Introducción a la topología
Curso 2020

Alvaro Rittatore

Basado en notas de Álvaro Rovella y Martín Sambarino

Índice general

Capítulo 1

Conjuntos y cardinalidad

1. Conjuntos y funciones

Es útil saber de memoria las siguientes propiedades de conjuntos y funciones. Tanto como saber las tablas.

EJERCICIO 1.1. Si I es un conjunto y A_α es un conjunto para cada $\alpha \in I$, entonces:

$$[\cup A_\alpha]^c = \cap A_\alpha^c \quad \text{y} \quad [\cap A_\alpha]^c = \cup A_\alpha^c.$$

EJERCICIO 1.2. Sea $f : X \to Y$ una función, $A \subset X$, $B \subset Y$, $\{A_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de X y $\{B_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de Y.

a) Probar primero que "tomar preimágenes" preserva inclusiones, uniones, intersecciones, complementos y diferencias:
   (I) Si $B_1 \subset B_2$ entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
   (II) $f^{-1}(\cup B_\alpha) = \cup f^{-1}(B_\alpha)$
   (III) $f^{-1}(\cap B_\alpha) = \cap f^{-1}(B_\alpha)$
   (IV) $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$.
   (V) $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$
b) Sin embargo, "tomar imágenes" preserva sólo inclusiones y uniones:
   (I) Si $A_1 \subset A_2$ entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$.
   (II) $f(\cup A_\alpha) = \cup f(A_\alpha)$
   (III) $f(\cap A_\alpha) \subset \cap f(A_\alpha)$. Mostrar que la inclusión puede ser estricta. Probar que se da la igualdad si f es inyectiva.
   (IV) Hay alguna relación entre $f(A^c)$ y $[f(A)]^c$?
c) (I) Probar que $f^{-1}(f(A)) \supset A$ y se da la igualdad si f es inyectiva
   (II) Probar que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y se da la igualdad si f es sobreyectiva.

Recordemos ahora algunas propiedades de las funciones sobreyectivas e inyectivas:

EJERCICIO 1.3. Denotamos por la función identidad en un conjunto C por $i_C : C \to C$ donde $i_C(x) = x$ para todo $x \in C$. Dada $f : A \to B$ decimos que una función $g : B \to A$ es una *inversa a izquierda* de f is $g \circ f = i_A$ y decimos que $h : B \to A$ es una *inversa a derecha* si $f \circ h = i_B$.

1. Mostrar que si f tiene inversa a izquierda entonces f es inyectiva, y que si f tiene inversa a derecha entonces f es sobreyectiva.

2. Dar una ejemplo de una función que tenga inversa a izquierda pero no a derecha y un ejemplo de una función con inversa a derecha pero no izquierda.
3. ¿Puede una función tener mas de una inversa a izquierda?, ¿y a derecha?

La noción de "límite" es una noción más amplia que la de "límite de una función": para definir una noción de *límite* (o *colímite*) se necesita alguna noción de "orden", a partir de la cual estableer la "propiedad universal" que corresponde. Sin entrar en profundidad en estas nociones, veamos algunos ejemplos que serán útiles para lo que sigue:

EJERCICIO 1.4. Si $\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos de X, entonces definimos el *límite superior*:

$$\limsup_n A_n = \cap_{n\geq 0} \cup_{k\geq n} A_k$$

y el *límite inferior*:

$$\liminf_n A_n = \cup_{n\geq 0} \cap_{k\geq n} A_k$$

Probar que

1. $\cap_n A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \cup_n A_n$.
2. Si A_n es una sucesión creciente de conjuntos, entonces $\liminf A_n = \limsup A_n = \cup A_n$. Si es decreciente, entonces $\liminf A_n = \limsup A_n = \cap A_n$
3. $x \in \limsup A_n$ si y sólo si x pertenece a infinitos A_n. Además $x \in \liminf A_n$ si y sólo si x pertenece a todos salvo una cantidad finita de los A_n.
4. Sea $\{a_n : n \geq 0\}$ una sucesión de números reales. Sea $A_n = (-\infty, a_n)$. Qué dan el límite superior y el límite inferior de los conjuntos A_n? Repetir el ejercicio para $A'_n = (-\infty, a_n]$ y para $B_n = (a_n, +\infty)$

2. Relaciones

DEFINICIÓN 1.1. Sea A un conjunto. Una *relación en* A es subconjunto R de $A \times A$. Usaremos la notación $x \sim_R y$ o o $x \; R \; y$ si y solamente si $(x, y) \in R$.

2.1. Relaciones de orden.

DEFINICIÓN 1.2. Una *relación de orden* u *orden* en un conjunto X es una relación R en X que cumple dos propiedades:

- La *propiedad transitiva*: si $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$ entonces $(x, z) \in R$.
- La *propiedad antisimétrica*: si $(x, y) \in R$, $(y, x) \in R$ entonces $x = y$.

Muchas veces se usa el nombre *orden parcial*, para diferenciarlo del *orden total*, que verifica la propiedad adicional

• *propiedad de conexión.* Todo elemento se puede comparar con otro: dados $x, y \in X$, entonces $\{(x,y),(y,x)\} \cap R \neq \emptyset$.

EJERCICIO 1.5. Probar que un orden R es total si y sólo si

(i) $(x,x) \in R$ para todo $x \in X$ (*propiedad reflexiva*),

(ii) para todo par de elementos distintos $x, y \in X$, tenemos que o bien $(x,y) \in R$ o bien $(y,x) \in R$ (sólo se cumple una de estas opciones).

EJEMPLO 1.3. Si Z es un conjunto cualquiera y $\mathcal{P}(Z)$ denota al conjunto de los subconjuntos de Z, defina $R \subset \mathcal{P}(Z) \times \mathcal{P}(Z)$ como $(A,B) \in R$ sii $A \subset B$. Esta relación es de orden parcial.

Esta relación no es de orden total, a menos que...

EJEMPLO 1.4. Sea $X = \{1, \dots, n\}$ con la relación $R = X \times X$. Esta relación no es de orden, a menos que...

En general se usa una notación más sugestiva: $(x,y) \in R$ se escribe $x \geq y$ (también a veces usaremos $\leq$ o bien $<$ o bien $>$, según conveniencia, pero con riesgo de confundir). Entonces suele ponerse $(X, \geq)$ para significar que se ha considerado en X el orden $\geq$, y se llama al par $(X, \geq)$ un conjunto ordenado. En los reales $\mathbb{R}$ se tienen los órdenes usuales $>$, $<$, $\leq$, $\geq$. Convénzase que los dos primeros no son totales y los dos últimos si.

EJEMPLO 1.5. Si X es un conjunto ordenado con orden R, entonces podemos derinir el orden inverso u opuesto, por $x \; R^{op} \; y$ si $y \; R \; x$. Observemos que R es total si y solamente si R^{op} lo es.

EJEMPLO 1.6. Otro ejemplo es el orden producto, de dos conjuntos ordenados $(X, >_X)$ y $(Y, >_Y)$, definido como $(x,y) > (x',y')$ sii $x >_X x'$ y $y >_Y y'$. Probar que es un orden parcial y observe que aunque ambos sean totales, el orden producto no lo es (a menos que uno de los conjuntos tenga un solo elemento).

Para definir un orden total en el producto de dos conjuntos ordenados, necesitamos agregar alguna condición adicional.

EJERCICIO 1.6. Dados dos conjuntos ordenados $(X, >_X)$ y $(Y, >_Y)$, se define en el producto $X \times Y$ el *orden lexicográfico* o de *diccionario* como sigue:

• $(x,y) >_{lex} (x',y')$ si $x >_X x'$ o bien $x = x'$ y $y >_Y y'$.

(a) Probar que si los órdenes en $>_X$ y $>_Y$ son totales, entonces $>_{lex}$ es total.
(b) Hacer un dibujo en $\mathbb{R}^2$ del conjunto de los $(x,y) > (2,1)$, cuando es el orden producto y cuando es el orden lexicográfico (considerando en $\mathbb{R}$ el orden $\geq$).

OBSERVACIÓN 1.7. Si $(X, \geq)$ es un conjunto ordenado, e Y es subconjunto de X, entonces Y hereda el orden $\geq$. Eso es una afirmación que hay que probar.

Definición 1.8. Si Y es subconjunto de X decimos que a es *cota* de Y si $a \geq y$ para todo $y \in Y \setminus \{a\}$; a es *máximo* de Y si además $a \in Y$. Un elemento $a \in Y$ es *maximal* en Y si se cumple que: "existe $y \in Y$ tal que $y \geq a$ implica $y = a$". Ver abajo en los ejercicios la diferencia entre máximo, maximal y cota. Un elemento $x \in X$ tiene *sucesor inmediato* si el conjunto de los $s \in X \setminus \{x\}$ tales que $s > x$ tiene mínimo.

Definición 1.9. Un conjunto totalmente ordenado $(X, >)$ es tal que $>$ es un *buen orden* si se cumple que todo subconjunto tiene mínimo. Por ejemplo $(\mathbb{R}, \geq)$ no es buen orden, pero $(\mathbb{N}, \geq)$ sí lo es.

Ejercicio opcional 1.7. Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos, con el orden usual, que notaremos $>$. Se consideran los siguientes órdenes en el producto $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$:

(i) $(x, y) > (x', y')$ si $y - x > y' - x'$ o bien $y - x = y' - x'$ y $y > y'$.
(ii) $(x, y) > (x', y')$ si $x + y > x' + y'$ o bien $x + y = x' + y'$ y $y > y'$.
Probar que son órdenes totales.

¿Qué elementos tienen un sucesor inmediato? ¿Hay elementos máximos? Probar que los órdenes no son equivalentes entre sí , ni al orden lexicográfico. (Dos conjuntos ordenados $(X, >_X)$ y $(Y, >_Y)$ son equivalentes si existe una biyección $h : X \to Y$ tal que $h(x) >_Y h(x')$ si y sólo si $x >_X x'$.)

Ejercicio opcional 1.8. Considere $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ con el orden de inclusión, es decir $A > B$ si $A \supset B$.

(a) Probar que es un orden parcial, que no es total, que existe un elemento mínimo y un elemento máximo.
(b) Sea Y el subconjunto de X definido por $A \in Y$ si A tiene menos de 32 elementos. Averiguar si tiene máximo, si tiene elementos maximales y elementos minimales.
(c) Hallar un subconjunto infinito de X que sea totalmente ordenado.
(d) Hallar un subconjunto de X que sea acotado pero que no tenga elemento maximal.

Ejercicio 1.9. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq 2\}$ con la relación de orden $m \leq n$ si m divide a n. Probar que es efectivamente una relación de orden y hallar elementos maximales y minimales, si es que existen.

2.2. Relaciones de equivalencia.

Definición 1.10. Sea A un conjunto. Decimos que una relación R en A es una *relación de equivalencia* si se cumple lo siquiente (notamos $x \, R \, y$ por $x \sim y$) :

1. *propiedad reflexiva*: $x \sim x$ para todo $x \in A$;
2. *propeidad simétrica*: si $x \sim y$ entonces $y \sim x$;
3. *propiedad transitiva*: si $x \sim y$ e $y \sim z$ entonces $x \sim z$.

Si R es una relación de equivalencia, la *clase de equivalencia* de $x \in A$ es el conjunto $[x] = \{y \in A : x \sim_R y\}$. Denotamos por $A/\sim$ el conjunto de las clases de equivalencia

El mapa $\pi : A \to A/\sim$, dado por $\pi(x) = [x]$ se denomina el *mapa (o morfismo) cociente*. A veces abusaremos notación y diremos que $A/\sim$ es el cociente.

OBSERVACIÓN 1.11. Nótese que dada una relación de equivalencia $\sim$ en X ,tenemos que $x \sim y$ sii $[x] = [y]$.

EJERCICIO 1.10. Sea A un conjunto y $\sim_R$ una relación de equivalencia. Probar que el conjunto de las clases de equivalencia forman una *partición* de A (recordar que una colección de subconjuntos no vacios $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ es una partición de A si $A = \cup A_\alpha$ y que si $\alpha \neq \alpha'$ entonces $A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \emptyset$).

EJERCICIO 1.11. Probar que las siguientes son relaciones de equivalencia:

1. En $\mathbb{R}$ definimos $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$.
2. En $\mathbb{R}^2$ definimos $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}^2$.
3. En $\mathbb{R}^2$ definimos $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ si $x_1 - y_1 \in \mathbb{Z}$.

EJERCICIO 1.12. Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva. Definimos una relación en A por

$$x \sim y \text{ si } f(x) = f(y).$$

1. Mostrar que es una relación de equivalencia.
2. Sea $A/\sim$ es conjunto de las clases de equivalencia. Mostrar que hay una correspondencia biyectiva entre $A/\sim$ y B.

