cap m$, y $A_1, A_2 \in \ell$ y $A'_1, A'_2 \in m$ puntos distintos, distintos de X. Entonces existe una perspectiva que lleva A_i en A'_i.*

En particular, la acción del grupo de las proyectividades en una recta ℓ es 2–transitiva.

PRUEBA: La perspectiva buscada es $p_{A_1A'_1 \cap A_2A'_2,\ell,m}$.

Probaremos la última afirmación cuadno las rectas tienen al menos 5 puntos. Dados dos puntos disntinos $B_1, B_2 \in \ell$, consideramos una recta auxiliar m que pasa por un punto distinto de B_i, A_i, distinta de ℓ. Sea $O \notin \ell \cup m$ y sean $C_i = p_{O,\ell,m}(A_i)$. Entonces $p_{B_1C_1 \cap B_2C_2,m,\ell} \circ p_{O,\ell,m}$ es la proyectividad buscada. □

Veamos ahora que en realidad, podemos probar que la acción de $PJ(\ell$ es 3–transitiva:

PROPOSICIÓN 4.20. *Sea* $(\mathbb{P}, \mathbb{PL})$ *un plano proyectivo y* $\ell \in \mathbb{PL}$. *Entonces la acción de* $PJ(\ell)$ *en* ℓ *es* 3*–transitiva: dadas 2 ternas de puntos* A_1, A_2, A_3 *y* A'_1, A'_2, A'_3*, de la recta* ℓ*, con* $A_i \neq A_j$*,* $A'_1 \neq A'_j$ *si* $i \neq j$*, existe una proyectividad* $p_{\ell,\ell} : \ell \to \ell$ *tal que* $p_{\ell,\ell}(A_i) = A'_i$.

PRUEBA: Sea $m \in \mathbb{PL}$ una recta diferente de ℓ, que no pasa por A_1, A'_1 (¿por qué existe?). Sea $O \notin \ell \cup m$. Aplicamos la perspectividad $p_{O,\ell,m}$ a los puntos A_i, obteniendo $A_1", A_2", A_3" \in m$. Si podemos construir una proyectividad $p_{\ell,m}$ que envíe A'_i en $A_i"$, la proyectividad $p^{-1}_{\ell,m} \circ p_{O,\ell,m}$ cumple las propiedades deseadas.

Observando que $A_1, A'_1 \neq \ell \cup m$ por construcción, vemos que alcanza entonces con probar que dadas dos rectas distintas ℓ, m y tres puntos en cada una de ellas A, B, C y A', B', C', con $A, A' \neq \ell \cap m$, podemos construir una proyectividad $p_{\ell,m}$ tal que $p_{\ell,m}(A) = A'$, $p_{\ell,m}(B) = B'$, $p_{\ell,m}(C) = C'$.

Consideramos las rectas por A que pasan por A', B', C', y las rectas por A' que pasan por A, B, C. Si $AB' = A'B$, tenemos que $AA'BB'$ están alineados, por lo que $\ell = AB = A'B' = m$, lo que es absurdio. Luego las rectas AB' y $A'B$ se cortan. Del mismo modo, las rectas AC' y $A'C$ se cortan; sean $B" = AB' \cap A'B$ y $C" = AC' \cap A'C$. La recta $B"C"$ es distinta de AA', por lo que $AA' \cap B"C"$ es un punto, que llamamos $A"$. Tenenemos entonces que la composición de perspectividades $p_{A,B"C",\ell} \circ p_{A',\ell,B"C"}$ es la proyectividad buscada. □

OBSERVACIÓN 4.21. En principio, la proposición 4.20 no garantiza la unicidad de la proyectividad construida. Más adelante veremos que la unicidad de hecho puede introducirse como un nuevo axioma (ver **??**). Este nuevo axioma implicará además que la recta $B"C"$ es independiente de las ternas de puntos elegidas.

Veamos el efecto de una perspectividad en una cuaterna de puntos armónicos.

LEMA 4.22. *Sea* $(\mathbb{P}, \mathbb{PL})$ *un plano proyectivo que cumple P5 y P6. Sean* $\ell \neq m$ *dos rectas y* $p = p_{O\ell,m}$ *una perspectividad. Si* $B = \ell \cap m$ *y* $H(A, B; C, D)$*, entonces* $H\big(p(A), p(B) = B; p(C), p(D)\big)$.

PRUEBA: Sea $X = OB \cap Ap(D)$. Entonces $p(A)OXp(D)$ es un cuadrángulo completo, siendo $B = OX \cap p(A)p(D)$ y $A = Op(A) \cap Xp(D)$ dos puntos diagonales. El tercer punto diagonal es $D = Op(D) \cap AB$, y como se cumple $GH(A, B; C, D)$, tenemos por unicidad del punto armónico que $C = p(A)X \cap AB$.

Por otra parte, el cuadrángulo completo $ACXO$ tiene como puntos diagonales a $p(A) = CX \cap OA$ y $B = OX \cap AC$. La recta $p(A)B$ cora a

OC en $p(C)$ y a AX en $p(D)$, por lo que se cumple $H\big(p(A).p(B);p(C0,p(D)\big)$. □

PROPOSICIÓN 4.23. *Sea* $(\mathbb{P},\mathbb{P}\mathcal{L})$ *un plano proyectivo que cumple P5 y P6. Entonces una proyectividad envía puntos armónicos en putnos armónicos.*

PRUEBA: Por definición, una proyectividad es una composición de perpectividades. Debemos entonces probar que una perspectividad $p = p_{O,\ell,m}$ lleva puntos armónicos $A,B,C,D \in \ell$ a puntos armónicos en m. El lema 4.22 nos garantiza este hecho cuando uno de los puntos armónicos es la $\ell \cap m$; veamos como usar este caso particular para probar lo que necesitamos.

Supongamos entonces que $p(B) \neq B$, y consideremos la recta auxiliar $n = Ap(B)$. Si $q = p_{O,\ell,n}$, tenemos que $q(A) = A$, $q(B) = p(B)$ y se cumple $H\big(A,p(B);q(C),q(D)\big)$. Pero $r = p_{O,n,m}$ es tal que $r(A) = p(A)$, $r\big(p(B)\big) = p(B)$, $r\big(q(C)\big) = p(C)$ y $R\big(q(D)\big) = p(D)$, por lo que se cumple $H\big(p(A),p(B);p(C),p(D)\big)$. □

COROLARIO 4.24. *Sea* $(\mathbb{P},\mathbb{P}\mathcal{L})$ *un plano que verifica P5 y P6 y* $\ell \in \mathbb{P}\mathcal{L}$ *una recta cualquiera. Entonces el grupo* $PJ(\ell)$ *no es* 4*-transitivo.*

PRUEBA: Si A_1,A_2,A_3,A_4 son 4 puntos armónicos de ℓ y A'_1,A'_2,A'_3,A'_4 son 4 puntos que *no* son armónicos, ninguna proyectividad puede tener a A'_i como imagen de A_1 para todo i. □

Capítulo 5

Proyectividades: el teorema fundamental

En la proposición **??** vimos que en un plano proyectivo, dadas dos ternas de puntos colineales A_1, A_2, A_3 y A'_1, A'_2, A'_3, existe al menos una-proeyctividad $p_{A_1A_2,A'_1A'_2} : A_1A_2 \to A'_1A'_2$ tal que $p_{A_1A_2,A'_1A'_2}(A_i) = A'_i$. Veremos más adelante que en el plano proyecivo real, $\mathbb{P}(\mathbb{R})$, se cumple que dicha proyectividad es única: es el llamada *teorema fundamental de las proyectividades*.

AL igual que con el teorema de Desargues, tenemos que el teorema fundamental de las proyectividades no se deduce de los axiomas anteriores (P1-P6 en este caso), por lo que es un axioma. De hecho, probaremos que si asumimos el teorema fundamental como axioma, entonces P1-P4 junto con P7 implican P5: el teorema de Desargues se deduce del teorema fundamental de las proyectividades. Tenemos entonces al momento las siguientes definiciones:

Nombre	**Axiomas**
Plano proyectivo	P1-P4
Plano desarguiano	P1-P5
Plano de Fano	P1-P6
Plano de Pappus	P1-P4, P7

1. El teorema fundamental de las proyectividades

Axioma P7 (Teorema fundamental de las proyectividades). Sea $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ un plano proyectivo. El axioma P7 es el siguiente:

Sea $\ell \in \mathbb{P}\mathcal{L}$, y A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, A'_3 2 ternas de puntos en ℓ, los 6 puntos distintos entre sí. Entonces existe a lo sumo un proyectividad $p : \ell \to \ell$ tal que $p(A_i) = A'_i$.

Veamos tres formulaciones equivalentes del axioma P7

Proposición 5.1. *Sea $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ un plano proyectivo. Entonces son equivalentes:*

(1) El axioma P7.

(2) El axioma P7 se verifica para una recta ℓ dada.

(3) Sean $\ell, \ell' \in \mathbb{P}\mathcal{L}$, dos rectas distintas, y $A_1, A_2, A_3 \in \ell$, $A'_1, A'_2, A'_3 \in \ell'$ 2 ternas de puntos distintos entre sí. Entonces existe una única proyectividad $p : \ell \to \ell'$ tal que $p(A_i) = A'_i$.

(4) Sean $\ell, \ell' \in \mathbb{P}\mathcal{L}$, dos rectas distintas, y $X = \ell \cap \ell'$. Si $p : \ell \to \ell'$ es una proyectividad tal que $p(X) = X$, entonces p es una perpectividad.

Prueba: Es claro que (1) implica (2). Supongamos que existe una recta ℓ que verifica el axioma, y sea ℓ' otra recta. Sean $A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, A'_3$ seis puntos distintos, y consideremos una perspectividad $q = p_{O,\ell,\ell'} : \ell \to \ell'$. Si $p_1, p_2 : \ell' \to \ell'$ son dos proyectividades tales que $p_j(A_i) = A'_i$, tenemos que $q \circ p_i \circ q^{-1} : \ell \to \ell$ son dos proyectividades llevando los puntos $q(A_i)$ en los puntos $q(A'_i)$. Como q es biyectiva, tenemos por hipótesis que $q \circ p_1 \circ q^{-1} = q \circ p_2 \circ q^{-1}$, por lo que $p_1 = p_2$.

(1) $\Longrightarrow$ (3). Sean $p_1, p_2 : ell\ to \ell'$ dos proyectividades tales que $p_j(A_i) = A'_i$, y consideremos una perspectividad $q : \ell' \to \ell$ (desde un punto $O \notin \ell \cup \ell'$).

Entonces $q \circ p_j : \ell \to \ell$, $j = 1, 2$, son dos proyectividades enviando A_i en $q(A'_i)$. Como q es biyectiva, los puntos $q(A'_i)$ son diferentes, por lo que $q \circ p_1 = q \circ p_2$, de donde $p_1 = p_2$.

(3) $\Longrightarrow$ (4). Sea $p : \ell \to \ell'$ una proyectividad tal que $p(X) = X$. Consideremos $A, B \in \ell \backslash \{X\}$. Entonces existe una perspectividad $p_{O,\ell,\ell'}$ que envía A, B en A', B' — alcanza con tomar $O = AA' \cap BB'$. Como $p_{O,\ell,\ell'}(X) = X$, deducimos de (3) que $p = p_{O,\ell,\ell'}$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Sean $p_1, p_2 : \ell \to \ell$ dos proyectividades tales que $p_j(A_i) = A'_i$ para 2 ternas de puntos distintos $A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, A'_3$. Consideremos $X \notin \ell$, y tomemos dos rectas m, m' por X, Consideramos dos proyectividades $q : \ell \to m$ y $q' : \ell \to m'$ tales que $q(A_1) = X$ y $q'(A'_1) = X$ (es fácil ver que tales proyectividades existen, es más peuden tomarse perpectividades). Entonces, tenemos que $q' p_i q^{-1} : m \to m'$ so ndos proecytividades tales que $q' p_i q^{-1}(X) = X$, por lo que son dos perspectividades por (4). Pero si $i = 2, 3$, entonces $q' p_i q^{-1}\big(q(A_i)\big) = q'\big(p_i(A_i)\big) = q'(A'_i)$, por lo que el centro de ambas perspectividades es $q(A_2)q'(A'_2) \cap q(A_3)q'(A'_3)$: en otras palabras $q' p_1 q^{-1} = q' p_2 q^{-}$, por lo que $p_1 = p_2$. $\square$

Veamos ahora la formulación dual del axioma P7.

Antes definamos la noción de *correspondencia elemental*, que nos permitirá relacionas las proeyctividades en rectas de un plano poryectivo con las poreyctividades de haces de rectas.

Definición 5.2. Sea $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ un plano proyectivo, $P \in \mathbb{P}\mathcal{L}$ y $\ell \in \mathbb{P}\mathcal{L}$ una recta tal que $P \notin \ell$. La *correspondencia elemental* $\tau_{P,\ell}$ es la biyección $\tau_{P,\ell} : \ell_P \to \ell$, dada por $m \mapsto \ell \cap m$. $\tau_{\ell,P} := \tau_{P,\ell}$ se dice también una correspondencia elemental, inversa de $\tau_{P,\ell}$.

Observación 5.3. Observemos que una perspectividad es la composición de dos correspondencias elementales. Del mismos modo, una perspectividad "en el plano proyectivo dual", también será una composición de correspondencias elementales.

Proposición 5.4. *Sea* $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ *un plano proyectivo que cumple P7, entoncs su dual también lo cumple. Es decir, es cierta la afirmación siguiente:*

Axioma D7 *Sea* $P \in \mathbb{P}$*, y* a_1, a_2, a_3*,* $a_1', a_2',_3'$ *dos ternas de rectas distintas por* P*. Entonces existe una única proyectividad* p *del haz de rectas por* P *en sí mismo tal que* $p(a_i) = a_i'$*.*

Probemos ahora que un plano que verifica el teorema fundamental de las proyectividades es desarguiano. Antes reformulamos de un modo más compacto el axioma P5

Observación 5.5. El axioma P5 se peude formular del siguiente modo:

> Sean $A, B, C, A', B'C', O, P, Q, R$ tales que OAA', OBB', OCC', ABP, $A'B'P$, ACQ, $A'C'Q$, BCR, $B'C'R$ están alineados. Entonces PQR está alineados.

Teorema 5.6. *Sea* $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ *un plano proyectivo que cumple P7. entonces el plano es desarguiano (cumple P5).*

Prueba: Dados puntos $A, B, C, A', B'C', O, P, Q, R$ como en la Observación 5.5, queremos probar que PQR están alineados. Probaremos que P pertenece a la recta QR:

Sean $S = CP \cap QR$, $T = A'B' \cap C'S$, $X = AB \cap OC$, $Y = OC \cap QR$, $Z = OC' \cap A'B'$. Consideremos la perspectividad $p = p_{O,AB,A'B'}$; tenemos que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$, $p(X) = Z$ y $p(P) = P$. Sea $q = p_{C',QR,A'B'} \circ p_{C,AB,QR}$. Tenemos que $q(A) = A'$, $q(B) = B'$ $q(x) = Z$, $q(P) = T$.

POr el teomrea fundamental, tenemos que $p = q$, por lo que $P = p(P) = q(P) = T$. Tnemos entonces que $P = p_{C',QR,A'B'}(S)$, por lo que $P \in C'S$. Como $S \in CP$, tytemoes que $S = C'P \cap CP$, de donde $P = S \in QR$. $\square$

2. Teorema de Pappus

El teorema de Pappus ewstablece que si un "hexágono" tiene inscriptos sus vértices en dos rectas, entonces los lados pares de lados opuesso secortan en puntos alineados.

Veamos ahora que si un plano cumple el teorema fundamental de las proeyctividades, entonces vcerifica el teorema de Pappus. Como el panop proyectivo real verifica el teorema fudamental entonces deducimos el teorema de Pappus (la prueba de Pappus usa los posutlados de Euclides).

Teorema 5.7 (Pappus, siglo IV). *S4eea $(\mathbb{P}, \mathbb{P}\mathcal{L})$ un plano proyectivo que verifica P7. Sean ℓ, m son dos rectas distintas, con $Y = \ell \cap m$, y $A, B, C \in \ell \setminus \{Y\}$, $A', B', C' \in m \setminus \{Y\}$ puntos distintos. Entonces los puntos $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$ y $R = BC' \cap B'C$ están alineados.*

Prueba: Sea $X = AB' \cap A'C$ y $Z = AC' \cap B'C$. Consideremos la proyectividad $p = p_{A',AB',AB} \circ p_{C',AB,CB'}$. Entonces $p(A) = Z$, $p(X) = C$, $p(B') = B'$,$p(P) = R$. Como B' es un punto fijo de p, deducimos que p es una perpectividad, de centro $AZ \cap XC \cap PR$. Luego $Q = AC' \cap A'C = AZ \cap XC \in PR$. $\square$

Se peude probar que es recíproco del teorema 5.7 es cierto: si un plano verifica el teorema de Pappues,entonces verifica el teorema fundamental de las proyectividades.

Definición 5.8. Diremos que un plano es *pappusiano o de Pappus* si verifica el axioma P7.

Observación 5.9. Sea ℓ una recta del plano proyectivo real. Entonces $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \setminus \ell$ está un biyección con el plano afín. Si identificamos todos los puntos de ℓ — es decir, consideramos la relación de equivalencia $P \sim Q$ si $P = Q$ o si $P, Q \in \ell$ —, entonces tenemos que $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)/\sim$ está en biyección con el plano complejo extendido $\mathbb{C}_\infty$.

Si m es otra recta, observemos que la imagen de m por la proyección canónica $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}_\infty$ está en biyección con m, pues m posee un único punto ideal.

Lema 5.10. *Sean ℓ, m dos rectas del plano proyectivo real, y $p_{O,\ell,m}$ una perspectividad. Si consideramos ℓ, m como subconjuntos de $\mathbb{C}_\infty$, existe una transformación de Mœbius f tal que $f|_\ell = p_{O,\ell,m}$.*

Prueba: Suponemos primero que O no es un punto ideal. Identificamos el plano afín $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, y suponiendo que ℓ es la recta por

$v = c + di$, de vector dirección $u = a + bi$, con $a, b \neq 0$ consideramos la ecuación paramétrica $(a + bi)t + c + di = ut + v$, $t \in \mathbb{R}$. Del mismo modo supongamos que m tiene ecuación $(a' + b'i)s + c' + d'i = u's + v'$, $s \in \mathbb{R}$, $a'b' \neq 0$. Sea $O = p + qi$.

Consideramos las siguietnes trasnformaciones de Mœbius:

$$M_1 = f_{\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}},\ M_2 = f_{\begin{pmatrix} a & c-p \\ b & d-q \end{pmatrix}},\ M_3 = f_{\begin{pmatrix} a' & c'-p \\ b' & d'-q \end{pmatrix}},\ M_4 = f_{\begin{pmatrix} u' & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Nótese que $u \neq 0$, y $a(d-q) - b(c-p) \neq 0$ pues los vectores (a, b) y $(c - p, d - q)$ no son colineales, ya que $O \notin \ell$. Del mismo modo, $u' \neq 0$ y $a'(d' - q) - b'(c' - p) \neq 0$.

Afirmamos que $p_{O,\ell,m} = h = M_4 M_3^{-1} M_2 M_1^{-1}|_\ell$. Como $M_4 M_3^{-1} M_2 M_1^{-1}(ut+ v) = u' M_3^{-1} M_2(t) + v'$, vemos que $h(\ell) \subset m$, ya que $M_3^{-1} M_2(t) \in \mathbb{R}$. Debemos entonces probar que O, $ut + v$ y $u' M_3^{-1} M_2(t) + v'$ son colineales. Para ello, debemos probar que las pendientes de las rectas $O\, ut + v$, y $O\, u' M_3^{-1} M_2(t) + v'$ coinciden:

$$\frac{bt + d - q}{at + c - p} \stackrel{?}{=} \frac{b' M_3^{-1} M_2(t) + d' - q}{a' M_3^{-1} M_2(t) + c' - p}$$

Pero EL lado izquierdo es igual a $1/M_2(t)$, mientras que el lado derecho es igual a $\frac{1}{M_3\left(M_3^{-1} M_2(t)\right)} = frm[o]--/M_2 t$.

El caso cuando O es un punto ideal queda como ejercicio. □

Teorema 5.11. *El plano proyectivo real es pappusiano.*

Prueba: Debemos mostrar que se verifica el teorema fundamental de las proyectividades.

Por el lema 5.10, toda perspectivdad es una transformación de Mœbius, luego, toda proyectividad es una trasnforamción de Mœbius. Pero toda trasnforamcion de Mœbius etá determinada por su valor en 3 puntos, por lo que es teorema fundamental de las proyectividades se cumple. □

Capítulo 6

El espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial

1. El espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial

DEFINICIÓN 6.1 (Una relación de equivalencia). Sea $\Bbbk$ un cuerpo y V un $\Bbbk$–espacio vectorial. Definimos en $V \setminus \{0\}$ la relación de equivalencia $v \sim w$ si $\dim\langle v, w\rangle_{\Bbbk} = 1$, donde si $X \subset V$ es un conjunto, entonces $\langle X\rangle_{\Bbbk}$ es el subespacio generado por X.

Observemos que si $v, w \neq 0$ entonces $\dim\langle v, w\rangle_{\Bbbk} = 1$ si y sólo si o bien $v = w$ o $\{v, w\}$ es un conjunto linealmente independiente. Luego, es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia

1. $\dim\langle v, v\rangle_{\Bbbk} = \dim\langle v\rangle_{\Bbbk} = 1$, por lo que $v \sim v$
2. $\dim\langle v, w\rangle_{\Bbbk} = \dim\langle w, v\rangle_{\Bbbk}$, por lo que $v \sim w$ si y sólo si $w \sim v$.
3. Si $\dim\langle u, v\rangle_{\Bbbk} = 1$ y $\dim\langle v, w\rangle_{\Bbbk} = 1$ y $u = v$ o $v = w$, es claro que $u \sim w$. Si $u \neq v$ y $v \neq w$, existen $a, b \in \Bbbk \setminus \{0\}$ tal que $v = au$ y$w = bv$, por lo que $w = (ab)u$, de donde $u \sim w$.

EJEMPLO 6.2. Si $V = \mathbb{R}^3$ entonces la relación de equivalencia es la definida en la definición **??**.

DEFINICIÓN 6.3 (Proyectivizado de un espacio vectorial). Si V es un $\Bbbk$-espacio vectorial, definimos el *espacio proyectivo asociado a V* $\mathbb{P}(V)$ como el cociente de $V \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia $\sim$ definida en la defención 6.1. Notaremos por $p_V : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ el mapa cociente, y por $[v]$ la clase de equivalencia de $v \in V \setminus \{0\}$; así $p_V(v) = [v]$.

Diremos que $\mathbb{P}(V)$ es *de dimensión n* si $\dim V = n + 1$.

PROPOSICIÓN 6.4. *Seamn V, W dos espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva. Entonces T induce una única* *función* $\widetilde{T} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$*, tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} V \setminus \{0\} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "p_V"'] & W \setminus \{0\} \arrow[d, "p_W"] \\ \mathbb{P}(V) \arrow[r, "\widetilde{T}"'] & \mathbb{P}(W) \end{tikzcd}$$

PRUEBA: Es una aplicación directa de la propiedad universal del cociente a la función $p_W \circ T$ (ver las observaciones para pensar que siguen). □

PARA PENSAR:. (1) ¿Por qué pedimos que T sea inyectiva?
(2) Construir un ejemplo de una función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que induzca una biyección $\widetilde{T} : \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ que *no* sea un isomorfismo de planos proyectivos.