EJERCICIO 1.13. En los siguientes casos explicitar la relación de equivalencia:

1. $f : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $f(t) = e^{2\pi i t}$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ por $f(x_1, x_2) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2})$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ por $f(x, y) = (e^{2\pi i x}, y)$.

PROPOSICIÓN 1.12. *Sea* $(A, \sim)$ *un conjunto con una relación de equivalencia. Entonces el mapa cociente* π *satisface la siguiente* propiedad universal (del cociente)*: Para toda función* $f : A \to B$ *tal que es constante en las clases de equivalencia (es decir si* $x \sim y$ *entonces* $f(x) = f(y)$*, existe una única función* $\overline{f} : A/\sim \to B$ *tal que* $\overline{f} \circ \pi = f$*, en términos diagramáticos, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/\sim \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN: Ejercicio! $\square$

3. Cardinalidad

Intuitivamente se define el *cardinal* de un conjunto como la cantidad de elementos del conjunto. Claro que los conjuntos infinitos en principio no se pueden contar para decir cuál tiene más elementos. Pero la cosa se pone interesante si se define que un conjunto X es *equipotente* a otro Y si existe una función biyectiva de X en Y. Esta es claramente una relación de equivalencia, sólo un "detalle": no existe el conjunto de todos los conjuntos. Así que obviemos este problema suponiendo que tenemos una determinada colección $\mathcal{A}$ de conjuntos y observemos que la relación es de equivalencia en $\mathcal{A}$. A cada clase de equivalencia le llamamos *cardinal*, y notaremos $\#x$ al cardinal de x. Así, el número natural 2 puede ser visto como un cardinal, es decir, como la clase de todos los subconjuntos de $\mathcal{A}$ que cuentan con 2 elementos. También se usa decir que dos conjuntos equipotentes tienen el mismo cardinal. Lo más interesante es que se puede definir un orden entre los números cardinales. Decimos que un cardinal x es mayor o igual que y (que notaremos $x \geq y$) si existe un conjunto X en la clase x y uno Y en la clase y y una función inyectiva de Y a X. Para probar que es una relación de orden usamos sin demostración el siguiente teorema de Bernstein:

Teorema 1.13 (Berstein). *Si existe una función inyectiva de X a Y y existe una función inyectiva de Y a X, entonces existe una función biyectiva de X a Y, o sea, X e Y son equipotentes.*

Ejercicio 1.14.
- a) Demostrar que efectivamente dimos una definición de una relación, es decir, que no depende de la elección de los representantes de x y de y.
- b) Usando el teorema de Bernstein, probar que es una relación de orden. Investigar si esta relación corresponde a un orden total. Pensaremos que $\mathcal{A}$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$.

La noción de cardinal de un conjunto infinito fue una noción problemática en su momento. Inmediatamente se presentan problemas relacionados con la axiomática de la teoría de conjuntos. Omitiremos esos "detalles", que se profundizan en los cursos de fundamentos de la matemática. NOscontentaremos entonces con ver que los números reales tiene un cardinal mayor que los números naturales (ver Ejercicio 1.21).

Definición 1.14. Un conjunto es *numerable* si su cardinal es finito o el de los números naturales.

Ejercicio 1.15 (Principio del palomar). Probar que si A es un conjunto finito y $f : A \to A$ es inyectiva entonces f es biyectiva.

Ejercicio 1.16. Probar que la unión finita y el producto finito de conjuntos finitos es un conjunto finito.

Ejercicio 1.17. Probar que si A is infinito y B es numerable entonces $\#(A \cup B) = \#A$.

EJERCICIO 1.18. Probar que un conjunto es infinito sii es equipotente con algún subconjunto propio.

EJERCICIO 1.19. El conjunto de los números pares es numerable, y $\mathbb{Z}$ también.

También son numerables: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, los racionales, el conjunto de los números algebraicos (raíces de polinomios de coeficientes enteros), la unión de conjuntos numerables, el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

EJERCICIO 1.20.
1. Probar que dos intervalos acotados de $\mathbb{R}$ son equipotentes.
2. Probar que $\mathbb{R}$ es equipotente con el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.
3. Concluir que $\mathbb{R}$ es equipotente con cualquier intervalo.
4. Probar que $\#\mathbb{R}^k = \#\mathbb{R}$.

EJERCICIO 1.21.
(I) Probar que el conjunto formado por todas las sucesiones de ceros y unos (denotado $2^{\mathbb{N}}$) no es numerable.
(II) Probar que el intervalo $(0,1)$ es equipotente a $2^{\mathbb{N}}$, y deducir que $\mathbb{R}$ es equipotente a $2^{\mathbb{N}}$, y por o tanto, $\mathbb{R}$ no es numerable.
(III) Probar que 2^X es equipotente a $\mathcal{P}(X)$.
(IV) Deducir que $\mathbb{R}$ es equipotente al conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Veamos ahora algunos ejemplos que tienen que ver con algunas de las nociones que veremos en este curso:

EJERCICIO 1.22. Probar que si $A \subset \mathbb{R}$ es no numerable entonces A tiene un punto de acumulación

EJERCICIO 1.23. Probar que el conjunto de bolas de $\mathbb{R}^n$ (con las distancia euclídea) cuyo centro tiene todas sus coordenadas racionales y cuyo radio es racional es numerable.

EJERCICIO 1.24.
1. Probar que $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ tiene el cardinal de $\mathbb{R}$.
2. ¿Cuál es el cardinal de $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$?

Un ejercicio de "algebra lineal"

EJERCICIO 1.25.
1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ y a $A \subset V$ un conjunto numerable. Probar que el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de A con coeficientes en $\mathbb{Q}$ es numerable.
2. Considere $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Probar que una base de Hamel es no numerable. ¿Qué cardinal tiene?

4. Producto cartesiano — el axioma de elección

El producto cartesiano de conjuntos cumple unas interesantes propiedades categóricas, más adelante veremos qué pasa e nespacios topológicos.

Definición 1.15. Dado un conjunto de índices I y un conjunto X_α para cada $\alpha \in I$, se define el *producto cartesiano de los conjuntos* X_α como

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \to \cup_{\alpha \in I} X_\alpha \ : \ f(\alpha) \in X_\alpha \ \forall \alpha \in I\}$$

Dado $\alpha \in I$, las función $p_\alpha : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\alpha$, $p_\alpha(f) = f(\alpha)$ se llama la *α-ésima proeycción canónica.*

La definición del producto cartesiano es más sutil de lo que parece: nada (¿?) nos garantiza que el producto no sea el conjunto vacío. Bueno, nada no, el *axioma de elección* nos lo garantiza:

Axioma 1.16 (Axioma de elección). Cualquiera que sea el conjunto I, $\{X_\alpha\}$ es una familia de conjuntos no vacíos, entonces $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es distinto del vacío.

En otras palabras, si todo X_α es no vacío, entonces existe un objeto (una función) que consiste en elegir un elemento de cada conjunto.

Así dicho parece que no debiera ser un axioma: yendo a su buscador favorito podrán encontrar muchas referencias históricas sobre las “luchas académicas” acerca de la veracidad del enunciado anterior, hasta que llegó el matemático (Ejercicio: ¿Quién o quiénes?) y mostró que era un axioma. La *matemática constructiva* nació de la necesidad de algunos matemáticos de construir una matemática sin usar el axioma de elección, pues les resultaba espurio[1]. Muchos matemáticos despreciaron la matemática constructiva (evidentenemte, el axioma de elección les resultaba natural), pero con el advenimiento de la informática ésta mostró su utilidad: las nocionas de constructividad están muy relacionadas con la programación, ya que a una computadora no se le puede decir “elegí un elemento”, sino que hay que dar un método explícito para que lo haga.

Una vez que tenemos el axioma de elección, es fácil ver que el producto cartesiano cumple la siguiente “propiedad universal”:

Proposición 1.17. *Sea I un conjunto de índices y $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos. Entonces la familia de funciones (las* proyecciones canónicas*) $p_\alpha : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\alpha$ es tal que para cada familia de funciones $f_\alpha : Y \to X_\alpha$, existe una única función $f : Y \to \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ tal que $f_\alpha = p_\alpha \circ f$ para todo $\alpha \in I$. En otras palabras, los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, dotted, "f"'] & X_\alpha \\ \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \arrow[ur, "p_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

[1]*espurio:* 1. adj. bastardo (que degenera de su origen o naturaleza). adj. falso (fingido) (diccionario de la RAE).

Demostración: Ahora sí, esta demostración es fácil. □

Observación 1.18. En realidad, tenemos una definición "categórica" de "producto" de la familia X_α: es la de un conjunto X juntos con sus proyecciones $p_\alpha : X \to X_\alpha$ que cumpla la propiedad universal de arriba. La proposición 1.17 muestra que en la categoría de conjuntos, el producto existe (es el conjunto que llamamos producto cartesiano). En los cursos de álgebra lineal a veces se prueba que el producto existe (no debe confundirse con la suma directa!).

Ejemplo 1.19. Si X es un conjunto y $I = \{1, \ldots, n\}$ entonces el producto $\prod_{1\le k\le n} X$ peude identificarse con el conjunto de las n-uplas ordenadas de elementos de X, siendo las proyecciones canónicas las proyecciones en cada coordenada (habitualmente se nota X^n).

En general, si todos los X_α son iguales a un conjunto X entonces escribimos X^I como abreviación para $\prod_{\alpha\in I} X$. Note que X^I es el conjunto de todas las funciones de I en X.

Ejercicio 1.26. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son numerables: (a) $\mathbb{Z}^{[0,1]}$, (b) $[0,1]^{\mathbb{Z}}$, (c) $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$, (d) El conjunto de funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ que valen 0 salvo para finitos $n \in \mathbb{Z}$. (e) El conjunto de funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que valen 0 salvo para finitos $n \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio opcional 1.27. Hallar una sucesión de conjuntos infinitos X_n tales que el cardinal de X_{n+1} es mayor que el de X_n. Después hallar un conjunto Z que tenga mayor cardinal que todos los X_n.

5. El axioma de elección y el Lema de Zorn

El llamado *Lema de Zorn* dice lo siguiente:

Lema de Zorn. *Sea* $(X, >)$ *un conjunto parcialmente ordenado. Si todo subconjunto totalmente ordenado tiene cota superior, entonces existe un elemento maximal en* X*.*

Pero... es un lema? o un axioma?

En una línea: el Lema de Zorn es un axioma, equivalente al Axioma de elección.

En otras palabras: si tomamos los axiomas de la teoría de conjuntos (incluido el de elección) y por otra parte tomamos los mismos axiomas, pero cambiamos el de elección por el Lema de Zorn, podremos pobrar exactamente los mismos teoremas.[2]

En términos prácticos: el Lema de Zorn se puede probar a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos (con el de elección) — omitiremos esta prueba, que es algo complicada y nos saca demasiado del objetivo de este

[2]Este tipo de problemas se tratan en los cursos de fundamentos de la matemática.

curso. Pero si tomamos el resto de los axiomas y agregamos el lema de Zorn, podemos probar el axioma de elección (ver ejercicio 1.29).

Por otro lado, el Axioma de elección es también equivalente al *principio de buena ordenación*, que dice que todo conjunto puede ser bien ordenado, es decir, si X es un conjunto, existe en X un buen orden. Es posible por lo tanto, hallar un orden en $\mathbb{R}$ que es un buen orden. Se tiene entonces que todo subconjunto tiene un mínimo, por lo tanto, $\mathbb{R}$ tendrá un mínimo x_0, luego $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ tendrá un mínimo x_1 y así sucesivamente hasta agotar los reales.

Ejercicio 1.28. Usar el Axioma de elección para demostrar que si $f : X \to Y$ es una función sobreyectiva, entonces existe una inversa por derecha de f, es decir, una función $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_X$.

Probar que si $f : X \to Y$ es inyectiva, entonces f tiene una inversa por izquierda; ¿se precisa el Axioma de elección?

Ejercicio 1.29. Probar el Axioma de elección usando el Lema de Zorn.

Idea: Se quiere probar que existe una función $\phi : I \to \cup_{\alpha \in I} X_\alpha$ tal que $\phi(\alpha) \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Sea F el conjunto de las funciones f definidas en algún subconjunto D_f de I tales que $f(\alpha) \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in D_f$. Probar que este conjunto es no vacío. Luego se ordena F de la siguiente manera: decimos que $f \geq g$ si $D_f \supset D_g$ y $f(\alpha) = g(\alpha)$ para todo $\alpha \in D_g$ (es decir, $f \geq g$ si f es una extensión de g). Probar que eso da un orden parcial en F y que todo subconjunto totalmente ordenado tiene una cota. Usando Zorn deducir que hay un elemento maximal y concluir.

Ejercicio 1.30. Probar el *principio de Inducción transfinita*:

Sea $(X, >)$ un conjunto bien ordenado, y P una propiedad aplicable a los elementos de X. Supongamos que

1. El mínimo elemento de X verifica la propiedad P.
2. Si $y \in X$ y todo elemento x tal que $y > x$ verifica la propiedad P, entonces también y verifica P.

Entonces todo elemento de X verifica la propiedad P.

Ejercicio 1.31. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial y $X \subset V$ un conjunto linealmente independiente. Probar que existe una base (dicha de Hamel) $B \subset V$ de V (es decir un conjunto linealmente independiente que es un generador) que contiene a X. Con este resultado y algún otro que se pruebade modo similar, tenemos pruebas para los resultados vistos en álgebra lineal 1, para los cuales se dijo valían en general pero solo se probaron en el caso finito.

6. Ejercicios Optativos

Ejercicio 1.32 (Álgebra transfinita). Sean A y B dos conjuntos. Se definen

- $\#A + \#B = \#(A \cup B)$
- $\#A.\#B = \#(A \times B)$
- $\#A^{\#B} = \#\{f : B \to A\}$.

EJERCICIO 1.33. Sean A y B tales que B es infinito y $\#A \leq \#B$. Probar que

(I) $\#A + \#B = \#B$
Sugerencia: probar mediante el Lema de Zorn que todo conjunto infinito se escribe como unión disjunta de conjuntos numerables.
(II) $\#B.\#B = \#B$
Sugerencia: Sea $L = \{(E, f_E) : E \subset B, f_E : E \to E \times E \text{ biyectiva}\}$. Encontrar un elemento maximal (M, f) y probar que $B - M$ es finito.
(III) Si $A \neq \emptyset$ entonces $\#A.\#B = \#B$.

EJERCICIO 1.34. Sea $\#A = a, \#B = b$ y $\#C = c$. Probar que

(I) $(ab)^c = a^c b^c$
(II) $a^{(b+c)} = a^b + a^c$.
(III) $(a^b)^c = a^{bc}$.

EJERCICIO 1.35. 1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ para todos } a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Probar que si f es continua entonces f es lineal
2. Construir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satifaga (3) y que no sea continua en ningún punto.

Capítulo 2

Espacios topológicos

1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 2.1. Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X es una *topología* de X si se cumplen las siguientes propiedades:

1. El conjunto vacío y el conjunto X pertenecen a $\mathcal{T}$.
2. Si $A_1, \ldots, A_n$ pertenecen a $\mathcal{T}$, entonces $\cap_{j=1}^n A_j$ pertenence a T.
3. $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de subconjuntos de X tal que A_α pertenece a $\mathcal{T}$ para cada $\alpha \in I$, entonces $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ pertenece a $\mathcal{T}$.

Si $\mathcal{T}$ es una topología en X, decimos que el par $(X, \mathcal{T})$ es un *espacio topológico*. Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman los *(conjuntos) abiertos (de la topología)* $\mathcal{T}$.

Ejemplo 2.2. (1) Si X es un conjunto y $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, entonces $\mathcal{T}$ es una topología en X. Se llama la *topología discreta*. Es la "mayor" o "más fina" topología posible (ver ejercicio 2.1).

(2) Si X es un conjunto cualquiera, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ es una topología, llamada *topología indiscreta*. Es la "mínima" o "más gruesa" topología posible.

(3) En $\mathbb{R}^n$, si definimos $\mathcal{T}$ como el conjunto de todos los abiertos, entonces $\mathcal{T}$ es una topología, llamada la *topología usual* de $\mathbb{R}^n$. Veremos más adelante (en el capítulo Espacios Métricos, ver también ejercicio 2.2) que es la topología inducida por la distancia de $\mathbb{R}^n$.

(4) En un conjunto X cualquiera, consideramos la llamada *topología de los complementos finitos*: un subconjunto de X está en $\mathcal{T}$ si es vacío o su complemento es finito. Si X es finito, esta topología ya la vimos (¿cuál es?), pero si X es infinito, tenemos un nuevo ejemplo.

(5) En un conjunto X cualquiera, consideramos la llamada *topología de los complementos numerables*: un subconjunto de X está en T si es vacío o su complemento es numerable. Nuevamente, si X es finito (o infinito numerable). esta topología ya la vimos, pero cuando X no es numerable, estamos en un nuevo ejemplo.

Ejercicio 2.1 (Comparando topologías). Dado un conjunto X y dos topologías $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ en X, diremos que $\mathcal{T}$ es *más fina* o *más grnade* que $\mathcal{S}$ si todo abierto de $\mathcal{S}$ es abierto de $\mathcal{T}$.

(i) Observar que $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{S}$ sii $\mathcal{T}$ es más grande que $\mathcal{S}$ en el orden de la inclusión para el conjunto $\mathcal{P}(X)$.
(ii) Comparar las topologías discreta, indiscreta, de complementos finitos y de complementos numerables para un conjunto X cualquiera.
(iii) En $\mathbb{R}$, ¿cómo se compara la topología usal con las anteriores? ¿Y en $\mathbb{R}^n$?

Ejercicio 2.2 (Espacios métricos). Una *distancia* en un conjunto M es una función $d : M \times M \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ (el conjutno de los reales mayores o iguales a cero), tal que cumple las siguientes propiedades:

1. *simetría* $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in M$
2. $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in M$.
3. $d(x,y) = 0$ sii $x = y$.
4. *desigualdad triangular* $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,x)$ para todo $x, y, z \in M$.

Notaremos un espacio métrico con su distancia por (M, d).

(i) Observar que $\mathbb{R}^n$ con $d(x,y) = ||x-y||$ es una distancia.

(ii) En $\mathbb{R}^n$, la función $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, , donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, es una distancia.

(iii) En $\mathbb{R}^n$, la función $d_{max}(x,y) = \max_i \{|x_1 - y_i|\}$ es una distancia.

Dado un espacio métrico (M,d), $m \in M$ y $\varepsilon > 0$ un real positivo, la *bola abierta de centro m y radio ε* es el conjunto

$$B(m,\varepsilon) = \{x \in M : d(m,x) < \varepsilon\}$$

Un conjunto $A \subset M$ es *abierto* en M si para todo punto $a \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(m,\varepsilon) \subset A$.

(iv) Probar que la familia $\mathcal{T}$ de todos los conjuntos abiertos en un espacio métricos es una topología.

(v) Dibujar las bolas de centro $(0,0)$ y radio 1 en $\mathbb{R}^2$, para todas las distancias anteriores.

(vi) Inspirándose en los dibujos de la parte anterior, pobar que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es abierto con la distancia usual si y solo si lo es con cualquiera de las otras. Ver que esto sigue siendo cierto en $\mathbb{R}^n$.

Veamos ahora como otras definiciones usuales en los cursos de cálculo se puede generalizar al contexto de un espacio topológico cualquiera:

Definición 2.3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un conjunto $B \subset X$ se dice *cerrado* si su complemento es abierto. Por lo tanto se tiene que la unión de una cantidad finita de conjuntos cerrados es cerrada y la intersección de una cantidad arbitraria de cerrados es cerrada.

Diremos que V es *entorno* de un punto x de X si se cumple que $x \in A \subset V$ para algún abierto A. Si V es abierto, diremos que es un *entorno abierto* — un conjunto abierto es un entorno abierto de todos sus elementos.

Si $A \subset X$ es un conjunto:

- Un punto $x \in X$ es de *acumulación* de A si todo entorno (abierto) de x contiene algún punto de A, diferente de x.
- Un punto $x \in X$ es *interior* a A si existe un entorno (abierto) V de x que está contenido en A.
- Un punto $x \in X$ es *frontera o borde* de un subconjunto A de X si todo entorno (abierto) V de x intersecta a A y a A^c.

Recordemos que una *sucesión* en X es una función $f : \mathbb{N} \to X$, que notaremos (x_n) — no hay entonces que confundir una sucesión con su imagen, que puede ser por ejemplo un solo punto (la sucesión cosntante).

Una sucesión (x_n) converge a un punto $x \in X$ si dado cualquier entorno (abierto) V de x existe un n_0 tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$.

EJERCICIO 2.3.
1. En el ejemplo 2.2(1), suponiendo $X = \mathbb{R}$, hallar los puntos frontera del conjunto $[0, 1]$.
2. En el ejemplo 2.2(2), hallar los puntos de acumulación de X.
3. En $\mathbb{R}$ con la topología usual (Ejemplo 2.2(3)), hallar el conjunto de todos los puntos de acumulación de $\mathbb{Q}$ (los racionales) y de $\mathbb{Q}^c$.
4. Consideremos los números naturales con la topología del complemento finito (Ejemplo 2.2(4)). Hallar todos los puntos de acumulación de $\mathbb{N}$.
5. Sea X un conjunto con la topología de los complementos numerables (Ejemplo 2.2(5)). Determinar qué sucesiones son convergentes.

EJEMPLO 2.4. Si $A \subset B$, entonces claramente todo punto de acumulación de A lo es de B.

EJERCICIO 2.4. Sea X un espacio topológico. Probar las siguientes propiedades:

1. Un subconjunto A de X es abierto sii todos sus puntos son interiores.
2. Un subconjunto A de X es cerrado sii contiene a todos sus puntos de acumulación.
3. Un subconjunto A de X es cerrado sii contiene a todos sus puntos frontera.

EJERCICIO 2.5. Probar que en la topología discreta todos los conjuntos son abiertos y cerrados a la vez.

En la topología indiscreta todo abierto es cerrado y recíprocamente.

Un intervalo (a, b) es abierto en $\mathbb{R}$ con la topología usual, pero no es cerrado, y un intervalo $[a, b]$ es cerrado pero no abierto.

DEFINICIÓN 2.5. Sea A un subconjunto del espacio topológico X. Definimos la *clausura* de A como la intersección de todos los cerrados que contienen a A.

Observe que la clausura de A es un conjunto cerrado puesto que la intersección de cerrados es cerrada. Por lo tanto es el mínimo cerrado que contiene a A. Se denota $\overline{A}$.

Definición 2.6. Sea A un subconjunto del espacio topológico X. Defininimos el *interior* de A como la unión de todos los abiertos contenidos en A.

Observe que el interior de A es un conjunto abierto. Por lo tanto es el máximo abierto contenido en A. Se denota A°.

Definición 2.7. Sea A un subconjunto del espacio topológico X. El conjunto de puntos frontera de A se llama *frontera* o *borde* de A y se denota ∂A.

Teorema 2.8. *Sea A un subconjunto del espacio topológico X. Entonces*

(1) el conjunto A es cerrado sii coincide con su clausura. En particular, la clausura de A es la unión de A con el conjunto de puntos de acumulación de A.

(2) el conjunto A es abierto sii coincide con su interior. En particular, el interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A.

Demostración: Es una aplicación directa de las definciciones y el Ejercicio 2.4. □

Corolario 2.9. *Si $A \subset B$ son subconjuntos de un espacio topológico, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Demostración (a completar): Es una consecuencia directa de la definición. Alternativamente, se puede probar usando el Ejemplo 2.4. □

Ejercicio 2.6. Sea X un espacio topológico

(1) Probar que la clausura de la unión de una cantidad finita de conjuntos es igual a la unión de las clausuras.
(2) Si consideramos una unión infinita no siempre es cierto que la clausura de la unión es la unión de las clausuras: sólo vale una inclusión, ¿cuál? Dar un ejemplo donde la desigualdad es estricta.
(3) Probar que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ y mostrar que la desigualdad puede ser estricta.
(4) Probar que se cumplen: $\left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^\circ$ y $\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c$.

Definición 2.10. Un espacio topológico es de *Hausdorff* (se llama también T_2) si se cumple que para todo par de puntos distintos x e y, existen entornos (abiertos) V de x y W de y tales que $V \cap W = \emptyset$. Por ejemplo, los espacios métricos son Hausdorff, el ejemplo 2.2 (1) también, mientras que los ejemplos 2.2 (2) (4) y (5) no a menos que X tenga ¿cuántos? elementos.[1]

[1] La cardinalidad varía en cada ejemplo, y el ejemplo (2) es tramposo...

EJERCICIO 2.7. Probar que si X es un espacio topológico de Hausdorff, entonces una sucesión converge a lo más, a un punto. Usar el ejemplo 2.2(2), para ver que una sucesión puede converger a muchos puntos. ¿Se te ocurre algún otro ejemplo?

EJERCICIO 2.8. Probar que si un espacio es Hausdorff, entonces todo conjunto formado por un sólo punto es cerrado. Investigar el recíproco.

EJERCICIO 2.9. Sea M un espacio métrico. Probar que un punto x está en la clausura de un subconjunto A de M sii existe una sucesión en A que converge a x.