DEFINICIÓN 6.5. Un *isomorfismo* entre dos espacios proyectivos $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(W)$ es una biyección $\widetilde{T} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ inducida por un isomorfismo lineal $T : V \to W$.

COROLARIO 6.6. *Sean* V, W *dos* $\mathbb{k}$*-espacios vectoriales de la misma dimensión. Entonces* $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(W)$.

PRUEBA: Sea $T : V \to W$ un isomorfismo. Entonces $\widetilde{T} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ es el isomorfismo buscado. □

EJEMPLO 6.7 (Introducción de coordenadas). Sea V un $\mathbb{k}$–espacio vectorial de dimensión finita $\dim V = n+1$, y $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ una base. Entonces podemos identificar los vectores de V con los vectores de $\mathbb{k}^{n+1}$ via el mapa coordenadas $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{k}^{n+1}$, $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ si $v = \sum_{i=0}^{n} a_i e_i$.

El mapa coordenadas induce a su vez un isomorfismo $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$, $\widetilde{\operatorname{coord}}_{\mathcal{B}}(v) = [a_0 : \dots, a_n] = \big[(a_0, \dots, a_n)\big]$ — nótese la notación que usamos para los elementos de $\mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$.

Dado otro espacio vectorial W, de dimensión $m+1$ y $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva, si $\mathcal{C} = \{f_0, \dots, f_m\}$ es una base de T, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} V \setminus \{0\} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}|_{V\setminus\{0\}}"'] & W \setminus \{0\} \arrow[d, "\operatorname{coord}_{\mathcal{C}}|_{W\setminus\{0\}}"] \\ \mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "L_{{}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}}"'] & \mathbb{k}^{m+1} \setminus \{0\} \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

donde ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}}$ denota la matriz asociada a T en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, que se combinan en un "cubo conmmutativo".

Observemos con más atención el diagrama (1.1): aunque T no sea una trasformación lineal, el hecho que $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}$ y $\operatorname{coord}_{\mathcal{C}}$ sean biyecciones garantiza la existencia de una única $\overline{T} : \mathbb{k}^{n+1} \to \mathbb{k}^{m+1}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \setminus \{0\} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}|_{V\setminus\{0\}}"'] & W \setminus \{0\} \arrow[d, "\operatorname{coord}_{\mathcal{C}}|_{W\setminus\{0\}}"] \\ \mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "\overline{T}"'] & \mathbb{k}^{m+1} \setminus \{0\} \end{tikzcd}$$

conmuta — el que T sea lineal se usa para poder garantizar que $\overline{T}$ es de la forma L_A, para una matriz A.

Observemos que si T lleva rectas por el origen en rectas por el origen, entonces lo mismo pasa con $\overline{T}$. Probamos entonces el siguiente lema

Lema 6.8. *Sean V, W dos $\mathbb{k}$–espacios vectoriales de dimensión finita, y $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{C} = \{f_0, \dots, f_m\}$ bases de V y W respectivamente (por lo que $\dim V = n_+1$ y $\dim W = m+1$). Si $T : V \to W$ es una función que lleva (biyectivamente) subespacios de dimensión 1 en subespacios de dimensión 1, entonces:*

(1) T es inyectiva.

(2) T induce una función inyectiva $\widetilde{T} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$, única tal que el diagrama siguiente conmuta.

(3) T induce una función $\overline{T} : \mathbb{k}^{n+1} \to \mathbb{k}^{m+1}$, única tal que el siguiente diagrama conmuta.

Prueba: (1) Sea $v \in \operatorname{Ker} T$. Entonces $T\big(\langle v \rangle\big) = \{0\}$, por lo que $\langle v \rangle = \{0\}$.

(2) T induce una función $\widetilde{T} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ pues la función $p_W \circ T|_{V\setminus\{0\}}$ es constante en las clases de equivalencia. Sean $x, y \in \mathbb{P}(V)$ tales que $\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}(y)$. Consideremos $u, v \in V \setminus \{0\}$ tales que $[u] = x$ y $[v] = y$. Entonces $\widetilde{T}(x) = \big[T(u)\big]$ y $\widetilde{T}(y) = \big[T(v)\big]$, por lo que existe $a \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$ tal que $T(v) = aT(u) = T(au)$. Pero entonces $[u] = [v]$, por lo que $\widetilde{T}$ es inyectiva.

(3) $\square$

Se puede probar aún más:

TEOREMA 6.9. *En la notación del lema* **??**, *si* $\overline{T} : \Bbbk^{n+1} \to \Bbbk^{m+1}$ *es de la forma* $\overline{T}(x_0, \dots, x_n) = \big(T_0(x_0, \dots, x_m), \dots, T_m(x_0, \dots, x_m)\big)$, *con* T_i *polinomios en las variables* $x_0, \dots, x_n$, *entonces* T *es una transformación lineal.*

PRUEBA: Omitiremos la prueba. □

PROPOSICIÓN 6.10. *Sea* V *un espacio vectorial y* $W \subset V$ *un subespacio. Entonces* $p_V|_{W\setminus\{0\}} : W \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ *induce una función biyectiva* $T : \mathbb{P}(W) \to p_V\big(W \setminus \{0\}\big)$, *de modo que el diagrama siguiente es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} W \setminus \{0\} \arrow[r, "p_V|_{W\setminus\{0\}}"] \arrow[d, "p_W"'] & p_V\big(W \setminus \{0\}\big) \\ \mathbb{P}(W) \arrow[ur, hook, "T"'] & \end{tikzcd}$$

PRUEBA: Inmediato. □

La proposición 6.10 nos dice que la imagen por p_V de $W \setminus \{0\}$ es el espacio proyectivo $\mathbb{P}(W)$. Diremos que $p_V\big(W \setminus \{0\}$ es un *subespacio proyectivo de dimensión* $\dim W - 1$. Pero si miramos a la luz de los cálculos que acabamos de hacer la definición **??**, cabe preguntarnos qué forma tiene la imagen por p_V de un *subespacio afín* de V, es decir, un conjunto de la forma $v + W$, donde $W \subset V$ es un subespacio de V.

PROPOSICIÓN 6.11. *Sea* V *un* $\Bbbk$*-espacio vectorial,* $W \subsetneq V$ *un subespacio y* $v \in V \setminus W$. *Sea* $W' = \langle v \rangle \oplus W$. *Entonces* $p_V|_{W'\setminus\{0\}} : W' \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ *induce una función biyectiva* $T : \mathbb{P}(W') \to p_V\big(W' \setminus \{0\}\big) = p_V(v + W)$.

En particular, $p_V(v+W)$ *es un subespacio proyectivo de dimensión* $\dim W$.

PRUEBA: Primero observemos que como $v \notin W$, $\langle v \rangle \cap W = \{0\}$ — ya que la intersección de subespacios es un subespacio. Aplicando la proposición 6.10, tenemos la existencia de la biyección T. Resta probar que $p_V\big(W' \setminus \{0\}\big) = p_V(W)$. Ahora bien, la inclusión $p_V(v + W) \subset p_V\big(W' \setminus \{0\}\big)$ es clara — observemos que como $v \notin W$, $0 \notin v + W$. Por otra parte, si $h = av + w \neq 0$, entonces $av, w \neq 0$, por lo que $a \neq 0$. Luego $p_V(av + w) = p_V\big(\frac{1}{a}(av + w)\big) = p_V\big(v + \frac{1}{a}w\big) \in p_V(v + W)$. □

2. Espacio proyectivo dual

DEFINICIÓN 6.12. Sea V un $\Bbbk$–espacio vectorial de dimensión finita. Entonces $V^\vee = \operatorname{Hom}_\Bbbk(V, \Bbbk)$ es un espacio vectorial isomorfo a V, por lo que $\mathbb{P}(V^\vee)$ es un espacio proyectivco isomorfo a V. Diremos que $\mathbb{P}(V^\vee)$ es el *espacio proyectivo dual de V*.

Observación 6.13. Observemos que los puntos de $V^\vee$ son los funcionales lineales, por lo que los puntos de $\mathbb{P}(V^\vee)$ son los funcionales lineales “a menos de multiplicación por un escalar”. Si $f \in V^\vee \setminus \{\theta\}$ y $a \in \Bbbk \setminus \{0\}$, entonces $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(af)$ es un subespacio de dimensión $\dim V - 1$.

Tenemos entonces que f y af determinan el mismo *hiperplano (por el origen) de V*.

Aplicando la proposición **??**, tenemos que $p_V\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = p_V\big(\operatorname{Ker}(af)\big)$ es un subespacio proeyctivo de dimensión $\dim V - 1$ — es un *hiperplano proyectivo.*

Recíprocamente, tenemos que todo hiperplano proyectivo se puede construir a partir de un funcional lineal.

Proposición 6.14. *Sea V un $\Bbbk$–espacio vectorial de dimensión finita y $W \subset V$ un subespacio vectorial de dimensión* $\dim W = \dim V - 1$. *Entonces existe un funcional lineal $f \in V^\vee$ tal que* $\operatorname{Ker}(f) = W$. *Más aún, si $g \in V^\vee$ es otro funcional lineal tal que* $\operatorname{Ker}(g) = W$, *entonces existe $a \in \Bbbk \setminus \{0\}$ tal que $g = af$.*

Prueba: Este es un resultado conocido de álgebra lineal, veamos de todos modos su prueba.

Sea $N = \langle v \rangle$ un complemento directo de W — N tiene dimensión 1 pues $\dim V = \dim W + \dim N$. Por la propiedad universal de la suma directa, tenemos que $f \in V^\vee$ estaá determinada por sus restricciones a W y N. Si $\operatorname{Ker}(f) = W$, tenemos necesariamente que $f(w) = 0$ para todo $w \in W$, y $f|_N \neq \theta$ — ya que de lo contrario $\operatorname{Ker}(f) = V$. Pero $f|_N$ está determinada por su valor en v. Tenemos entones que si definimos $f(v) = b \neq 0$, entonces f queda determinada y verifica la tesis. Sea g otro funcional que verifica la tesis, entonces $g(v) = c$, y tenemos que para todo $w \in W$ y $\alpha \in \Bbbk$,

$$g(w + \alpha v) = g(w) + \alpha g(v) = \alpha c = \alpha c \frac{1}{b} b = \frac{c}{b} \alpha f(v) = \frac{c}{b} f(w + \alpha v).$$

En otras palabras, $g = \frac{c}{b} f$. $\square$

Vemos entonces que los hiperplanos de V (o equivalentemente los hipreplanos proyectivos de $\mathbb{P}(V)$), están en biyección con los puntos de $\mathbb{P}(V^\vee)$. Más en general, recordemos la definición de anulador:

Definición 6.15. (1) Sea V un espacio vectorial y $W \subset V$ un subespacio. Se define el *anulador o perpendicular* de W en $V^\vee$, $W^\perp \subset$

$V^\vee$ de la siguiente forma:

$$W^\perp = \{f : V \to \Bbbk \in V^\vee : f|_W = 0\}.$$

(2) Sea $X \subset V^\vee$ un subespacio del dual de V, se define $X^\perp \subset V$ de la siguiente forma:

$$X^\perp = \{v \in V : f(v) = 0 \text{ para todo } f \in X\}.$$

Es fácil probar a partir de las definiciones anteriores que $W^\perp$ es un *subespacio* de $V^\vee$ y que $X^\perp$ es un *subespacio* de V.

Proposición 6.16. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $W \subset V$ un subespacio. Entonces* $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

Si $X \subset V^\vee$ es un subespacio, entonces $\dim X^\perp = \dim V^\vee - \dim X = \dim V - \dim X$.

Prueba: Sea $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W, completémosla a una base $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ de, V. Entonces $f \in V^\vee$ está determinada por sus valores en $\mathcal{B}$: si $\{w_1^*, \dots, w_m^*, v_{m+1}^*, \dots, v_n^*\}$, entonces $f(v) = \sum f(w_i)w_i^* + \sum f(v_i)v_i^*$. Luego, $f|_W = 0$ si y sólo si $f = \sum f(v_i)v_i^*$. En otras palabras $W^\perp = \langle v_{m+1}^*, \dots, v_n^* \rangle$, y $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

La prueba de la afirmacion restante es análoga. $\square$

Observación 6.17. Nótese que la prueba de la proposición 6.16 usa una base auxiliar $\mathcal{B}$ que no está unívocamente determinada. Por otra parte el subespacio $W^\perp$ está definido sólo en términos W: otra elección de la base $\mathcal{B}$ producirá una base diferente de $W^\perp$.

Corolario 6.18. *Sea V un $\Bbbk$–espacio vectorial de dimensión finita. Entonces la operación $\cdot^\perp$ produce una biyección entre los subespacios de dimensión m, $m \leq \dim V$ de V y los subespacios de dimensión $dimV - m$ de $V^\vee$. Si $W \subset W'$, entonces $(W')^\perp \subset W^\perp$.*

Prueba: Ejercicio. $\square$

3. Subespacios proyectivos

En esta sección veremos como

4. Planos y espacios proyectivos 3-dimensionales

.

Ya vimos que $\mathbb{P}(\Bbbk^3)$ es un plano proyectivo desarguiano. Veamos ahora que si V es un $\Bbbk$–espacio vectorial de dimensión 4, entonces $\mathbb{P}(V)$ es un espacio proyectivo 3 dimensional.

PROPOSICIÓN 6.19. *Sea* V *un* $\Bbbk$*–espacio vectorial de dimensión* 4. *Definimos* $\mathbb{P}\mathcal{L}(V) = \big\{p_V(\{$ *Entonces* $\big(\mathbb{P}(V),$

Capítulo 7

Planos proyectivos sobre anillos de división

Si consideramos un anillo con unidad A, tiene sentido definir el análogo de un espacio vectorial, usando como "escalares" los elementos del anillo. La categoría de los *módulos sobre un anillo A* (sus *representaciones*) brinda mucha información sobre A. El estudio de los A–módulos presenta una serie de obstáculos comparado con el estudio de los espacios vectoriales sobre un cuerpo, debido a la ausencia de inverso para todo elemento — más allá de los problemas directo que tenemos que enfrentar por no tener inverso siempre, otros fenómenos colaterales aparece, como ser por ejemplo que pueden existir *divisores de cero*, es decir elementos a, b
inA no nulos tales que $ab = 0$. Otro obstáculo es que el producto en un anillo no es necesariamente conmutativo.

En el contexto en el que estamos trabajando — la geometría del plano y el espacio proyectivo —, si consideremos *anillos de división* — es decir anillos con unidad tales que todo elemento no nulo tiene inverso —, podemos recuperar las propiedades necesarias en sus módulos para poder definir en análogo del espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial.

Como el objetivo de este curso no es el estudio en profundidad de los módulos de los anillos con división, presentaremos el caso más simple, que se corresponde con el espacio proyactivo asociado a $\mathbb{k}^n$.

En lo que sique, R será un anillo con división

1. El espacio proyectivo asociado al espacio afín R^{n+1}

Definición 7.1. Dado el espacio afin R^{n+1}, definimos una relación de equivalencia en $R^{n+1} \setminus (0, \dots, 0)$ por $x = (x_0, \dots, x_n) \sim y = (y_0, \dots, y_n)$ si existe $\lambda \in R \setminus \{0\}$ tal que $y = x\lambda := (x_0\lambda, \dots, x_n\lambda)$.

El *espacio proyectivo* $\mathbb{P}^n(R) = \mathbb{P}(R^{n+1})$ es el conjunto cociente de $R^{n+1} \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia definida más arriba.

Observación 7.2. Como el anillo R no es conmutativo, ¡no es lo mismo escribir $x_i\lambda$ que λx_i!

EJEMPLO 7.3. Si R es un cuerpo (es decir si R es conmutativo), nos encontramos con la definición de espacio proyectivo que vimos en la definición **??**.

TEOREMA 7.4. *El plano* $\mathbb{P}^2(R)$ *es un plano proeyctivo.*

PRUEBA: Alcanza con imitar la prueba que hicimos para el caso de un cuerpo cualquiera, por lo que queda de ejercicio. $\square$

TEOREMA 7.5. *Un plano proyectivo sobre un anillo de división satisface p5.*

PRUEBA: Alcanza con imitar la prueba que hicimos para el caso de un cuerpo cualquiera, por lo que queda de ejercicio. $\square$

2. El grupo de automorfismos de $\mathbb{P}^2(R)$

DEFINICIÓN 7.6. Un *endomorfismo semi-lineal* de $R^n \to R^n$ es una función $T : R^n \to R^n$ tal que existe un isomorfismo de anillos $\alpha : R \to R$ $T(x) + y = T(x) + T(y)$ y $T(ax) = \alpha(a)T(x)$.

Si T es invertible, diremos que T es un *automorfismo*. En ese caso, T^{-1} también es una transformación inicial (consdierando el isomorfismo $\alpha^{-1} : R \to R$).

EJEMPLO 7.7. Si R es un cuerpo, entonces las transformaciones lineales son semilineales.

EJEMPLO 7.8. La conjugación $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, es un morfismo de anillos, por lo que el mapa $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dado por $T((z_1, \dots, z_n) = (\overline{z_1}, \dots, \overline{(}z_n))$ es una transformación semi-lineal: exsiten trasnformacionessemi-lineales que no son lineales.

LEMA 7.9. *Si* $A \in \mathrm{M}_n(R)$*, entonces* $L_A : \mathbb{R}^n \to R^n$ *es un automorfismo (con* $\alpha = \mathrm{id}$*). Más aún* $L_A \circ L_B = L_{AB}$*, y* $L_{\mathrm{Id}_n} = \mathrm{id}$*, por lo que* L_A *es un automorfismo si y sólo si* A *es invertible, en cuyo caso* $L_A^{-1} = L_{A^{-1}}$.

PRUEBA: Son las cuentas que realizamos en álgebra lineal. $\square$

PROPOSICIÓN 7.10. *Sea* $A \in \mathrm{M}_{n+1}(R)$ *una matriz invertible. Entonces* L_A *induce una biyección* $T_A : \mathbb{P}^n(R) \to \mathbb{P}^n(R)$*. Para* $n = 2$*, dicha biyección es un automorfismo.*

PRUEBA: Como A es invertible, $_A(x_0, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ si yi solo si $(x_0, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$, por lo que la restricción de L_A a $R^{n+1} \setminus \{0\}$ induce una función $L_A|_{R^{n+1}\setminus\{0\}} R^{n+1} \setminus \{0\} \to R^{n+1} \setminus \{0\}$. Como

$L_A\big(a(x_0,\dots,x_n)\big) = aL_A(x_0,\dots,x_n)$, para todo $a \in R$, tenemos que $L_A|_{R^{n+1}\setminus\{0\}}$ induce una función $T_A : \mathbb{P}^n(R) \to \mathbb{P}^n(R)$. Por otra parte, es fácil ver que la función $T_{A^{-1}} : \mathbb{P}^n(R) \to \mathbb{P}^n(R)$ inducida por $L_{A^{-1}} = L_A^{-1}$ es la inversa de T_A.

SUpongamos ahora que $n = 2$. Entonces, como L_A envía planos por el origen el planos por el origen, tenemos que T envíua puntos alineados en puntos alineados. En otras palabras, T_A es un automorfismodel plano proeyctivo $\mathbb{P}^2(R)$. $\square$

Lema 7.11. *Dos matrices invertibles $A.B \in \mathrm{M}_3(R)$ son colineales (es decir, existe $\alpha \in R$ tal que $B = A\alpha$, T_A y T_B si y solo si toman los mismos valores en $P_1 = [1 : 0 : 0]$, $P_2 = [0 : 1 : 1]$, $P_3 = [0 : 0 : 1]$ y $P_4 = [1 : 1 : 1]$.*

Prueba: Observemos que un ta lα tiene que ser necesariamente no nulo.

Si existe α
$inR \setminus \{\}$ tal que $B = \alpha A$ entonces $T_B(x) = [Bx] = [\alpha Ax] = [Ax] = T_A(x)$ para todo $x \in R^3 2 \setminus \{0\}$.

Supongamos ahora que A, B son tales que $T_A(P_i) = T_B(P_i)$ para $i = 1,\dots,4$. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, entonces para $j = 1,2,3$ existe $\lambda_j \in R \setminus \{0\}$ tal que

$$\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix} \lambda_j$$

y existe $\lambda_4 \in R \setminus \{0\}$ tal que

$$\begin{pmatrix} b_{11}+b_{12}+b_{13} \\ b_{21}+b_{22}+b_{23} \\ b_{31}+b_{32}+b_{33} \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{pmatrix} \alpha_4$$

Pero $L_1(1,1,1) = L_a(1,0,0) + L_a q(0,1,0) + L_a(0,0,1)$, por lo que tenemos que para todo $i = 1,2,3$, se cumple que

$$\begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+a_{13}\lambda_3 \\ a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+a_{23}\lambda_3 \\ a_{31}\lambda_1+a_{32}\lambda_2+a_{33}\lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} (a_{11}+a_{12}+a_{13})\lambda_4 \\ (a_{21}+a_{22}+a_{23})\lambda_4 \\ (a_{31}+a_{32}+a_{33})\lambda_4 \end{pmatrix}$$

Deducimos entonces que $L_A(\lambda_1 - \lambda_4, \lambda_2 - \lambda_4, \lambda_3 - \lambda_4) = (0,0,0)$ lo que, por ser A es invertible, implica que $\lambda_j = \lambda_4$ para $j = 1,2,3$. En otras palabras, $B = A\lambda_4$. $\square$

Lema 7.12. *Sea $\lambda \in R \setminus \{0\}$. Entonces $T_{\lambda \mathrm{Id}_{n+1}} : \mathbb{P}^n(R) \to \mathbb{P}^n(R)$ es la identidad si y solo si $\lambda \in \mathcal{Z}(R)$.*

Si $\lambda \notin \mathcal{Z}(R)$, entonces $T_{\lambda \mathrm{Id}_{n+1}}\big([x_0 : \cdots : x_n]\big) = \big[\sigma(x_0) : \cdots : \sigma(x_n)\big]$, donde $\sigma : R \to R$ es el automorfismo dado por $\sigma(a) = \lambda a \lambda^{-1}$ para todo $a \in R$.

PRUEBA: $T_{\lambda \operatorname{Id}_{n+1}}\big([x_0 : \cdots : x_n]\big) = [\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n] = [\lambda x_0 \lambda^{-1} : \cdots : \lambda x_n \lambda^{-1}]$.

Queda probar que si $T_{\lambda \operatorname{Id}_{n+1}}\big([x_0 : \cdots : x_n]\big) = \operatorname{Id}_{\mathbb{P}^n(R)}$, entonces $\lambda \in \mathcal{Z}(R)$.

Evaluando en el punto $[x : 1 : \cdots : 1]$, tenemos que existe $a \in R \backslash \{0\}$ tal que $(\lambda x, \lambda, \ldots, \lambda) = (xa, \ldots, a)$, de donde $a = \lambda$ y $\lambda x = a\lambda$ para todo $x \in R$. $\square$

Capítulo 8

Ceros de polinomios en el plano proyectivo

En este capítulo consideraremos un cuerpo (infinito) $\Bbbk$ y el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\Bbbk) = \mathbb{P}(\Bbbk^3)$.