En un espacio topológico cualquiera X, si una sucesión (x_n) está contenida en un subconjunto A de X y es convergente a un punto x, entonces $x \in \overline{A}$. Pero es posible que un punto esté en la clausura de un conjunto A y no exista una sucesión en A que converge a x (usar el ejemplo 2.2(5)).

2. Bases, axiomas de numerabilidad.

En esta sección veremos cómo generar topologías a partir de otras conocidas.

DEFINICIÓN 2.11. Decimos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ es *base* de una topología de un conjunto X si se cumplen:

1. La unión de todos los elementos de $\mathcal{B}$ es X.

2. Dados B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}$ y un punto $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Notar que si $\mathcal{B}$ es una base de una topología de X y se define $\mathcal{T}$ como el conjunto de todas la uniones de elementos de $\mathcal{B}$ más el vacío, entonces $\mathcal{T}$ es una topología de X, que se llama la *topología generada por* $\mathcal{B}$. La topología $\mathcal{T}$ es la mínima que contiene a todos los elementos de $\mathcal{B}$. También se dice en este caso que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$.

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, el tener una base para la topoogía $\mathcal{T}$ (es decir una subfamilia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tal que es una base y genera a la topología $\mathcal{T}$), permite trabajar más cómodamente a la hora de construir entornos abiertos de puntos: en efecto, como todo abierto se escribe como unión de elementos de la base, si $x \in V$ es un entono abierto, existe $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subset V$.

EJEMPLO 2.12.
1. El conjunto de todos los intervalos abiertos es base de la topología usual de $\mathbb{R}$.
2. Más en general, si M es un espacio métrico, el conjunto de todas las bolas abiertas es base de la topología asociada a la métrica.
3. En un espacio métrico, el conjunto de todas las bolas abiertas de radio racional es base de la topología métrica.
4. Sea $\mathcal{B}_r$ el conjunto de todos los intervalos $(a, b]$, donde a y b son reales, $a < b$. Es base de una topología τ_r de $\mathbb{R}$.

Sea $\mathcal{B}_l$ el conjunto de todos los intervalos $[a, b)$, donde a y b son reales, $a < b$. Es base de una topología τ_l de $\mathbb{R}$.

Un primer ejemplo de aplicación de esta idea para formar nuevas topologías a partir de una dada, es la topología producto:

DEFINICIÓN 2.13. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Sea $\mathcal{B}_{X\times Y}$ el conjunto de los subconjuntos $A \times B \subset X \times Y$ tales que $A \in \mathcal{T}_X$ y $B \in \mathcal{T}_Y$:

$$\mathcal{B}_{X\times Y} = \left\{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathcal{T}_X, B \in \mathcal{T}_Y\right\}$$

Entonces $\mathcal{B}_{X\times Y}$ es base de una topología de $X \times Y$ que llamaremos la *topología producto* de los espacios X e Y. Observar que $\mathcal{B}_{X\times Y}$ no es una topología en general ¿Se te ocurre un ejemplo?

OBSERVACIÓN 2.14. Veremos más adelante que la construcción de la topología producto cumple propiedades interesantes (cuando veamos funciones continuas!). Sin embargo, en otros contextos, se pueden considerar otras topologías en el producto (en algún momento veremos esto con más detalle).

EJERCICIO 2.10. Demostrar que si se considera a $\mathbb{R}$ con la topología usual, entonces en $\mathbb{R}^2$ la topología usual y la topología producto coinciden.

EJERCICIO 2.11. Si tenemos conjuntos X, Y, Z entonces el producto $X \times Y \times Z$ se puede ver como $(X \times Y) \times Z)$ o $X \times (Y \times Z)$. De este modo, si X, Y, Z son espacios topológicos, entonces podemos construir una base de una topología en $X \times Y \times Z$, de dos maneras, pero ambas dan la misma topología.

Este resultado vale para una cantidad finita de espacios topológicos $X_1, \ldots, X_n$.

La construcción de la topología del espacio producto muestra la utilidad de la noción de base de una topología. Ahora bien, la idea de base no resuelve completamente el problema siguiente:

Dada una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X, ¿existe la "menor topología que contiene a $\mathcal{F}$?.

Complemtemos entonces la respuesta a esta pregunta:

TEOREMA 2.15. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ una subfamilia, tal que $\bigcup_{U\in\mathcal{F}} U = X$. Entonces la familia de las intersecciones finitas*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \left\{\cap_{i=1}^{n} U_i : n \in \mathbb{N}\,,\ U + i \in \mathcal{F}\right\}$$

es una base de una topología.

DEMOSTRACIÓN: En efecto, la intersección de dos miembros de $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ pertenece nuevamente a $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ $\square$

Observación 2.16. El Teorema 2.15 puede mejorarse del siguiente modo: dada una familia cualquiera $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, consideramos $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{X\}$ y obtenemos una fmalia en las hipótesis del teorema. Observemos que si $X = \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$, entonces las topologías construídas a partir de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ coinciden.

El teorema anterior nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.17. Sea $(X, \mathcal{T})$ u nespacio topológico. Una subfamila $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ es una *subbase* si familia de las intersecciones finitas $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$.

Observemos que si $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$ entonces es una subbase, ya que las intersecciones finitas de abiertos en $\mathcal{B}$ son abiertos en X — y si a una base de $\mathcal{T}$ le agregamos abiertos de $\mathcal{T}$ el nuevo conjunto sique siendo una base de $\mathcal{T}$.

Ejercicio 2.12. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ es una subbase si y sólo si todo miembro de $\mathcal{S}$ es unión de intersecciones finitas de miembros de $\mathcal{S}$.

Definición 2.18. Un espacio topológico satisface el *segundo axioma de numerabilidad* si existe una base numerable de la topología de X.

Ejercicio 2.13. *(a)* Probar que $\mathbb{R}$ con la topología usual satisface el segundo axioma de numerabilidad.

(b) Probar que el producto de dos espacios topológicos que satisfacen el segundo axioma también lo satisface.

(c) Averiguar si lo satisface cuando se considera en $\mathbb{R}$ la topología generada por la base $\mathcal{B}_r$ del Ejemplo 2.12(4) de arriba.

Definición 2.19. Un conjunto A es *denso* en X si la clausura de A es X.

Por ejemplo los racionales son densos en $\mathbb{R}$ con la topología usual, y también con las topologías del Ejemplo 2.12(4) de arriba.

Ejemplo 2.20. Si x es un punto del espacio topológico X tal que $\{x\}$ es un conjunto abierto (un *punto abierto de* X), entonces todo conjunto A denso en X tiene que contener a x. En efecto, x no puede ser punto de acumulación de A, por lo que tiene que pertencer a A.

Dado un espacio topológico X, un conjunto denso $D \subset X$ permite entonces "aproximarnos" a todos los elementos de X a través de D.

Por ejemplo, su pudiéramos dar una noción de aproximar una función por polinomios....

Definición 2.21. Un espacio topológico es *separable* si contiene un subconjunto A numerable y denso en X.

Ejercicio 2.14. (i) Probar que un espacio topológico que satisface el segundo axioma es separable.

(ii) Demostrar que si M es un espacio métrico entonces segundo axioma y separable son equivalentes.

(iii) Sin embargo hay espacios topológicos separables que no satisfacen el segundo axioma...

(iv) Probar que si X es segundo axioma, entonces todo conjunto no numerable tiene punto de acumulación.

Es también posible generar una topología a partir de un concepto de entorno, este procedimiento es un poco engorroso pero es muy práctico a la hora de decidir cuál es la topología que conviene a determinado fin.

Definición 2.22. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y x un punto de X. El *sistema de entornos (abiertos)* de x, denotado $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(x)$, es el conjunto de todos los entornos abiertos de x. Un subconjunto $\mathcal{V}$ de $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(x)$ es *una base de entornos* de x si para todo $U \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(x)$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset U$.

Teorema 2.23. *Sea X un conjunto, y suponga que para cada $x \in X$ se tiene un conjunto no vacío $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ de partes de X tal que:*

1. *$x \in U$ para cada $U \in \mathcal{N}(x)$.*
2. *Si U y V son elementos de $\mathcal{N}(x)$, entonces existe $W \in \mathcal{N}(x)$ tal que $W \subset U \cap V$.*

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de los $A \subset X$ tales que para todo $x \in A$ existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U \subset A$. Entonces $\mathcal{T}$ es una topología de X. Además, para cada x se cumple que $\mathcal{N}(x)$ es una base del sistema de entornos de x para esta topología.

Demostración: La prueba peude ser un poco engorrrosa de escribir, pero igual queda como ejercicio! □

El teorema 2.23 nos da una idea que puede resultar interesante: trabajar con definiciones de modo "local", es decir a través de los entornos de los puntos. Si bien el pasaje de lo global a lo local es bastante fácil, el pasaje de propiedades locales ("en todo punto") a "lo global" no es automático (en análisis hasta tiene un nombre: el problema del pasaje local-global).

Definición 2.24. Un espacio satisface el *primer axioma de numerabilidad* si todo punto tiene una base de entornos numerable.

Ejercicio 2.15. Demostrar que todo espacio que satisface el segundo axioma también satisface el primero.

Sin embargo, todo espacio métrico satisface el primero, pero no necesariamente el segundo (considere la métrica discreta $d(x, y) = 0$ si $x = y$, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ en un conjunto no numerable X).

Ejercicio 2.16. Probar que en un espacio que cumple el primer axioma se tiene lo siguiente: x pertenece a la clausura de un conjunto A sii existe una sucesión en A que converge a x. Comparar este resultado con el Ejercicio 2.9.

La noción de "subpespacio topológico" o "topología inducida" es la esperable:

DEFINICIÓN 2.25. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topoloógico y Y un subconjunto de X. Se define la *topología relativa de* Y *como subespacio de* (X, T) o *topología inducida en* Y *por* $\mathcal{T}$ como sigue: $U \subset Y$ es abierto en Y si existe V abierto en X tal que $U = V \cap Y$.

Decimos que $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ es un *subespacio topológico* de $(X, \mathcal{T})$.

EJERCICIO 2.17. Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff, entonces todo subespacio también lo es.

¿Qué pasa con los axiomas de numerabilidad?

TEOREMA 2.26. *El producto de una familia* $\{X_i\}_{i \in I}$ *de espacios topológicos Hausdorff es Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $x, y : I \to \cup X_i$ dos puntos distintos. Entonces existe $i \in I$ tal que $x(i) \neq y(i)$. Consideremos $U, V \subset X_i$ abiertos disjuntos tales que $x(i) \in U$ $y(i) \in V$. Entonces $x \in p_i^{-1}(U)$ e $y \in p_i^{-1}(V)$, con $p_i^{-1}(U) \cap p_i^{-1}(V) = \emptyset$. $\square$

Capítulo 3

La categoría de los espacios topológicos

1. Funciones continuas: los morfismos de la categoría de los espacios topológicos

Toda vez que tenemos definidos objetos matemáticos (para simplificar, digamos que tenemos un conjunto con ciertas estructuras adicionales), interesa definir los *morfismos* entre ellos (en nuestro caso: funciones entre los objetos); si estamos interesados en las objetos *junto con* las estructuras que definimos en ellos, tenemos interés en considerar solamente las funciones que guardan algún tipo de relación con las estructuras. Por ejemplo, dados dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales V y W, nos interesan las transformaciones lineales entre ellos; dadas dos superficies $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ diferenciables del espacio, nos interesan las funciones $f : S \to S'$ diferenciables (estas nociones se ven en un curso de cálculo en superficies). Los *objetos* (espacios vectoriales, superficies, grupos, ...) se estudian entonces junto a sus *morfismos* (resp. transformaciones lineales, funciones diferenciables, morfismos de grupos, ...). La noción de *categoría* es la formalización de esta idea (objetos relacionados por sus morfismos): la teoría de categorías brinda un marco formal, en el que, por ejemplo, muchas propiedades que normalmente se prueban en los cursos básicos resultan de probar la existencia en la categoría dada de ciertas construcciones, y luego utilizar resultados generales válidos para esa construcción, enunciados en el caso particular bajo estudio.

En el caso de dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$, buscamos entonces funciones relaciones las topologías $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}_Y$. Este tipo de funciones ya lo hemos encontrado en los cursos de cálculo: son las *funciones continuas*, que deberemos definir en este marco más general.

Definición 3.1. Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es continua si $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ para cada $U \in \mathcal{T}_Y$ (si "la preimagen de un abierto es abierta").

En realidad, deberíamos usar la notación $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$, ya que la topologías consideradas son realmente parte de los datos. Para ver que esto efectivamente es así, consideremos dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ en el mismo conjunto X; entonces la función identidad $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ es continua sii $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$. Sin embargo por comodidad hablaremos de una función continua $f : X \to Y$ asumiendo conocidas las topologías de X e Y — cuando pueda dar lugar a confusión, usaremos la notación "correcta"y escribiremos

$f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$, explicitar con qué topologías estamos considerando dominio y codominio.