1. Ceros de polinomios homogéneos en el plano proyectivo

Sea $p \in \Bbbk[x,y,z]$ un polinomio homogéneo de grado t. Si bien la función $p : \Bbbk^3 \setminus \big\{(0,0,0)\big\} \to \Bbbk$ no es constante en las rectas por el origen, podemos trabajar con los ceros de p en $\mathbb{P}(\Bbbk^3)$, del siguiente modo:

Consideramos la función $\widetilde{p} : \Bbbk^3 \setminus \big\{(0,0,0)\big\} \to \{0,1\}$ definida por $\widetilde{(}x,y,z) = 0$ s i$p(x,y,z) = 0$ y 1 si no. Entonces, como $p\big(\alpha(a,b,c)\big) = \alpha^t p(a,b,c)$, vemos que $\widetilde{p}$ es constante en las rectas por el origen, por lo que induce una función $\overline{p} : \mathbb{P}(\Bbbk^3) \to \{0,1\}$.

Por construcción, tenemos que $\overline{p}\big([a : b : c]\big) = 0$ si y sólo si $p(a,b,c) = 0$, si y sólo si $p(\alpha a, \alpha b, \alpha c) =)$ para todo $\alpha \in \Bbbk$.

Veamos ahora la relación de $\mathcal{V}(p) \subset \Bbbk^3$ con el conjunto $\overline{p}^{-1}(0)$.

Consideremos el plano $\{z = 1\} \subset \Bbbk^3$. Entonces $[a : b : c] \in \pi(\{z = 1\})$ si y sólo si la recta $\lambda(a,b,c)$ intersecta $\{z = 1\}$, es decir si $c \neq 0$, en cuyo caso la intersección es el punto $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1)$. Deducimos que si $c \neq 0$¡ entonces $\overline{p}\big([a : b : c]\big) = 0$ si y sólo si $p(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1) = 0$.

Como la restricción $\pi\big|_{\{z=1\}} : \{z = 1\} \to \mathbb{P}(\Bbbk^3) \setminus \ell_{\{z=1\}} = U_2$ es biyectiva, deducimos que

$$\overline{p}^{-1}(0) \cap U_2 = \overline{p}^{-1}(0) \cap \big(\mathbb{P}(\Bbbk^3) \setminus \ell_{\{z=1\}}\big) = \pi\big(\{(x,y,1) : p(x,y,1) = 0\}\big).$$

Del mismo modo,

$$\overline{p}^{-1}(0) \cap U_0 = \overline{p}^{-1}(0) \cap \big(\mathbb{P}(\Bbbk^3) \setminus \ell_{\{x=1\}}\big) = \pi\big(\{(1,y,z) : p(1,y,z) = 0\}\big)$$
$$\overline{p}^{-1}(0) \cap U_1 = \overline{p}^{-1}(0) \cap \big(\mathbb{P}(\Bbbk^3) \setminus \ell_{\{y=1\}}\big) = \pi\big(\{(x,1,z) : p(x,1,z) = 0\}\big)$$

NOTACIÓN 8.1. Si $p \in \Bbbk[x,y,z]$ esun polinomio en tresvariables, notaremos $\mathrm{ev}_{z=1} : \Bbbk[x,y,z] \to \Bbbk[x,y]$ a la función que asocia a un polinomio $p = \sum_{i,j,k} a_{ijk} x^i y^j z^k$ el polinomio $\mathrm{ev}_{z=1}(p) = \sum_{i,j}(\sum_k a_{ijk}) x^i y^j$ — el polinomio que se obtiene evalaundo la variable z en 1.

2. Homogeneización de polinomios

Mantenemos las notaciones de la sección anterior.

El plano $\{z = 1\}$ con las rectas que contiene conforma un plano afín, de modo que la biyección $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$, es un isomorfismo.

Entonces, un polinomio en dos variables $q \in \Bbbk[x, y]$ puede verse como una función en $\{z = 1\}$, $\widetilde{q} : \{z = 1\} \to \Bbbk$, dada por $\widetilde{q}(x, y, 1) = q(x, y)$.

Sea $p \in \Bbbk[x, y, z]$ un polinomio homogéneo. Si identificamos $\mathbb{P}(\Bbbk^3)$ con la completación del plano afín $\{z = 1\}$, tenemos entonces que $\overline{p}^{-1}(0)$ puede verse como la "completación" de los ceros del polinomio q definido en el plano $\{z = 1\}$ por $q(x, y) = p(x, y, 1)$.[1]

Sea ahora $q \in \Bbbk[x, y]$ un polinomio en dos variables, y consideremos sus ceros, pero vistos en el plano $\{z = 1\}$

$$\mathcal{V}(\widetilde{q}) = \big\{(x, y, 1) : q(x, y) = 0\big\}$$

Queremos ver $\pi\big(\mathcal{V}(\widetilde{q})\big)$ como los ceros de un polinomio homogéneo. Para ello, introducimos la *homogeinización de un polinomio.*

DEFINICIÓN 8.2. Sea $q = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + \cdots + a_{nm}x^n y^m \in \Bbbk[x, y]$ un polinomio en dos variables, y sea $N = \max\{i + j : a_{ij} \neq 0\}$ — es decir, N es el mayor grado total de los términos no nulos del polinomio q, diremos que es el *grado total del polinomio q*.

Definimos la *homogeinización del polinomio q* como el polinomio $p \in \Bbbk[x, y, z]$ dado por la fórmula

$$p = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j z^{N-i-j} = \\ a_{00}z^N + a_{10}xz^{N-1} + a_{01}yz^{N-1} + a_{11}xyz^{N-2} + \\ a_{20}x^2 z^{N-2} + a_{02}y^2 z^{N-2} + \cdots + a_{nm}x^n y^m z^{N-n-m}$$

[1]Esta idea puede precisarse mejor, introduciendo una "topología" en $\Bbbk^3$ y $\mathbb{P}(\Bbbk^3)$, pero las técnicas involucradas escapan al objetivo de este curso.

Observemos que todos los monomios del polinomio p tienen grado total N, por lo que p es un polinomio homogéneo. Por otra parte, si i_0, j_0 sontales que $i_0 + j_0 = N$, observemos que en término correspondiente de p es $a_{i_0 j_0} x^{i_0} y^{j_0} z^{N-i_0-j_0} = a_{i_0 j_0} x^{i_0} y^{j_0}$.

OBSERVACIÓN 8.3. Es fácil ver que la homogeinización $H : \mathbb{k}[x, y] \to \{\text{polinomios homogéneos}\}$ es una función inyectiva, ya que $\mathrm{ev}_{z=1} \circ H = \mathrm{Id}_{\mathbb{k}[x,y]}$. Además, es fácil ver que H que respeta los grados totales.

La imagen de H son los polinomios homogéneos que no son múltiplos de z (es decir, tales que al menos uno de los monomios no tiene la variable z).

APÉNDICE A

Nociones básicas de la teoría de grupos

Definición A.1. Un *grupo* es una cuaterna $(G, m, \iota, 1)$, donde G es un conjunto, $m : G \times G \to G$ y $\iota : G \to G$ dos funciones, y $1 \in G$ un elemento, tales que cumplen las siguientes propiedades.

- *Propiedad asociativa* $m\big(a,(b,c)\big) = m\big(m(a,b),c\big)$ para todo $a, b, c \in G$.
- *Existencia del neutro* $m(1,a) = m(a,1) = a$ para todo $a \in G$.
- *Existencia del inverso* Para todo $a \in G$ existe $b \in G$ tal que $m(a,b) = m(b,a) = 1$.

Si $m(a,b) = m(b,a)$ para todo $a, b \in G$, diremos que G es un *grupo abeliano* o *grupo conmutativo*.

Notación A.2. En general, hablaremos de un grupo G, sin hacer mención explícita a las operaciones.

Si $(G, m, \iota, 1)$, notaremos $m(a,b) = ab = a \cdot b$. Así, la propiedad asociativa se lee $(a(bc) = (ab)c$ para todo $a, b, c \in G$.

Notaremos por a^{-1} al inverso de a.

Observación A.3. Las propiedades de la cuaterna $(G, m, \iota, 1)$ se pueden escribir como diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} G\times G\times G \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"'] & G\times G \arrow[d, "m"] \\ G\times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "1\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times 1"'] & G\times G \arrow[d, "m"] \\ G\times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "\mathrm{id}\times\iota"] \arrow[d, "\iota\times\mathrm{id}"'] & G\times G \arrow[d, "m"] \\ G\times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd}$$

Ejemplos A.4. (1) $(\mathbb{Z}, +, 1, -)$ es un grupo abeliano.

(2) Si $\Bbbk$ es un cuerpo, entonces $(\Bbbk, +, 0, -)$ y $(\Bbbk \setminus \{0\}, \cdot, 1, \cdot^{-1}$ son grupos abelianos.

(3) $\mathbb{Z}_n$, los enteros módulo n con la suma es un grupo abeliano, con neutro la clase del 0.

(4) *El grupo general lineal* $\mathrm{Gl}_n(\Bbbk)$ de las matrices $n \times n$ con coeficientes en el cuerpo $\Bbbk$, invertibles, es un grupo con el producto de matrices, con neutro la matriz identidad. El grupo $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ sólo es conmutativo para $n = 1$, donde $\mathrm{GL}_1(\Bbbk) = \Bbbk \setminus \{0\}$.

(5) De modo equivalente, si V es un espacio vectorial, $\mathrm{Aut}(V)$, el conjunto de las transformaciones lineales invertibles de V en sí mismo, es un grupo con la composición, con neutro la identidad.

(6) Si X es un conjunto, $\big(\mathrm{Biy}(X), \circ, \mathrm{id}, \cdot^{-1}\big)$, el conjunto de las biyecciones con la composición, es un grupo. Se puede probar que $\mathrm{Biy}(X)$ es conmutativo si y solamente si $\# = 1, 2$ (ver ejercicio **??**.

Lema A.5. *Sea G un grupo, y $e \in G$ tal que $e^2 = e$ (un elemento* idempotente*). Entonces $e = 1$.*

Prueba: Multiplicando la igualdad $e^2 = e$ por el inverso de e, tenemos que $e = e^{-1} \cdot e \cdot e = e^{-1} \cdot e = 1$. □

Definición A.6. Dados dos grupo G, H, un *morfismo de grupos* entre G y H es una función $f : G \to H$ que respeta el producto: $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo $a, b \in G$.

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m_G"] \arrow[d, "f\times f"'] & G \arrow[d, "f"] \\ H \times H \arrow[r, "m_H"'] & H \end{tikzcd}$$

Proposición A.7. *Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos. Entonces $f(1_G) = 1_H$ y $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ para todo $a \in G$.*

Prueba: Como $f(1_G) = f(1_G \cdot 1_G) = f(1_G) \cdot f(1_G)$, tenemos que $f(1_G) = 1_H$.

Por otra parte, $f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(1_G) = 1_H = f(a^{-1}a) = f(a)f(a^{-1})$. □

Ejemplos A.8. (1) Si G es un grupo, entonces la identidad $\mathrm{id} : G \times G$ es un morfismo de grupos.

(2) Sea G un grupo, entonces el inverso $\iota : G \to G$ es un morfismo si y solo si G es conmutativo. En efecto, como $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, tenemos que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ para todo a, b si y sólo si $a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Definición A.9. Ses G un grupo. Un *subgrupo* es un conjunto H no vacío, estable por el producto y la inversa:

1. $1 \in H$
2. $ab \in H$ para todo $a, b \in H$.
3. $a^{-1} \in H$ para todo $a \in H$.

Observación A.10. Si H es no vacío y es estable por el inverso y le producto, tenemos que $1 \in H$¡ ya que $aa^{-1} \in H$ para todo $a \in H$. Esto justifica la escritura de 1 en la definición anterior.

Definición A.11. Sea G un grupo. Un subgrupo $H \subset G$ se dice *normal* si se cumple que $aha^{-1} \in H$ para todo $a \in G$ $h \in H$.

Definición A.12. Sea G un grupo y X un conjunto. Una *acción (a izquierda)* de G en X es una función $\varphi : G \times X \to X$ que cumple que :

1. $\varphi(ab, x) = \varphi\big(a, \varphi(b, x)$ para todo $a, b \in G$, $x \in X$.
2. $\varphi(1, x) = x$ para todo $x \in X$.