Ejemplo 3.2. (1) Es fácil ver que si $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ son dos espacios topológicos e $y \in Y$ es un punto cualquiera, entonces la función constante $c_y : X \to Y$, $c_y(x) = y$ es continua.

(2) Claramente, la composición de funciones continuas es continua, y la restricción de funciones continuas es continua (formular y probar estos dos enunciados).

(3) Sea X un conjunto, y consideremos en él la topología indiscreta: entonces las únicas funciones continuas de dominio X son las constantes, y toda función con codominio X es continua.

(4) Consideremos ahora un conjunto X con la topología discreta. Entonces toda función con dominio X (y codominio un espacio topológico, por supuesto) es continua.

Cuando X es el codominio, la situación no es tan fácil de describir, pero digamos simplemente que una función $f : Y \to X$ es continua si y solamente si todas las “fibras” $f^{-1}(x)$ con abiertas y cerradas a la vez (porque $\{x\}$ es un conjunto abierto y cerrado de X). Necesitamos entonces que o bien la topología de Y tenga muchos conjuntos abiertos y cerrados a la vez, o que la función f tenga pocas fibras : por ejemplo, ya vimos que en la topología indiscreta el único conjunto no vacío abierto y cerrado es X, pero lo mismo pasa en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Así como en el caso de las funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la noción de función continua se puede ver “localmente”, tenemos una noción de función “continua en un punto”.

Definición 3.3. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es continua en $x \in X$ si para todo entorno (abierto) V de $f(x)$ existe un entorno (abierto) U de x tal que $f(U) \subset V$.

Veamos ahora como ejercicio algunas equivalencias:

Ejercicio 3.1. Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$. Son equivalentes:

1. f es continua.
2. f es continua en x para todo $x \in X$.
3. $f^{-1}(C)$ es cerrado en $\mathcal{T}_X$ para cada C cerrado en $\mathcal{T}_Y$.
4. Para todo subconjunto $A \subset X$ se cumple que $\overline{f(A)} \supset f(\overline{A})$.
5. Si $\mathcal{B}$ es una subbase de $\mathcal{T}_Y$, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto para todo $U \in \mathcal{B}$.

Probar con ejemplos de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que no es cierto que si f es continua entonces $f(A)$ es abierto para cada A abierto, ni $f(B)$ es cerrado para cada B cerrado.

Ejercicio 3.2. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ dos espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función, y $x \in X$ un punto de X. En este ejercicio se estudia la relación entre las siguientes afirmaciones:

1. f es continua en x
2. Para toda sucesión $\{x_n\}$ en X que converge a x, se cumple que la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$.

(i) Probar que 1 implica 2.
(ii) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ cumple el primer axioma de numerabilidad, entonces 2 implica 1.
(iii) Probar que no siempre 1 y 2 son equivalentes, usando por ejemplo la función identidad que va de $(X, \mathcal{T})$ a $(X, \mathcal{D})$ donde X es un conjunto no numerable y donde $\mathcal{T}$ es la topología de los complementos numerables y $\mathcal{D}$ la discreta.

Ya vimos que las funciones constantes son continuas. Dado que la continuidad es una propiedad local, podemos mejorar un poco más ese resultado.

Definición 3.4. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico. Una función $f : X \to Y$ es *localmente constante* si para todo $x \in X$, existe un entorno abierto $x \in U$ tal que $f|_U : U \to Y$ es constante (es decir, $f(z) = f(x)$ para todo $z \in U$.

Ejercicio 3.3. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función.

(a) Probar que f es localmente constante si y sólo si las fibras $f^{-1}(y)$ son abiertas para todo $y \in Y$ — como el vacío es abierto, no importa si $y \in \mathrm{Im}(f)$.
(b) Probar que si f es localmente constante, entonces las fibras son también cerradas.
(c) Suponiendo ahora que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un espacio topológico probar que si f es localmente constante, entonces f es continua.
(d) Si $\mathcal{T}_Y$ es la topología discreta, entonces f es continua si y sólo si es localmente constante — esto es una reformulación de algo que ya vimos.
(e) Si $\mathcal{T}_Y$ es tal que todos los puntos son cerrados (por ejemplo cuando es Hausdorff), entonces toda función continua es tal que sus fibras son cerradas, pero no toda función continua entre dos espacios topológicos es localmente constante: la identidad $\mathrm{id}_X : X \to X$ es continua pero no es localmante constante a no ser que $\mathcal{T}_X$ sea ¿qué función?

Veamos a continuación qué pasa con la inversa de funciones biyectivas.

Definición 3.5. Un *homeomorfismo* (de *homeo* = similar, *morfos* = forma) entre dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es una función continua $f : X \to Y$ que es biyectiva y con inversa continua. En este caso, decimos que los espacios son *homeomorfos*.

En otras palabras, dar un homeomorfismo entre X e Y es dar una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que tanto f como f^{-1} son continuas.

Observación 3.6. Es claro que cuando f es un homeomorfismo un conjunto U es abierto en X sii su imagen es un abierto en Y. Dos espacios homeomorfos son exactamente el mismo objeto a los ojos de un topólogo.

Por ejemplo, si consideramos en todos los casos la topología usual de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$, una recta es homeomorfa a una parábola, una elipse homeomorfa a una circunferencia. La composición de homeomorfismos es también un homeomorfismo, por lo que se tiene que la relación "X e Y son homeomorfos" es de equivalencia.

Ejemplo 3.7 (La inversa de una función biyectiva continua no es necesariamente continua). Es importante observar que aunque $f : X \to Y$ es una función continua biyectiva, $f^{-1} : Y \to X$ *no tiene por qué* ser continua: considere por ejemplo X con la topologías discreta $\mathcal{D}$ e indiscreta $\mathcal{I}$. Entonces $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{D}) \to (X, \mathcal{I})$ es siempre continua, pero $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{I}) \to (X, \mathcal{D})$ no lo es, a menos que $X = \cdots$. Como $\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X$, tenemos pronto nuestro "contra-ejemplo".

El ejemplo anterior puede hacer creer que este es un problema de "topologías raras", pero no lo es:

Ejercicio 3.4. Consideremos los conjuntos $X = [0,1] \cup (2,3]$ e $Y = [0,2]$ con la topología usual, y la función $f : X \to Y$ definida de la siguiente manera: $f(x) = x$ si $x \in [0,1]$, y $f(x) = x - 1$ si $x \in (2,3]$. Probar que f es biyectiva de X en Y y que es continua, pero que su inversa no es continua.

2. Espacio producto

Sea X un conjunto, $f : X \to Y$ una función, y $\mathcal{T}$ una topología en Y. Note que si se define $\mathcal{T}_f = \left\{ f^{-1}(Z) \ : \ Z \in \mathcal{T} \right\}$ se obtiene una topología en X. Es la mínima topología en X que hace de f una función continua: si $\mathcal{T}_X$ es una topología tal que f es continua, necesitamos que $f^{-1}(Z) \in \mathcal{T}_X$ por la definición de continuidad.

No puede hacerse lo mismo cuando son varias funciones $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, donde cada Y_α se considera con una topología τ_α: La colección $\mathcal{S}$ de todos los conjuntos de la forma $f_\alpha^{-1}(A_\alpha)$, donde cada A_α es un abierto en Y_α no es una topología, y ni siquiera es una base de una topología: por ejemplo fíjese en cual es la clase $\mathcal{S}$ resultante cuando se consideran las funciones $f_i : \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, para $i = 1, 2$ siendo $f_i(x_1, x_2) = x_i$ y donde $\mathbb{R}$ se toma con la topología usual.

Resolver este problema no es tan difícil: la colección $\mathcal{B}$ de las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es base de una topología $\mathcal{T}$, que resulta ser la mínima topología en X para la cual todas las f_α son continuas (se prueba de modo análogo al caso de una sola función).

Teniendo en cuenta estas observaciones, podemos definir una topología en el producto de una familia de espacios topológicos.

DEFINICIÓN 3.8. Sea $\big(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\big\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos, indexada por un conjunto I. Vimos en el Capítulo 1 que el producto de los conjuntos X_α se define como

$$X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha = \big\{f : I \to \bigcup_\alpha X_\alpha \ : \ f(\alpha) \in X_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I\big\}.$$

La *proyección canónica sobre el α-ésimo eje* $p_\alpha : X \to X_\alpha$ se define así : $p_\alpha(f) = f(\alpha)$, para cada $f \in X$.

Definimos el *espacio topológico* producto como el producto de los conjuntos $\prod_\alpha X_\alpha$ junto con la *topología producto*, definida como la como la mínima topología que hace continuas a todas las funciones p_α.

Veamos ahora formalmente los comentarios que hicimos en la introducción.

PROPOSICIÓN 3.9. *Sea $\big\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\big\}$ una familia de espacios topológicos. Consideremos las familias*

$$\mathcal{F}_i = p_i^{-1}(\mathcal{T}_i) = \big\{p_i^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}_i\big\}$$

Entonces la familia $\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}_i$ es una subbase de la topología producto.

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que probar que

(i) La familia $\mathcal{F}$ es un cubrimiento de $\prod X_i$.

(ii) Todo abierto U de $\prod X_i$ es unión de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{F}$. Equivalentemente, tenemos que probar que la topología generada por $\mathcal{F}$ es la mínima topología que hace a las proyecciones continuas.

Para probar (i) observemos que $\prod X_i = p^{-1}(X_i)$ para todo i (alcanza con tomar un solo i para probar la afirmación).

Para probar (ii) observemos que $\mathcal{F}_i$ es la mínima topología p_i continua. Luego toda topología $\mathcal{T}$ que haga continua a p_i tiene que contener a $\mathcal{F}_i$. Luego, si $\mathcal{T}$ hace continuas todas las proyecciones, entonces $\mathcal{T}$ tiene que contener $\mathcal{F}$, y como como la intersección finita de abiertos es abierta, $\mathcal{T}$ tiene que contener a la topología generada por $\mathcal{F}$. $\square$

EJERCICIO 3.5. Probar que si $X = \prod_\alpha X_\alpha$ tiene la topología producto, entonces las funciones p_α son abiertas, es decir, llevan abiertos en abiertos.

Probar también que una función de un espacio Z en X es continua sii para todo α se cumple que $p_\alpha \circ f : Z \to X_\alpha$ es continua.

El Ejercicio 3.5 está relacionado con la llamada *propiedad universal del producto*.[1]

Antes de verla, veamos en un ejercicio la forma de los abiertos del espacio topológico producto.

Ejercicio 3.6. Sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ una familia de espacios topoógicos.

(1) Sea $U_j \in X_j$ un abierto. Consideremos la familia $\{(Y_i, \mathcal{S}_i) : i \in I\}$ la familia de espacios topológicos dada por

$$(Y_i, \mathcal{S}_i) = \begin{cases} (X_i, \mathcal{T}_i) & \text{si } i \neq j \\ (U_j, \mathcal{T}_j|_U) & \text{si } i = j \end{cases}$$

en donde $\mathcal{T}_j|_U$ es la topología inducida por $\mathcal{T}_j$ en U_j.

(a) Observar que si $f : I \to \bigcup_i Y_i$, entonces podemos pensarla como una función $\widetilde{f} : I \to \bigcup_i X_i$; probar que si $f \in \prod_i Y_i$, entonces $\widetilde{f} \in \prod_i X_i$. Probar que la función $\varphi_{U_j} : \prod_i Y_i \to \prod_i X_i$ dada por $\varphi(f) = \widetilde{f}$ es inyectiva, con imagen $p_j^{-1}(U_j)$.

(b) Probar que $\varphi_{U_j} : \prod_i Y_i \to \prod_i X_i$ es una función continua, abierta.

(2) Generalizar la parte anterior a una cantidad finita de abiertos $U_{j_t} \in X_{j_t}$, $j_t \in I$, $t = 1, \ldots, n$, describiendo el abierto $p_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \cdots \cap p_{j_n}^{-1}(U_{j_n})$.

(3) Probar que $U \subset \prod_i X_i$ es abierto si y sólo si es de la forma de $p_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \cdots \cap p_{j_n}^{-1}(U_{j_n})$, con $U_{j_t} \subset X_{j_t}$ abierto.