Notaremos $\varphi(a, x) = a \cdot x$. Entonces 1 se lee $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cot x)$.

Si $x \in X$, la *órbita* de G por x es el conjunto

$$\mathcal{O}_G(x) = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Observación A.13. Se puede definir acción a derecha de un modo análogo.

Definición A.14. Sea G un grupo actuando en un conjunto X. El *grupo de isotropía de* $x \in X$ es el conjutno de los elementosd de$G$ que dejan fijo x:

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

Es fácil ver que G_a es un subgrupo de G.

Un *punto fijo* de la acción de G en X es un elemento $x \in X$ tal que $g \cdot x = x$ para todo $g \in G$, es decir tal que $G_x = G$.

Una acción es *libre* si $G_x = \{1\}$ para todo $x \in X$.

Diremos que la acción de un grupo G en un conjunto X es *transitiva*, si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}_G(x) = X$ — luego, la órbita de *cualquier* $y \in X$ es todo X.

Un subconjunto $Y \subset X$ es G*–estable* si $g \cdot y \in Y$ para todo $g \in G$ e $y \in Y$.

Si $Y \subset X$, notaremos $G \cdot Y = \{g \cdot y : g \in G\,,\ y \in Y\}$. Luego Y es G-estable si $G \cdot Y = Y$.

Lema A.15. *Sea $\varphi : G \times X \to X$ un acción del grupo G en el conjunto X, y sea $Y \subset X$ un sobconjunto G–estable. Entonces la restricción $\varphi\big|_{G\times Y} : G \times Y \to Y$ es una acción.*

Prueba: Como Y es G–estable, tenemos que $\varphi(G \times Y) \subset Y$. Es claro que las propiedades de una acción se siguen cumpliendo. □

Lema A.16. *Sea $\varphi : G \times X \to X$ una acción del grupo G en el conjunto X. Entonces φ induce una acción en el conjunto de las partes de X, $\widetilde{\varphi} : G \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, dada por $g \cdot Y = \{g \cdot y : y \in Y\}$.*

Para esa acción, el conjunto de los subconjuntos de X que tienen el mismo cardinal es G-estable.

Prueba: Como $(ab)\cdot y = a\cdot(b\cdot y)$, tenemos que

$$(ab)\cdot Y = \big\{(ab)\cdot y : y\in Y\big\} = \big\{a(b\cdot y) : y\in Y\big\} = \big\{(a\cdot u : u\in b\cdot Y\big\} = a\cdot(b\cdot Y)$$

Como $\varphi_g : X\to X$, $\varphi_g(x) = \varphi(g,x)$ es una biyección, $\#g\cdot Y = \#\big(\varphi)_g(Y)\big) = \#Y$. $\square$

Lema A.17. *Sea $\varphi_X : G\times X\to X$ y $\varphi_Y : G\times Y\to Y$ dos acciones del grupo G. Entonces $\varphi_{X\times Y} : G\times(X\times Y)\to X\times Y$, $g\cdot(x,y) = (g\cdot x, g\cdot y)$, es una acción. En particular, φ_X induce una acción de G en $X\times X\cdots\times X$ (el producto de n copias de X), por $g\cdot(x_1,\dots,x_n) = (g\cdot x_1,\dots,g\cdot x_n)$. Esta acción se denomina la* acción diagonal

Prueba: Ejercicio. $\square$

Definición A.18 (Ad-hoc). Sea G un grupo actuando en el conjunto X Diremos que la acción es *n-transitiva* si la acción diagonal en $X\times\cdots\times X$ (n copias) es transitiva.

APÉNDICE B

Números complejos

Existen diferentes maneras de abordar los "números complejos". Desde el punto de vista algebraico, podemos pensar que el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$ es el menor cuerpo que contiene a los números reales y tal que todos los polinomios de coeficientes reales noconstantes tienen al menos una raíz — de hehco: todo polonomio de coeficientes complejos no constante tiene al meons una ráiz, y por lo tanto tantas como su grado si las contamos con multiplicidad: $\mathbb{C}$ es un cuerpo *algebraicamente cerrado*.

Recordemos que los números complejos se modelan como pares de números reales del siguiente modo:

El polinomio $x^2 + 1$ tiene dos raíces: si $i \in \mathbb{C}$ es una de ellas, entonces $i \notin \mathbb{R}$¡ y la otra raíz de $-i$.

La multiplicación por números reales induce una estructura de espacio vectorial real en $\mathbb{C}$, para la que el conjunto $\{1, i\}$ es una base: dado un número complejo z, existen únicos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $z = a+bi$.

Aplicando el mapacoordenadas$\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ (para la base anterior), tenemos que los todo número complejo puede describirse como un elemento de $\mathbb{R}^2$. En esa descripción, tenemos que $(a, b) + (x, y) = (a + b, x + y)$ y $(a, b) \cdot (x, y) = (ab - xy, ay + bx)$.

Si $(a, b) \neq (0, 0)$, entonces su inverso tiene la forma $(a, b)^{-1} = \big(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\big)$, por lo que la división por $(c, d) \neq (0, 0)$ tiene la forma

$$(a, b)/(c, d) = \big(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\big)$$

Bajo esta biyeción, los números reales conforman los elementos con segunda coordenada nula $\mathbb{R} = \big\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\big\}$.

Definición B.1 (Conjugación). La simetría respecto al eje de los números reales se denomina la *conjugación (compleja)*. El conjungado de un número complejo $z \in \mathbb{C}$ se denota $\overline{z}$ En la descripción binomial $\overline{a + bi} = a - bi$.

Si pensamos un número complejo $z = a + bi$ como un vector de $\mathbb{R}^2$, $z = (a, b)$, tenemos que su *módulo* es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$: el inverso de z peude describirse como $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Definición B.2 (La esfera de Riemann). Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la esfera S^2 de centro $(0, 0, 1)$ y radio 1. Entonces $S^2 \cap \{z = 0\} =)\big\{(0, 0, 0)\big\}$. Llamemos $N = (0, 0, 1)$. Entonces toda recta por N que no sea tangente a S^2 corta a la esfera S^2 en un punto, y al plano $\pi = \{z = 0\}$ en otro: tenemos una biyeccion entre los puntos del plano π y $S^2 \setminus \{N\}$.

Consideramos un "punto al infinito" ∞ que se corresponde con N: el conjunto $\mathbb{C}_\infty$ *de los números complejos extendidos* está en biyección con la esfera de Riemann S^2.

Definición B.3 (Trasnformaciones de Mœbius). Dados $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, con$ad - bc \neq 0$, la *transformación de Mœbius* asociada es la función $f_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, de la forma

$$f_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(z) = \begin{cases} \dfrac{az + b}{cz + d} & \text{si } z \neq \infty,\ z \neq -d/c \\ \infty & \text{si } z = \infty\,,\ c = 0 \\ a/c & \text{si } z = \infty\,,\ c \neq 0 \\ \infty & \text{si } z = -d/c\,,\ c \neq 0 \end{cases}$$

Lema B.4. *La función* $\varphi : \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Biy}(\mathbb{C}_\infty)$ *dada por*

$$\varphi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = f_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}$$

es un morfismo de grupos.

En particular, las transformaciones de Mœbius son un subgrupo de las biyecciones de $\mathbb{C}_\infty$*, y* $\mathrm{GL}(\mathbb{C})$ *actúa en* $\mathbb{C}_\infty$ *via* φ.

Más aún, $\operatorname{Ker}\varphi = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a \neq 0\}$.

Prueba: Cuentas!

Nótese que

$$f^{-1}_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} = f_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}} = f_{\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & a \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)} = f_{\left(\begin{smallmatrix} d & a \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)}.$$

Para la última afirmación, debemos probar que $\square$

Lema B.5. *El grupo de las transformaciones de Mœbius acúta en forma 3–transitiva. Más aún, una trasnformacion de Mœbius queda determinada por su valor en tres puntos de* $\mathbb{C}_\infty$.

PRUEBA: Debemos probar que dados $x, y, z \in \mathbb{C}_\infty$ distintos, existe una única transformación de Mœbius $f = f_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}$ tal que $f(0) = x$, $f(1) = y$, $f(\infty) = z$.

Recordemos que $f_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} = f_{\alpha\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}$ para todo $\alpha \neq 0$.

1ER CASO: $x, y, z \in \mathbb{C}$. Como $f(\infty) = z \neq \infty$, tenemos que $c \neq 0$, y $a/c = z$. Además, como $f(0) = x \neq \infty$, deducimos que $d \neq 0$ y $b/d = x$. Como $f(1) = y \neq \infty$, tenemos que $c + d \neq 0$ y $\frac{a+b}{c+d} = y$. Como $d \neq 0$, podemos asumir que $d = 1$. Entonces $b = x$, $a = cz$ e $y = \frac{a+b}{c+1}$, de donde $y = \frac{cz+x}{xc+1}$,. por lo que $c = \frac{x-y}{y-z}$, y $a = z\frac{xc-y}{y-z}$.

Debemos verificar que $ad - bc \neq 0$: $ad - bc = a - bc = \frac{(x-y)(z-x)}{y-z} \neq 0$.

Podemos mejorar la presentación, multiplicando por el factor $y - z$: $f = f_{\left(\begin{smallmatrix} z(x-y) & x(y-z) \\ x-y & y-z \end{smallmatrix}\right)}$

El resto queda como ejercicio. $\square$

APÉNDICE C

Anillos de división

DEFINICIÓN C.1. Un *anillo* es una quíntupla $(A, m, s, o, 0)$ tal que $(A, s, o, 0)$ es un grupo abeliano y $m : A \times A \to A$ un producto asociativo, de modo que se verifica la propiedad distributiva: $m\big(s(a, b), c\big) = s\big(m(a, c), m(b, c)\big)$ y $m\big(c, s(a, b)\big) = s\big(m(c, a), m(c, a)\big)$ para todo $a, b, c \in A$. En otras palabras si denotamos por $a + b = s(a, b)$ a la *suma* del anillo y por $ab = a \cdot b = m(a, b)$ al *producto*, para todo $a, b, c \in A$ se cumple que:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (convención: se calculan primero los paréntesis)
2. $0 + a = a + 0 = a$
3. $a + o(a) = o(a) + a = 0$
4. $a + b = b + a$
5. $a(bc) = (ab)c$
6. $(a + b)c = ab + bc$ (convención: se realiza primero el producto)
7. $c(a + b) = ca + cb$

Si existe $1 \in A$ tal que $!a = a1 = a$ para todo $a \in A$ (un *neutro para el producto*), diremos que A es un *anillo con unidad.*

Si A es un anillo con unidad tal que existe una función $\iota : A \setminus \{0\} \to A \setminus \{0\}$ tal que $\iota(a)a = a\iota(a) = 1$ para todo $a \in A \setminus \{0\}$, diremos que A es *anillo de división* o *Cuerpo no conmutativo.*

Si el producto es conmutativo, diremos que A es un anillo conmutativo.

Un *cuerpo* es un anillo de división, que es conmutativo.

OBSERVACIONES C.2. (1) En un anillo, $0a = a0 = 0$ para todo $a \in A$, ya que $)a = (0 + 0)a = 0a + 0a$, por lo que $0a$ es un idempotente para la suma y tiene que ser el 0 (sumar el opuesto).

(2) Notemos que si A es un anillo con unidad tal que $1 = 0$, entonces $A = \{1\}$. En efecto, si $a \in A$, entonces $a = 1a = 0a = 0$.

(3) Del mismo modo, si $0 \neq 1$, entonces el 0 no puede tener inverso: $1 = 0\iota(0) = 0$.

(4) En un anillo de división, si $ab = 0$ entonces o $a = 0$ o $b = 0$: si $a \neq 0$, entonces $0 = a^{-1}0 = a^{-1}ab = b$.

(5) Si $a \in R$, entonces $(-1)a + a = (-1)a + 1 \cdot a = (-1+1)a = 0a = 0$, y $a(-1) + a = a(1-1) = a$, por lo que $-a = (-1)a = a(-1)$.