Teorema 3.10 (Propiedad universal del producto). *Sea $\big(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\big\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos, indexada por un conjunto I. El espacio topológico producto cumple la siguiente* propiedad universal*: Sea $\{f_\alpha : Z \to X_\alpha\}$ una familia de funciones continuas. Entonces existe una única función continua $f : Z \to \prod_\alpha X_\alpha$ tal que $p_\alpha \circ f = f_\alpha$ — en otras palabras, los siguientes diagramas son conmutativos para todo $\alpha \in I$:*

$$\begin{tikzcd} & \prod_\alpha X_\alpha \arrow[d, "p_\alpha"] \\ Z \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

Demostración: Consideramos la función $f : Z \to \prod_\alpha X_\alpha$ dada por $f(y)(\alpha) = f_\alpha(y)$. Es fácil ver que es la única función tal que $p_\alpha \circ f = f_\alpha$; la prueba que f es continua es una parte del Ejercicio 3.5. $\square$

[1]La propiedad universal del espacio producto, tal como está formulada en el teorema 3.10, es generalizable al contexto de otras categorías, como mencionamos anteriormente, es de esperar entonces que varias de las propiedades del espacio topológico producto puedan considerarse como casos particulares de teoremas generales de la teoría de categorías; el ejercicio 3.8 es un ejemplo.

Ejercicio (difícil) 3.7. Sea X el conjunto de todas las funciones de $[0,1]$ en sí mismo, es decir, $X = [0,1]^{[0,1]}$. Como espacio producto tiene una topología producto, donde en cada $[0,1]$ se considera la topología usual de $\mathbb{R}$. Describir los abiertos de la base. Probar que no satisface el primer axioma de numerabilidad. Probar que es Hausdorff. Probar que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge según esta topología sii converge puntualmente.

¡Nótese que este ejercicio puede generalizarse a otros productos!

Ejercicio opcional 3.8 (Unicidad del producto). Sea $\big(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\big\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos, indexada por un conjunto I. Sea Y un espacio topológico que cumple la propiedad universal del producto, es decir existen funciones continuas $q_\alpha : Y \to X_\alpha$ tales que para toda familia de funciones continuas $\{f_\alpha : Z \to X_\alpha$, existe una única función $f : Z \to Y$ tal que $q_\alpha \circ f = f_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Entonces existe un único homeomorfismo $\varphi : X \to Y$ tal que $q_\alpha \circ \varphi = p_\alpha$ para todo $\alpha \in I$ (por lo que $q_\alpha = p_\alpha \circ \varphi^{-1}$).

Ejemplo 3.11. En el caso de dos espacios topológicos $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, observemos que si $A_i \in \mathcal{T}_i$, entonces $A_1 \times A_2 = (A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2) = p_1^{-1}(A_1) \cap p_2^{-1}(A_2)$. Tenemos entonces que la topología generada por los abiertos de la forma $A_1 \times A_2$ es la topología generada por $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

3. Espacio cociente

Dadas una función sobreyectiva $f : X \to Y$, y una topología $\mathcal{T}$ en X, se define una topología en Y, declarando que U es abierto si se cumple que $f^{-1}(U)$ está en $\mathcal{T}$. Es claro que se obtiene una topología en Y, y que es la máxima topología en Y que hace que f sea continua.[2] Esta topología se llama *topología cociente* (bien dicho sería la topología cociente respecto de f y la topología $\mathcal{T}$ en X) — en el Ejercicio 3.10 veremos la razón de este nombre.

El siguiente ejercicio es un buen comienzo para entender la idea detrás de la topología cociente.

Ejercicio 3.9. Sea f una función sobreyectiva entre espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Si f es continua y abierta, entonces la topología $\mathcal{T}_Y$ de Y es la topología cociente.

Daremos más adelante un ejemplo de una función continua $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$, de modo que $\mathcal{T}_Y$ es la topología cociente, pero f *no* es una función abierta (Ejemplo 3.14).

El siguiente ejercicio nos indica (al igual que el ejercicio 3.8 respecto al producto) que la topología cociente cumple alguna "propiedad universal".

[2] Como vimos en clase, la hipótesis de sobreeyctividad no es necesaria para la construcción de la máxima topología que hace a F continua. Sin embargo, el caso sobreyectivo tiene otras particularidades, que son el foco de esta sección.

Ejercicio 3.10. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. Consideremos la topología cociente $\mathcal{T}_Y$. Entonces una función $g : Y \to Z$, donde $(Z, \mathcal{T}_Z)$ es un espacio topológico, es continua sii $g \circ f$ es continua.

El nombre de topología cociente proviene del siguiente hecho: Sea X un espacio topológico y R una relación de equivalencia en X. Entonces tiene sentido considerar en el conjunto cociente la topología cociente respecto de la proyección canónica $\pi : X \to X/R$. Por otro lado, como vimos en el ejercicio 1.12, una función sobreyectiva $f : X \to Y$ produce una relación de equivalencia R en X, dada por $x\ R\ y$ si $f(x) = f(y)$, para la que $f : X \to Y$ resulta la proyección canónica en el cociente.

El ejercicio siguiente (fácil) muestra explícitamente cómo son los abiertos del cociente.

Ejercicio 3.11. Probar que un subconjunto A de X/R es abierto en la topología cociente si y sólo si $\cup_{[x]\in A}[x]$ es abierto en X.

Ejercicio 3.12. Probar que si el espacio cociente X/R es de Hausdorff, entonces R es un subconjunto cerrado del espacio producto $X \times X$.

Antes de ver algunos ejemplos que muestran la "utilidad" de la construcción del espacio cociente, veamos si propiedad universal.

Teorema 3.12 (Propiedad universal del cociente). *Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Sea $f : X \to Z$ una función continua (obviamente, necesitamos que Z sea un espacio topológico), constante en las clases de equivalencia. Entonces existen una única función continua $\overline{f} : (X/\sim) \to Z$, tal que $\overline{f} \circ \pi = f : X \to Z$, en donde $\pi : X \to X/\sim$ es la proyección canónica — en otras palabras, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración: Consideramos la (única) función $\overline{f}$ dada por la propiedad universal del cociente (ver 1.12), y aplicamos el Ejercicio 3.10 para ver que es continua. □

Ejercicio 3.13 (Unicidad del cociente). Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Sea $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espacio topológico y $p : X \to Y$ una función continua constante en las clases de equivalencia tal que para toda función continua constante en las clases de equivalencia $f : X \to Z$, existe una única función continua $\overline{f} : Y \to Z$ tal que $\overline{f} \circ p = f$. Entonces:

(1) Existe un homeomorfismo $\varphi : X/\sim \to Y$ tal que $\varphi \circ \pi = p$ (luego $\pi = \varphi^{-1} \circ p$).
(2) En particular, observar que p es necesariamente sobreyectiva.

Ejercicio 3.14. (1) Sea $f : X \to Y$ una función tal que $\overline{\mathrm{Im}(f)} \neq Y$. Entonces existe una función $g : Y \to Z$ que no es continua pero tal que $g \circ f$ si lo es.

(2) Dar un ejemplo de una función continua sobreyectiva $f : X \to Y$ y una función $g : Y \to Z$ que no es continua, tales que $g \circ f$ es continua (obviamente, la topología que tiene Y no puede ser la topología cociente para f).

Ejemplo 3.13. Considemos en $\mathbb{R}^2$ la relación de equivalencia dada por $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ si $x_1 x_2 = y_1 y_2$.

Entonces las clases de equivalencia de $\sim$ son las hipérbolas $xy = c$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y la unión de los ejes coordenados.

Si consideramos la recta vertical por $(1, 0)$, que notamos ℓ, cada clase de equivalencia corta a la recta en exactamente un punto, y tenemos que $\rho : \mathbb{R}^2 \to \ell$ dada por $\rho(x, y) = (1, xy)$ es tal que las fibras son las clases de equivalencia.

lObservemos que los intervalos abiertos de la recta ℓ, es decir los conjuntos de la forma $I = \big\{(1, t) : a < t < b\big\}$, son por un lado una base de la topología inducida en ℓ por la topología de $\mathbb{R}^2$, y por otro son abiertos en la topología cociente dada por ρ. Entonces la topología inducida está c ontenia en la topología cociente. Pero si $U \subset \ell$ es abierto en la topología cociante, entonces $\rho^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$, de donde $U = \ell \cap \rho^{-1}(U)$ es abierto también para la la topología inducida. Tenemos entocnes que ambaws topología (la inducida y la cociente) coinciden.

Deducimos entonces que ℓ es homoemorfo al cociente $\mathbb{R}^2/\sim$, y que podemos tomar un homoemofismo $h : \mathbb{R}^2/\sim \to \ell$ de modo que $\rho = h \circ \pi : \mathbb{R}^2 \to \ell$ — en otras palabras, podemos considerar a $\rho : \mathbb{R}^2 \to \ell$ como la proeycci on canónica en el cociente.

El Ejercicio 3.11 nos permite intuir cómo construir el contraejemplo que mencionamos en el Ejercicio 3.9

Ejemplo 3.14. Consideremos en el conjunto $X = [0, 1] \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$, la topología inducida.

Entonces $U \subset X$ es abierto si y sólo si es de una de la forma V o $V \cup \{2\}$, donde $V = [0, a)$, $(a, 1]$ o (a, b), con $a, b \in [0, 1]$.

Consideremos en X la relacion de equivalencia generada por $1 \sim 2$, es decir $x \sim x$ para todo $x \in X$, y $1 \sim 2$, $2 \sim 1$.

Entonces tenemos que el espacio cociente $X/\sim$ es homemorfo a $[0, 1]$, donde vemos a la proeycción canónica como $\pi(x) = x$ si $x \in [0, 1]$, $p(2) = 1$.

Observemos ahora que $\{2\}$ es abierto en X, pero $\pi^{-1}\big(\pi(2)\big) = \{1,2\}$ no, por lo que π no es una función abierta.

Ejercicio 3.15. Sea $X = [0,1]$ con la topología usual y se consideran las siguientes relaciones en X:

(i) $(x,y) \in R_1$ si $(x = y)$ o bien $(x = 0$ e $y = 1)$ o bien $(x = 1$ e $y = 0)$.
(ii) $(x,y) \in R_2$ si $x = y$ o si $x = 1 - y$.

En ambos casos, probar que son relaciones de equivalencia, determinar el espacio cociente y hallar un subespacio de $\mathbb{R}^2$ homeomorfo al cociente. Se pide fórmula para los homeomorfismos correspondientes.

El ejercicio anterior es una introducción a lo que se entiende por "pegar" o "identificar". Sea X un espacio, $A \subset X$ un subconjunto $f : A \to X$ una función. Se define una relación de equivalencia en X como sigue

(i) Declarando que z_1 y z_2 son equivalentes si $z_1 = z_2$ o si $f(z_1) = z_2$.

(ii) Como (i) no produce necesariamente una relación de equivalencia, consideramos la menor relación de equivalencia $R \subset (X \times X)$ que contiene a los pares (z,z) y $\big(z, f(z)\big)$ — ¡dicha relación existe por el lema de Zorn!

El espacio cociente de esta relación se llama el *pegado de X vía la identificación f*.

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 3.15. Sea $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ el disco unidad cerrado; se considera la función $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definida como $f(z) = 1$ para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. En este caso, la relación de pegado identifica todo el borde con un solo punto del borde. El resultado del pegado es homeomorfo a la esfera.

Ejercicio 3.16. Se considera en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la siguiente relación de equivalencia: V y W son equivalentes si existe un real positivo λ tal que $\lambda V = W$. Probar que es de equivalencia y encontrar un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea homeomorfo al espacio cociente.

Ejercicio 3.17. Se considera el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ y la función $f : \{0\} \times [0,1] \to \{1\} \times [0,1]$ dada por $f(0,x) = (1,x)$. Probar que el espacio cociente por esta identificación es homeomorfo a un cilindro. Hallar el homeomorfismo.

Ahora considere lo mismo pero con $f(0,x) = (1, 1-x)$. El espacio cociente se llama la *banda de Mœbius*. Hacer un dibujo.

Ejercicio opcional 3.18. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $f : A \to B$ una función. Consideramos la operación del pegado por f.

(a) Si $A \cap f(A) = \emptyset$, entonces las clases de equivalencia son las siguiente: $\{x\}$ si $x \notin A \cup f(A)$, $\big\{a, f(a)\big\}$ para $a \in A$.
(b) En general, probar que si $x \notin A \cup f(A)$, entonces $[x] = \{x\}$.

(c) Si $x \in A \setminus f(A)$, entonces $[a] = \{a, f(a), f^2(A), \ldots ...\}$. Dar un ejemplo que muestra que este conjunto puede ser finito. Podemos probar sin embargo que tiene siempre al menos dos elementos.

(d) Si $b \in f(A) \setminus A$ entonces $[b] = \{b\} \cup f^{-1}(b) \cup f^{-1}\big(f^{-1}(b)\big) \cup \ldots$. Nuevamente, este conjunto puede ser finito, pero siempre tiene al menos dos elementos (PISTA: $f^{-1}(D)$ puede ser el conjunto vacío).

(e) Nos queda ver el caso en que $a \in A \cap f(A)$. Aquí la situación es más complicada:

$$[a] = \{a\} \cup f(a) \cup \ldots f^n(a) \cup \cdots \cup f^{-1}\big(\{a\} \cup f(a) \cup \ldots\big) \cup f^{-1}\big(f^{-1}\big(\{a\} \cup f(a) \cup \ldots\big)\big) \ldots$$

En la expresión de arriba se pueden eliminar algunos términos: por ejemplo $a \in f^{-1}\big(f(a)\big)$, $f^{-1}(a) \subset f^{-1}\big(f^{-1}\big(f(a)\big)\big)$, etc.

EJERCICIO OPCIONAL 3.19 (Espacio proyectivo). En el curso de Tópicos de geometría se vio la construcción del espacio proyectivo como un espacio cociente: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\sim$, donde $x \sim y$ si existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\lambda x = y$.

Probar que los conjuntos $U_i = \big\{[(x_0, \ldots, x_n)] : x_i \neq 0\big\}$ son abiertos de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, tales que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \cup_i U_i$.

4. Los mono- y epi-morfismos en la categoría

Recordemos brevemente dos propiedades, una de las funciones inyectivas y otra de las funciones sobreyectivas.

PROPOSICIÓN 3.16. *(1) Sea $f : A \to B$ una función inyectiva y $g_1, g_2 : C \to A$ dos funciones tales que $f \circ g_1 = f \circ g_2 : C \to B$. Entonces $g_1 = g_2$.*

(2) Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva y $g_1, g_2 : B \to C$ dos funciones tales que $g_1 \circ f = g_2 \circ f : A \to C$. Entonces $g_1 = g_2$.

(3) Las propiedades anteriores caracterizan a las funciones inyectivas y sobreyectivas.

DEMOSTRACIÓN: (1) Sea $c \in C$. Entonces $f \circ g_1(c) = f \circ g_2(c)$, por lo que $g_1(c) = g_2(c)$ (usamos aquí que f es inyectiva).

(2) Dado $b \in B$, consideramos $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Entonces $g_1(b) = g_1 \circ f(a) = g_2 \circ f(a) = g_2(b)$.

(3) Sea $f : A \to B$ que cumple la propiedad (1). Consideremos $g : B \to A$ definida del siguiente modo. Fijamos $a_0 \in A$, y dado $b \in B$, si $f^{-1}(b) \neq \emptyset$, tomamos cualquier preimagen $a \in f^{-1}(b)$ y definimos $g(b) = a$. Si $f^{-1}(b) = \emptyset$, definimos $g(b) = a_0$. Una tal g verifica que $f \circ g(b) = b$ si $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ y $f \circ g(b) = f(a_0)$ en otro caso. Supongamos que podemos construir otra tal función g', construida cambiando (en caso que se pueda) algún valor de $g(b)$ — para poder hacer esto, necesitamos que $\#f^{-1}(b) > 1$ para algún b, así en ese caso elegimos otro valor en la preimagen. Entonces tendríamos que $f \circ g = f \circ g'$, por lo que $g = g'$, lo que es un absurdo. Entonces $\#f^{-1}(b)$ es o 0 o 1, es decir, f es inyectiva.

Supongamos ahora que f cumple la propiedad (2). Supongamos que f no es sobreyectiva, consideremos $b_0 \in B \setminus f(A)$ y consideremos las siguientes dos funciones : $\mathrm{id}\, B \to B$, y $g : B \to B$ definida así $g(b) = b$ si $b \in f(A)$, $g(b) = b_0$ si $b \notin f(A)$. Entonces $f = \mathrm{id} \circ f = g \circ f$, por lo que $\mathrm{id} = g$, absurdo. □

Es caso que si en la proposición anterior suponemos que A, B, C son espacios topológicos e imponemos a f, g_1, g_2, entonces (1) y (2) siguen siendo válidas. Sin embargo, (3) no lo es :

Ejercicio 3.20. Probar que si $f : A \to B$ es una función continua entre dos espacios topológicos tal que si $g_1, g_2 : C \to A$ es un par de funciones continuas tales que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, entonces $g_1 = g_2$, se cumple que f es inyectiva. Sugerencia : a la hora de construir g, g', nadie los obliga a considerar en A la topología que tenía al principio...

Ejercicio 3.21. Sea $f : A \to B$ una función continua entre dos espacios topológicos, con B Hausdorff.

(a) Sea $X \subset A$ un conjunto denso de un espacio topológico. Probar que si dos funciones continuas $f, g : A \to B$ coinciden en X, entonces son iguales. Sugerencia: si $a \in A$ es de acumulación de X, entonces $f(a)$ y $g(a)$ son puntos de acumulación de $f(X)$ y $g(X)$ respectivamente.
(b) Deducir que si f tiene imagen densa, entonces para todo par de funciones continuas $g_1, g_2 : B \to C$, si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, entonces $g_1 = g_2$.
(c) Probar que la propiedad anterior caracteriza a las funciones continuas con imagen densa.
(d) Dar un ejemplo de un espacio topológico A, un subconjunto denso $X \subset A$ y una función continua $f : X \to B$ tales que f no admite una extensión continua a todo A.

Observación 3.17. El Ejercicio 3.21 nos dice que las funciones continuas con imagen densa son los *epimorfismos* en la categoría de los espacios topológicos Hausdorff — las funciones continuas inyectivas son los *monomorfismos*. En la categoría de los conjuntos, los epimorfismos son las funciones sobreyectivas.

La condición de Hausdorff se puede debilitar un poco más.

Con un poco de imaginación, pueden encontrar un ejemplo de dos funciones continuas $f : A \to B$, $X \subset A$ denso, tales que $f \neq g$ pero $f|_X = g|_X$. Para ello, obviamente el primer paso es encontrar un espacio que no sea Hausdorff (necesitaremos además que una sucesión $\{b_n\} \subset B$ tenga dos puntos diferentes como límite).

¡Es de esperar entonces que las funciones con imagen densa tengan propiedades interesantes!

Capítulo 4

Espacios métricos

1. La topología inducida por la distancia

Recordemos del capítulo 2 la definición de espacio métrico.

Definición 4.1 (Espacios métricos). Una *distancia* o *métrica* en un conjunto M es una función $d : M \times M \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ (el conjunto de los reales mayores o iguales a cero), tal que cumple las siguientes propiedades:

1. *simetría* $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M$
2. $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in M$.
3. $d(x, y) = 0$ sii $x = y$.
4. *desigualdad triangular* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, x)$ para todo $x, y, z \in M$.

Un *espacio métrico* es un conjunto M dotado de una distancia. Notaremos un espacio métrico con su distancia por (M, d), pero cuando no produzca confusión (por ejemplo cuando la distancia es "conocida"), omitiremos la mención explícita a la distancia.

Dado un espacio métrico (M, d), $m \in M$ y $\varepsilon > 0$ un real positivo, la *bola abierta de centro m y radio ε* es el conjunto

$$B(m, \varepsilon) = \big\{x \in M : d(m, x) < \varepsilon\big\}$$

La *bola cerrada de centro m y radio r* es el conjunto

$$\overline{B}(m, r) = \big\{x \in M : d(m, x) \leq r\big\}$$

Un conjunto $A \subset M$ es *abierto* en M si para todo punto $a \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(m, \varepsilon) \subset A$.

Observación 4.2. Vimos que la familia $\mathcal{T}_d$ de todos los conjuntos abiertos en un espacio métrico (M, d) es una topología — en otras palabras, las bolas abiertas son una base de una topología, que notamos $\mathcal{T}_d$.

En particular, dado $x \in M$, tenemos que las bolas de centro x son una base de entornos de x (ver Ejercicio 2.15)

Advertencia: hay que tener cuidado con la intuición dada por el plano euclídeo: si bien la bola cerrada es fácil de probar que una bola cerrada es un cerrado que contiene a la bola abierta respectiva, no es cierto que siempre coincida con la clausura:

Ejercicio 4.1. Sea (M,d) un espacio métrico.

(a) Probar que una bola cerrada es un conjunto cerrado.
(b) Probar que si (M,d) es un espacio métrico y $N \subset M$ un subconjunto, entonces $d|_{N\times N}$ es una distancia en N, y que la topología inducida por $\mathcal{T}_d$ en N coincide con la topología $\mathcal{T}_{d|_{N\times N}}$.
(c) Consideremos $N = \big(\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)\big) \cup \big\{(0,0)\big\}$, con la distancia inducida. Encontrar en este espacio métrico una bola abierta tal que su clausura no sea la bola cerrada del mismo radio. Hacer lo mismo en $\mathbb{Z}$ con la métrica inducida.

Ejercicio 4.2. Sean d_1 y d_2 métricas en M, y denote por T_i la topología inducida por d_i.

(a) Probar que $T_1 \subset T_2$ sii para todos $x \in M$ y $r > 0$ existe $s > 0$ tal que $B_2(x;s) \subset B_1(x;r)$.
(b) Probar que si existe una constante $L > 0$ tal que $d_2(x,y) \geq L d_1(x,y)$ entonces $T_1 \subset T_2$.
(c) Probar que si d es una métrica en M entonces $d_1(x,y) = \text{mín}\big\{1, d(x,y)\big\}$ es una métrica en M, define la misma topología que d y el espacio es acotado (es decir existe L tal que $d(x,y) \leq L$ para todo $x,y \in M$), aunque con la distancia d original no lo fuera.

Ejercicio 4.3. Sean (M,d) y (N,d') espacios métricos. Probar que las funciones que siguen (de dominio $(M\times N)\times(M\times N)$ y codominio $\mathbb{R}^{\geq 0}$, definen distancias:

$$\begin{aligned}
d_1\big((x,y),(x',y')\big) &= d(x,x') + d'(y,y')\\
d_2\big((x,y),(x',y')\big) &= \big(d(x,x')^2 + d'(y,y')^2\big)^{1/2}\\
d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) &= \text{máx}\big\{d(x,x'), d'(y,y')\big\}
\end{aligned}$$

Probar que todas estas métricas definen la topología producto en $M\times N$. Comparar con el ejercicio 2.2 del Capítulo 2.

Observación 4.3. En virtud del Ejercicio 3.1 del Capítulo 3, tenemos que una función $f : M \to N$ entre dos espacios métricos es continua en $m \in M$ si y sólo si para toda bola abierta $B\big(f(n), r\big) \subset N$, con $r > 0$, existe $s > 0$ tal que $f\big(B(m,s)\big) \subset B\big(f(n), r\big)$.

Proposición 4.4. *Sea (M,d) un espacio métrico. Si consideramos en $M \times M$ alguna (cualquiera) de las métricas definidas en el ejercicio 4.3 y en $\mathbb{R}$ la métrica usual, entonces la función distancia $d : M \times M \to \mathbb{R}$ es continua.*

Demostración: Esta es una aplicación inmediata de la desigualdad triangular. Dado $(x_0,y_0) \in M \times M$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$d(x,y) - d(x_0,y_0) = d(x,y) - d(x,y_0) + d(x,y_0) - d(x_0,y_0) \leq d(y,y_0) + d(x,x_0)$$

Por lo que si $d\big((x,y),(x_0,y_0)\big) = \text{máx}\big\{(x,x_0), d(y,y_0)\big\} < \varepsilon$, tenemos que $d(x,y) - d(x_0,y_0) < \varepsilon$. $\square$

Un espacio métrico siempre satisface el primer axioma de numerabilidad pero no siempre el segundo:

EJERCICIO 4.4. Si M es un espacio métrico, son equivalentes:

(a) M satisface el segundo axioma de numerabilidad.
(b) M es separable.
(c) Todo subconjunto infinito no numerable de M contiene puntos de acumulación.
(d) Todo familia de bolas disjuntas dos a dos es numerable.
(e) Todo cubrimiento por abiertos tiene un subcubrimiento numerable — se dice que el espacio es un espacio de *Lindelöf*.
(f) Todo conjunto formado por puntos aislados es numerable.

SUGERENCIAS Y COMENTARIOS PARA EL EJERCICIO:

- Es fácil ver que la propiedad (c) es equivalente a la propiedad (d).
- La equivalencia entre (a) y (e) es válida para cualquier espacio topológico — hay que usar que si una subbase es numerable, entonces la base formada por las intersecciones finitas es numerable también: para ello, contar las intersecciones de $1, 2, 3, \ldots$ abiertos de la subbase.
- Para probar que (d) implica (b), se puede usar la siguiente idea: dado $\varepsilon > 0$, sea F_ε la familia de subconjuntos de $\mathcal{P}(M)$ formados por bolas disjuntas de radio ε, dirigida por la inclusión. Por lema de Zorn, esta familia tiene elementos maximales, que tienen una cantidad numerable de bolas por hipótesis. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomar un elemento $\mathcal{B}_{\frac{1}{n}}$ en $F_{\frac{1}{n}}$, y probar que el conjunto

$$\{x : x \text{ es centro de bola en } \mathcal{B}_{\frac{1}{n}} \text{ para algún } n\}$$

  es denso.
- Un ejercicio interesante es ver cuáles de las implicaciones se mantienen en un espacio topológico cualquiera (cambiando bola por conjunto abierto).