A partir de ahora todos los anillos tiene unidad.

Definición C.3. Si Am, B son dos anillos, un *morfismo de anillos (con unidad)* es una función $f : A \to B$ tal que $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo $a, b \in A$ (f "respeta las operaciones"), y tal que $f(1_A) = 1_B$.

Observación C.4. La condición $f(1_A) = 1_B$ no es trivial. Por ejemplo, la función $f : \Bbbk \to \mathrm{M}_2(\Bbbk)$, $f(a) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ respeta el producto y la suma.

Definición C.5. Sea A un anillo con unidad. Entonces la función $f : \mathbb{Z} \to A$, $f(n) = n1 = 1 + 1 \cdots + 1$ (n 1 sumados) es un morfimos de anillos.

Se peude probar que su núcloe es de la forma $n\mathbb{Z} = \{nh : h \in \mathbb{Z}\}$, con $n \geq 0$. Diremos que A tiene *característica* n.

Observación C.6. Sea A un anillo con unidad de característica n. Si $n = 0$, entonces ninguna suma de unos produce el 0. Si $n > 0$¡ entonces n es el menor número de 1 que sumados dan 0.

Lema C.7. *Sea A un anillo de división. Entonces su cartecterística es* 0 *o un número primo.*

Prueba: Siu $n = mh$, entonces $0 = \overbrace{(1 + \cdots + 1)}^{n} = \overbrace{(1 + \cdots + 1)}^{m}\overbrace{(1 + \cdots + 1)}^{h}$, por lo que o bien $\overbrace{(1 + \cdots + 1)}^{m} = 0$ o $\overbrace{(1 + \cdots + 1)}^{h} = 0$ □

Ejemplo C.8. Si R es un anillo con división, entonces tiene sentido considerar el espacio de las matrices $\mathrm{M}_n(R)$: es un anillo con unidad (la matriz identidad), no conmutativo si $n \geq 2$ (el anillo de las las matr5ices 1×1 es el anillo R, será conmutativo sólo si R lo es).

COmo en elcaso cuand oR es un cuerpo, no toda matriz cuadrada es invertible, SI R es un cuerpo, sabemos que el determinante clasifica las matrices invertibles, pero cuando R no es conmutativo, la noción de determinante no se puede establecer con propiedad.

Definición C.9. Sea R un anillo con división. El *centro* de R se define como el conjunto de los elementos de R que conmutan con todo elemento de R:

$$\mathcal{Z}(R) = \{z \in R : za = az \ \forall a \in R\}$$

OBSERVACIÓN C.10. Es claro que $0, 1 \in \mathcal{Z}(R)$, y que si $a, b \in \mathcal{Z}(R)$, entonces $a + b \in \mathcal{Z}(R)$ y $ab \in \mathcal{Z}(R)$. Además, como $-a = (-1)a = a(-1)$ para todo $a \in R$ tenemos que si $z \in \mathcal{Z}(R)$, entonces $-z \in \mathcal{Z}(R)$: $(-z)a = (-1)za = (-1)az = a(-1)z = a(-z)$.

Por otra parte, si $z \in \mathcal{Z}(R) \setminus \{0\}$, entonces si $a \neq 0$, $z^{-1}a = z^{-1}(z^{-1})^{-1} = (a^{-1}z)^{-1} = (za^{-1})^{-1} = az^{-1}$.

Deducimos que el centro de Res un subanillo conmutativo: es un cuerpo.

1. El anillo de los cuaterniones

El anillo de los cuaterniones H es un anillo que extiende a los números complejos, construido por Hamilton para resolver ciertos problemas de la mecánica en es espacio 3-dimensional.

DEFINICIÓN C.11 (H, el anillo de los cuaterniones). Damos a $\mathbb{R}^4$ una estrcuturade anilo, de l simquiente modo:

- $(x_1, \dots, x_4) + (y_1, \dots, y_4) = (x_1 + y_1, \dots, x_4 + y_4)$ (la suma es la suma usual de $\mathbb{R}^4$ como espacio vectorial).
- El cero para la suma es, como es de esperar, $(0, 0, 0, 0)$.
- El producto está definido de modo que $(x_1, x_2, 0, 0)(y_1, y_2, 0, 0)$ sea el producto de los números complejos:

$$(x_1, \dots, x_4) \cdot (y_1, \dots, y_4) = \\ (x_1y_1 - x_xy_2 - x_3y_3 - x_4y_4, x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3, \\ x_1y_3 + x_3y_1 + x_4y_3 - x_2y_4, x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)$$

- La unidad es $(1, 0, 0, 0)$.

Queda como ejercicio probarque se cumple la asociatividad del producto, y las leyes distributivas.

OBSERVACIONES C.12. (1) Si $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j - (0, 0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 0, 1)$, entonces $\{1, i, j, k\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$, con $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Por otro lado $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ e $ik = -j = -ki$.

En particular, H no es conmutativo.

(2) Los subespacios $\langle 1, i \rangle_{\mathbb{R}}$, $\langle 1, j \rangle_{\mathbb{R}}$, y $\langle 1, k \rangle_{\mathbb{R}}$ son estables por la suma y el producto: son 3 copias de los números complejos dentro de H.

(3) Tenemos que $(a, 0, 0, 0)(x_1, \dots, x_4) = (ax_1, \dots, ax_4) = a(x_1, \dots, x_4)$.

(4) Si definimos $\big|(x_1,\ldots,x_4)\big| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_4^2}$, y $\overline{(x_1,\ldots,x_4)} = (x_1,-x_2,-x_3,x_4)$. Entonces si $z \in H \setminus \big\{(0,0,0,0)\big\}$, tenemos que $z\frac{1}{|z|^2}\overline{z} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}z = 1$.

APÉNDICE D

Anillos de polinomios

1. Polinomios con coeficientes en un anillo

Definición D.1. Un *polinomio (en una variable) con coeficientes en un anillo* R es una expresión formal $p = \sum_i a_i x^i$, donde $\#\{i : a_i \neq 0\} < \infty$. Notaremos este conjunto por $R[x]$.

Si $a_i = 0$ para todo i, diremos que p es *el polinomio nulo*, y lo notaremos por 0.

Tenemos entonces que si $p \in R[x] \setminus \{0\}$, podemos escribir $p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, con $a_n \neq 0$. Diremos que n es el *grado de p*.

Notación D.2. A partir de ahora R es un anillo con unidad.

Lema D.3. *Si $R[x]$ es un anillo de polinomios y consideramos las operaciones $+ : R[x] \times R[x] \to R[x]$ y $\cdot : R[x] \times R[x] \to R[x]$ dadas por $p+q = \sum_i (a_i+b_i)x^i$, $p \cdot q = \sum_n (\sum_{i+j=n} (a_i b_j) x^n$, con $p = \sum a_i x^i$ y $q = \sum_j b_j x^j$, tenemos que $R[x]$ es un anillo con unidad* $1(+0x + 0x^2 + \cdots$ *y cero el polinomios nulo.*

El anillo $R[x]$ es conmutativo si y sólo si R lo es.

Prueba: Son las mismas cuentas que para los polinomios con coeficientes los números reales. □

Definición D.4. Consideremos el anillo de polinomios en varias variables $R[x_1, \dots, x_n]$.

Un *monomio* es un polinomio de la forma $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$. Su *grado (total)* es la suma $\mathrm{gt}(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) = i_1 + \cdots + i_n$.

Si $p = \sum_{i_1,\dots i_n} a_{i_1,\dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \in R[x_1, \dots, x_n]$ es un polinomio y $a_{j_1,\dots,j_n} \neq 0$, entonces $a_{j_1,\dots,j_n} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ es un *término* de p.

Observemos que un término es un monomio multiplicado por un coeficiente no nulo.

Definición D.5. Dado $r \in R$ y $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in R[x]$, podemos considerar la *evaluación de p en r* $\mathrm{ev}_r(p) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_n r^n$, es decir, sustituyendo la variable x por r y "haciendo las cuentas" en R.

La evaluación permite a su vez asociarle a un polinomio p una función $f_p : R \to R$, dada por $f_p(r) = \mathrm{ev}_r(p)$.

Observación D.6. Si R es finito, entonces existe un olinomio $p \in R[x] \setminus \{0\}$ tal que $\mathrm{ev}_r(p) = 0$ para todo $r \in R$.

En efecto, si $R = \{r_1, \dots, r_m\}$, entonces $(x - r_1) \cdots (x - r_m) = x^m + (r_1 + \cdots + r_m)x^{m-1} + \cdots + (-1)^m r_1 \dots r_m$ se anula en todo r_i.

Vemos entonces que en este caso tenemos un problema si deseamos identificar los polinomios con funciones. Es posible proar que si R es infinito, entonces dos polinomios diferentes dan lugar a funciones diferentes.

Notación D.7. Si p es un polinomio, notaremos $p(r)$ a la evaluacion de p en r.

Definición D.8 (El anillo de polinomios en varias variables). Definimos el *anillo de poolinomios en n variables, con coeficientes en R* recursivamente, como $R[x_1, \dots, x_n] = R[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$.

Observaciones D.9. (1) Es posbile probar que esta definición no depende del orden en que hacemos la recursión. Si bien la prueba no es difícil, no la haremos en este curso, aceptando el resutlado.
(2) Si $p \in R[x_1, \dots x_n]$, entonces p tiene la forma $p) = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1,\dots,a_n} a_1^{i_i} \cdots x_n^{i_n}$, con $a_{i_1,\dots,i_n} \in R$ tales que $\#\{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n : a_{i_1,\dots,i_n} \neq 0\} < \infty$.
(3) Si $p \in R[x_1, \dots, x_n]$ es un polinomio y $(r_1, \dots, r_n) \in R^n$ es una n-upla, podemos definir

$$p(r_1, \dots, r_n) = \mathrm{ev}_{(r_1,\dots,r_n)}(p) = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1,\dots,a_n} a_1^{i_i} \cdots a_n^{i_n}.$$

2. Ceros de polinomios

Definición D.10. Si $p \in R[x]$ es un polinomio, diremos que $r \in R$ es un *cero de p* si $p(r) = \mathrm{ev}_r(p) = 0$.

Del mismo modo, si $q \in R[x_1, \dots, x_n]$ es un polinomios en n variables, la n-upla $[a_1, \dots, a_n \in R^n$ es un cero de q si $q(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{ev}_{(a_1,\dots,a_n)} = 0$.

Notaremos por $\mathcal{V}(p)$ al conjunto de ceros de p y si $J \subset R[x_1, \dots, x_n]$ es un subconjunto,

$$\mathcal{V}(J) = \big\{(r_1, \dots, r_n) \in R^n : p(r_1, \dots, r_n) = 0\,,\ \forall p \in J\big\}.$$

Ejemplos D.11. (1) Si $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ es un anillo finito, entonces $\mathcal{V}\big((x - r_1) \dots (x - r_n)\big) = R$.

(2) El polinomio $x^2 + y^2 + 1 \in \mathbb{R}[x, y]$ no tiene ceros.

(3) Si conidemamos ahora $x^2+y^2+1) \in \mathbb{C}[x, y]$ como un polinomios con coeficientescomplejos, ahora tenemos infinitos ceros: para cada númeno complejo $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, la ecuación $x^2 = -1-z^2$ tiene 2 raíces distintas, mientras que si $z = \pm i$, entonces tenemos una raíz "doble" $(x = 0)$ del polinomios $x2 = 0$:

$$\mathcal{V}(x^2 + y^2 + 1) = \big\{(\pm\sqrt{-1 - y^2}, y) : y \neq 0\big\} \cup \big\{(0, 0)\big\}$$

Ejemplo D.12 (El polinomio característico). Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ una matriz cuadrada. En el curso de álgebra lineal se define el *polinomio característico de* A como $\chi_A = \det(A - \lambda \operatorname{Id}_n)$. Este polinomio es un polinomio de variable λ con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{k}$. Pero.... dado que si $\alpha \in \mathbb{k}$ y $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ entonces $\alpha M = (\alpha \operatorname{Id_n})M$, podemos pensarlo como un polinomio con coeficientes en el anillo $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ (¡que no es un anillo conmutativo!).

La afirmación *A anula su polinmomio característico* puede leerse como $A \in \mathcal{V}(\chi_A)$.

A partir de ahora trabajamos con un cuerpo $\mathbb{k}$.

Sean ahora $J = \{p_1, \dots .p_m\} \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, y supongamos que $a \in \mathcal{V}(J)$ es un cero común. Si $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ son polinomios cualesquiera, y $p = f_1 p_1 + \dots f_m p_m$, entonces

$$p(a) = \big(\sum_{i=1}^{m} f_i p_i\big)(a) = \sum_{i=1}^{m} f_i(a) p_i(a) = \sum_{i=1}^{m} f_i(a) 0 = 0.$$

Tenemos entonces que a es un cero de p.

Definición D.13. El conjunto

$$\langle p_1, \dots, p_m\rangle = \big\{\sum_{i=1}^{m} f_i p_i : f_i \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\big\}$$

se denomina el *ideal generado por* $p_1, \dots, p_m$.

Tenemos entonces que probamos el siguiente resultado

Lema D.14. *Si a es un cero común de $p_1, \dots, p_m$, entonces es un cero común del ideal generado por* $\{p_1, \dots, p_m\}$ $\square$

El recíproco del lema anterior es cierto. Más aún, el lema anterior se puede probar para una cantidad infinita de polinomios.[1]

3. Polinomios homogéneos

Recordamos que estamos trabajando con polinomios en varias variables, con coeficientes en un cuerpo $\Bbbk$, que supondremos además infinito.

DEFINICIÓN D.15. Un polinomio $p \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ se dice *homogéneo* de grado t si y sólo si es de la forma

$$p = \sum_{i_1+\cdots+i_n=t} a_{i_1,\dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

OBSERVACIÓN D.16. Si tomamos en cuenta la definición D.4, tenemos que un polinomio es homogéneo de grado t si todos sus términos están construidos con monomios de grado t.

LEMA D.17. *Un polinomio $p \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ es homogéneo de grado t si para todo $\alpha \in \Bbbk$ y $(a_1, \dots, a_n) \in \Bbbk^n$, se cumple que*

$$p\big(\alpha(a_1, \dots, a_n)\big) = \alpha^t p(a_1, \dots, a_n)$$

PRUEBA: Si p es homogéneo, entonces $p = \sum_{i_1+\cdots+i_n=t} a_{i_1,\dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$, por lo que

$$\begin{aligned} p\big(\alpha(a_1, \dots, a_n)\big) = p(\alpha a_1, \dots, \alpha a_n) = \\ \sum_{i_1+\cdots+i_n=t} a_{i_1,\dots i_n} (\alpha a_1)^{i_1} \dots (\alpha a_n)^{i_n} = \\ \sum_{i_1+\cdots+i_n=t} a_{i_1,\dots i_n} \alpha^{i_1+\cdots+i_n} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} = \\ \alpha^t \sum_{i_1+\cdots+i_n=t} a_{i_1,\dots i_n} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} = \alpha^t p(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Omitiremos la prueba del recíproco (que es bastante más difícil). $\square$

COROLARIO D.18. *Si $p \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ es un polinomio homogéneo, y $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{V}(p)$, entonces la recta OA está formada por ceros de p.*

---

[1]Gracias a un teorema debido a Hilbert (el *Teorema de la base de Hilbert*), sabemos que dado un "ideal" $I \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, existe una cantidad finita de polinomios $p_1, \dots, p_m \in I$ tales que I es el ideal generado por $p_1, \dots, p_m$: para estudiar ceros de una familia de polinomios, ¡alcanza con estudiar los ceros comunes de una cantidad finita!.

El resultado sigue siendo válido si consideramos los ceros de una familia de polinomios. □

APÉNDICE E

El grupo $\mathrm{PGL}_n(\Bbbk)$

1. Cociente por subgrupos

Sea G un grupo y H un subgrupo. Entonces podemos considerar la relación en G dada por $x \sim y$ si $xy^{-1} \in H$. Es fácil ver que esta relación es de equivalencia:

- $xx^{-1} = 1 \in H$.
- Si $xy^{-1} \in H$, entonces $yx^{-1} = (xy^{-1})^{-1} \in H$.
- Si $xy^{-1} \in H$ e $yz^{-1} \in H$, entonces $xz^{-1} = xy^{-1}yz^{-1} \in H$.

Notemos $G/H = G/\sim$ y consideremos la proyección canónica $\pi : G \to G/H$.

Observemos que $x \sim y$, si y sólo si existe $h \in H$ tal que $y = xh$. Notamos entonces $xH = \pi(x)$.

Es natural preguntarse cuando podemos poner una estructura de grupo en G/H de modo que π sea un morfismo de grupos. Recordemos que si existiera una tal estructura, del hecho que $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ deducimos que $\pi(1_G) = 1_{G/H}$ y $\pi(x)^{-1} = \pi(x)^{-1}$.

Veamos qué condiciones adicionales necesitamos que verifique H para que exista la estructura de grupo que buscamos.

Luego, tenemos que debe verificarse que $\pi(xhyh') = \pi(x)\pi(y)$ para todo $x, y \in G$, $h, h' \in H$. Tomando $y = x^{-1}$ y $h' = 1$ deducimos que

$$\pi(xhx^{-1}) = \pi(x)\pi(x^{-1}) = \pi(x)\pi(x)^{-1} = 1_H = \pi(1_G)$$

de donde $xhx^{-1} \sim 1_G$ para todo $h \in H$, $x \in G$. Resulta que esta condición necesaria es suficiente para garantizar la existencia del producto.

Definición E.1. Sea G un grupo y $H \subset G$ un subgrupo. Diremos que H es un *subgrupo normal* de G si $xhx^{-1} \in H$ para todo $h \in H$ y $x \in G$.

Observación E.2. La definición de subgrupo normal peude leerse como sigue H es normal en G si todo *conjugado de un elemento de*

H (es decir, un elemento de la forma xhx^1, con $h \in H$ y $x \in G$), es equivalente a 1_G.

Lema E.3. *Sea G un grupo y H un subgrupo normal. Entonces existe una estructura de grupo en el cociente G/H, de modo qeu $\pi : G \to G/H$ es un morfismo de grupos.*

Prueba: Si $X, Y \in G/H$, definimos el producto $X \cdot Y$ del siguiente modo: sean $x, y \in G$ tales que $xH = \pi(x) = X$ y $yH = \pi(y) = Y$. Entonces $X \cdot Y = \pi(xy) = xyH$. Veamos que esta construcción no depende de los representantes elegidos.

Si $y' \sim y$, existe $s \in H$ tal que $y' = ys$, y tenemos que $xy' = xys$, de donde $x'y \sim xy$. Si $x' \sim x$, sea $h \in H$ tal que $x' = xh$. Entonces

$$x'y = xhy = xyy^{-1}hy = xy\big(y^{-1}h(y^{-1})^{-1}\big),$$

de donde $x'y \sim xy$, ya que $y^{-1}h(y^{-1})^{-1} \in H$.

Veamos ahora que la operación que definimos nos da una estructura de grupo en G/H — si es el caso, por construcción tendremos que el cociente $\pi : G \to G/H$ es un morfismo de grupos.

- Si $X = \pi(x), Y = \pi(y)$ y $Z = \pi(z)$m, tenemos que

$$(XY)Z = \big(\pi(x)\pi(y)\big)\pi(xy)\pi(z) = \pi\big((xy)z\big) = \pi\big(x(yz)\big) = \pi(x)\pi(yz) = X(YZ)$$

  por lo que el producto es asociativo.
- Si $X = \pi(x)$, entonces

$$\pi(1_G)X = \pi(1_G)\pi(x) = \pi(1_Gx) = \pi(x) = X = \pi(x1_G) = \pi(x)\pi(1_G) = X\pi(1_G)$$

  por lo que $\pi(1_G)$ es un neutro.
- Si $X = \pi(x)$, entonces

$$X\pi(x^{-1}) = \pi(x)\pi(x^{-1}) = \pi(xx^{-1}) = \pi(1_G) = \pi(x^{-1}\pi(x) = \pi(x^{-1})X$$

  por lo que $\pi(x^{-1})$ es la inversa de X.

$\square$

Ejemplos E.4. (1) $\{1_G\}$ y G son siempre subgrupos normales de G.

(2) Si G es conmutativo y $H \subset G$, entonces $xhx^{-1} = xx^{-1}h = h$ para trodo $h \in H$, por lo que todo subgrupo es normal.

(3) El *centro* de un grupo G, se define como el conjunto de los elementos que conmutan con todo elemento de G:

$$\mathcal{Z}(G) = \{h \in G : hg = gh \ \forall g \in G\}$$

Es fácil ver que $\mathcal{Z}(G)$ es un subgrupo normal de G.

(4) Si $\Bbbk$ es un cuerpo, es relativamente fácil probar que el centro del grupo $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ de las matrices cuadradas invertibles consiste en las matrices diagonales con un mismo escalar no nulo en la diagonal:

$$\mathcal{Z}\big(\mathrm{GL}_n(\Bbbk)\big) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} : a \neq 0 \right\} = \{a \operatorname{Id}_n : a \neq 0\}$$

Definición E.5 (El grupo general lineal proyectivo). El cociente $\mathrm{PGL}_n(\Bbbk) = \mathrm{GL}_n(\Bbbk)/\mathcal{Z}\big(\mathrm{GL}_n(\Bbbk)\big)$ se denomina el *grupo general lineal proyectivo.*

Observación E.6. Consideremos la acción de $\varphi : \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \times \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ dada por multiplicacion a izquierda:

$$\varphi\left(A, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \sum_j a_{ij}x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj}x_j \end{pmatrix}$$

donde $A = (a_{ij})$

Notemos que esta acción “es por transformaciones lineales invertibles”, es decir si $A \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$, entonces la función $\varphi_A(\Bbbk^n \to \Bbbk^n$, dada por $|varphi_A(x) = \varphi(A,x)$ es una transformación lineal — es la transformación lineal $L_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ definida en el curso de álgebra lineal. En particular, llevan rectas por el origen en rectas por el origen.

Tenemos entonces una acción $\mathrm{GL}_{n+1}(\Bbbk) \times \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1}) \to \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$, dada por

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] == \begin{bmatrix} \sum_j a_{ij}x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj}x_j \end{bmatrix}$$

Más aún, las matrices de la forma $a \operatorname{Id}_n$ actúan por homotecias con centro el origen, por lo que $a \operatorname{Id}_n \cdot [x_0 : \cdots : x_n] = [x_0 : \cdots : x_n]$: tenemos entonces una acción $\mathrm{PGL}_{n+1}(\Bbbk) \times \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1}) \to \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$, dada por

$$[A] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] == \begin{bmatrix} \sum_j a_{ij}x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj}x_j \end{bmatrix}$$

En el caso particular que $n = 2$, tenemos que $\mathrm{PGL}_3(\Bbbk)$ actúa en el plano proyectivo $\mathbb{P}(\Bbbk^3)$. Como las transformaciones lineales $Ł_A : \Bbbk^3 \to \Bbbk^3$ llevan rectas en rectas y planos en palnos, tenemos que las funciones $\psi_A : \mathbb{P}(\Bbbk^3) \to\ PP(|Bbbk^3)$ dadas por $\psi_A\big([x:y:z]\big) = \big[\varphi\big(A,(x,y,z)\big)\big]$ son automorfismos del plano proyectivo.

En particular, probamos la afirmación siguiente:

TEOREMA E.7. *El grupo general lineal proyectivo* $\mathrm{PGL}_n(\Bbbk)$ *actúa en el plano proeyctivo* $\mathbb{P}(\Bbbk^3)$ *por automorfismos del plano proyectivo.* $\square$