Recordemos la definición de convergencia de una sucesión:

DEFINICIÓN 4.5. Una *sucesión* en un conjunto X es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Notaremos $x_n = f(x_n)$ y $(x_n) = f$.

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces diremos que *la sucesión* (x_n) *tiene converve a* $\ell \in X$ o *tiene límite* ℓ, y notamos $\lim_n x_n = \ell$, si para todo entorno abierto $x \in U \subset X$ existe $N \in \mathbb{N}$ (que depende entonces de U) tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$.

Observemos que como un espacio métrico (M, d) es un espacio de Hausdorff, el límite de una sucesión si existe, es único.

EJERCICIO 4.5. Enunciar con precisión y demostrar: En un espacio métrico, las sucesiones caracterizan los cerrados y las funciones continuas.[1]

DEFINICIÓN 4.6. Sea M un conjunto y d, d' dos distancias definidas en M. Diremos que d y d' son *equivalentes* si generan la misma topología.

Diremos que las métricas son *fuertemente equivalentes* si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{>0}$ tales que para todo $x, y \in M$ se tiene que

$$\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y).$$

Del mismo modo, dos espacios métricos (M,d) y (M',d') se dicen *equivalentes* si son homomeomorfos (un homeomorfismo $f : M \to M'$ se dice una *euiqvalencia* y *fuertemente equivalentes* si existe un biyección $f : M \to M'$ y $|lpah, \beta \in \mathbb{R}^{>0}$ tales que

$$\alpha d'\big(f(x), f(y)\big) \leq d(x,y) \leq \beta d'\big(f(x), f(y)\big).$$

En ese caso diremos que f es una *equivalencia fuerte*. Observemos que podemos tomar $\alpha = \beta = 1$ si y sólo si $d'\big(f(x), f(y)\big) = d(x,y)$. En ese caso diremos que los espacios métricos son *isométricos* y que f es una *isometría*.

Observemos que si d, d' son dos métricas en M, entonces decir que son equivalentes (resp. fuertemente equivalentes) es equivalente a decir que la identidad $\mathrm{id}_M : (M,d) \to (M,d')$ es una equivalencia (resp. una equivalencia fuerte). La identidad id_M es una isometría si $d = d'$.

EJERCICIO 4.6. Sea M un conjunto y d, d' dos distancias, y $(M", d")$ otro espacio métrico.

(a) Probar que d y d' son equivalentes si y sólo si para todo $x \in M$ si $r > 0$¡ entonces existen $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$B_d(x, r_1) \subset B_{d'}(x, r) \quad \text{y} B_{d'}(x, r_1) \subset B_d(x, r),$$

donde el subíndice en B indica qué distancia usamos para construir la bola abierta de centro x.

(b) Probar que si $f : (M,d) \to (M", d")$ es una equivalencia fuerte, entonces es un homeomorfismo. En particular, si d y d' son fuertemente equivalentes, entonces son equivalentes.

(c) Probar que una isometría $f : (M,d) \to (M", d")$ es una equivalencia fuerte.

(d) Sea $f : M \to X$ una biyección. Entonces $d_X(x,y) = d\big(f^{-1}(x), f^{-1}(y)\big)$ es una distancia en X, demodo que f es una isometría.

2. Continuidad uniforme y completitud

La noción de *continuidad uniforme* está relacionada con la noción de *completitud* de un espacio métrico, que veremos más adelante. Veamos aquí las definiciones y propiedades básicas.

[1] Este ejercicio será presentado por los estudiantes en el curso.

Definición 4.7. Una función $f : (M, d_1) \to (N, d_2)$ es *uniformemente continua* si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $d_1(x, y) < \delta$ implica $d_2\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon$.

Notar que toda función uniformemente continua es continua. Sin embargo, $f(x) = x^2$ definida en $\mathbb{R}$ no es uniformemente continua.

Ejercicio 4.7. (a) Probar que una función continua de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ es continua sii es uniformemente continua. Sugerencia: si f no es uniformemente continua, existe un $\epsilon > 0$ y sucesiones $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ tales que $|x_n - y_n| < 1/n$ pero $\big|f(x_n) - f(y_n)\big| \geq \epsilon$ para todo n. Por ser contenida en $[0, 1]$, la sucesión $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente. Probar que si x es el límite de esa subsucesión, entonces f no es continua en x.

(b) ¿Podría generalizar el resultado anterior?

(c) Averiguar cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas:
  - (i) $f(x) = x^2$ definida en $\mathbb{R}$.
  - (ii) $f(x) = x^2$ definida en $[0, 1]$.
  - (iii) $f(x) = 1/x$ definida en $(0, +\infty)$.
  - (iv) $f(x) = 1/x$ definida en $[1, +\infty)$.
  - (v) $f(x) = sen(x)$ definida en $\mathbb{R}$.

Definición 4.8. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico es *de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todos n y m mayores que N.

Observar que si una sucesión es convergente, entonces es de Cauchy. El recíproco no es siempre verdadero. Basta considerar el espacio $M = (0, +\infty)$ con la distancia usual: la sucesión $\{1/n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy pero no es convergente.

Otro ejemplo un poco más interesante es

Ejercicio 4.8. Sea $M = \mathbb{R}$ y se considera la función $d : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \left| \int_x^y f(t)dt \right|,$$

donde f es una función continua, positiva y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ es finita. Probar que d es una distancia. Probar que la sucesión $\{n\}$ es de Cauchy pero no converge.

Ejercicio 4.9. (a) Probar que si bien en algunos espacios una sucesión de Cauchy puede no converger, se cumple siempre que es acotada, es decir, si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces existe un $R > 0$ tal que $x_n \in B(x_0; R)$ para todo n.

(b) Probar también que si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, entonces ella misma es convergente.

(c) Probar que si f es una función uniformemente continua, entonces $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy siempre que $\{x_n\}$ sea de Cauchy.
(d) Mostrar con un ejemplo que una función continua puede no tener esta propiedad.

Definición 4.9. Un espacio métrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejemplo 4.10. El espacio métrico de los números reales es completo. Esto se demuestra usando el *Axioma de Completitud*:

Si $A \neq \emptyset$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, entonces A tiene supremo.

Cuidado! Si bien se está usando la palabra axioma, el de arriba no es un axioma de la teoría, sino una propiedad. Expliquemos escuetamente como es la construcción de los “números reales” que lleva a que sepamos que cumplen esta propiedad:

Primero, establezcamos algunas nociones que necesitaremos: un *cuerpo (totalmente) ordenado* es un cuerpo $\mathbb{k}$ junto con un orden total $\leq$, de modo que tenemos que si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{k}$ (lo que implica que si $x > 0$ entonces $-x < 0$) y tal que para todo $x, y \in \mathbb{k}$ con $x > 0$ y $y > 0$, se cumple que $xy > 0$. Ejemplos de cuerpos ordenados son $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Se puede probar que $\mathbb{C}$ no admite un orden total de modo de ser totalmente ordenado.

En un cuerpo totalmente ordenado podemos reproducir la construcción que hicimos para espacios métricos:

Ejercicio opcional 4.10. Sea $(\mathbb{k}, \leq)$ un cuerpo totalmente ordenado.

(1) Si definimos la función “valor absoluto” como $|x| = \text{máx}\{x, -x\}$ (¡estamos usando el orden total aquí!), probar que $|x+y| \leq |x|+|y|$.
(2) Probar que la función $d : \mathbb{k} \times \mathbb{k} \to \mathbb{k}$ dada por $d(x, y) = |x - y|$ Es fácil ver que esta función cumple que
    (a) para todo $x, y \in \mathbb{k}$, tenemos que $d(x, y) \geq 0$, y la igualdad se da cuando $x = y$ (aquí usaremos que el orden es total);
    (b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in \mathbb{k}$;
    (c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{k}$.
(3) Si definimos la bola abierta de centro $x \in \mathbb{k}$ y radio $r \in \mathbb{k}^{>0}$ como $B(x, r) = \{y \in \mathbb{k} : d(x, y) < r\}$, tenemos que la familia de las bolas abiertas es una base para una topología (la topología inducida por d).
(4) Es fácil ver que tenemos entonces una noción de suceción de Cauchy y sucesión convergente para esta topología. Luego, podemos definir que es un *cuerpo totalmente ordenado completo.*

Tenemos ahora el siguiente resultado, que no probaremos en su totalidad.

TEOREMA 4.11. *Sean $\Bbbk$ y K son dos cuerpos totalmente ordenados, tales que cumplen el axioma e completitud. Entonces son completos, e isomorfos.* □

En vez del teorema 4.11, probaremos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.12. *Asumamos que los números reales cumplen el axioma de completitud. Entonces son un espacio métrico completo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy y consideremos $A = \{x \in \mathbb{R} : x < x_n$ para infinitos valores de $n\}$. Para empezar, note que A es acotado superiormente porque la sucesión $\{x_n\}$ es acotada superiormente — toda sucesión de Cauchy lo está, ver Ejercicio 4.9. Por otro lado, A es no vacío porque la sucesión $\{x_n\}$ está acotada inferiormente. Sea ℓ el supremo de A — existe por el axioma de completitud.

Afirmamos que ℓ es el límite de la sucesión $\{x_n\}$: notar que por la definición de A, en cada entorno de ℓ hay infinitos puntos de la sucesión. Se deduce que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente a ℓ, y nuevamente por el Ejercicio 4.9, deducimos que $\{x_n\}$ converge a ℓ. □

EJEMPLO 4.13 (Los reales como la completación de los racionales). Consideremos el espacio métrico de los números racionales con $d(x, y) = |x - y|$ para todo $x, y, \in \mathbb{Q}$. Entonces existen sucesiones de Cauchy que no convergen (¿puedes construir una de ellas?). Si para cada sucesión de Cauchy no convergente "agregamos" un punto (decretando que es "su límite"), podemos extienden la distancia en $\mathbb{Q}$ a ese nuevo conjunto K, obteniendo así en espacio métrico. Este nuevo espacio métrico es homeomorfo a los números reales, y es posible probar que es completo. Por otra parte, es posible ver que la suma y el producto de los racionales se extiende a K, lo mismo que el orden K: hemos construido un cuerpo K, totalmente ordenado, completo. Puede mostrarse que un tal cuerpo es homeomorfo a $\mathbb{R}$, de modo que existe un homeomorfismo $\varphi : K \to \mathbb{R}$ que un isomorfismo de cuerpos. Notemos también que K contiene a $\mathbb{Q}$ como un subconjunto denso. Ver Definición 4.28 y Ejemplo 4.29.

Veamos ahora como asumiendo que la construcción anterior es correcta, podemos ver que cumple el axioma de completitud.

PROPOSICIÓN 4.14. *Supongamos probado que $\mathbb{R}$ es completo. Entonces se verifica el axioma de completitud.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y no vacío. Sea x_0 el menor *entero* que es cota superior de A y defina por recurrencia una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ así : conocido x_n defina $x_{n+1} = x_n - 2^{-n}$ si $x_n - 2^{-n}$ es cota de A y $x_{n+1} = x_n$ si no. Entonces la sucesión x_n es de Cauchy, y por hipótesis tiene límite x. Entonces x es el supremo de A. □

La completitud de $\mathbb{R}$ nos permite definir la noción de diámetro de un conjunto:

Definición 4.15. Sea (M,d) un espacio métrico. Si $\emptyset \neq X \subset M$ es un conjunto no vacío, consideramos el conjunto de las diferetens distancias entre dos puntos de X: $A = \big\{d(x,y) : x,y \in X\big\}$. Como $0 = d(x,x)$ y X es no vacío, tenemos que A es no vacío. Por el axioma de completitud, si A está acotado tiene supremo, por lo que tiene sentido definir el *diámetro de* X, que notaremos $\operatorname{diam}(X)$ como $\operatorname{diam}(X) = \sup(A)$ si A es acotado, o $\operatorname{diam}(X) = \infty$ si A es no acotado.

Ejercicio 4.11. Sea (M,d) un espacio métrico y $B \subset M$ un conjunto. Entonces $\operatorname{diam}\big(\bar{(}B)\big) = \operatorname{diam}(B)$, ya que si si B no es acotado, entonces $\overline{B}$ tampoco lo es, y si B es acotado y $x,y \in \overline{B}$, entonces existen suceciones $(x_n),(y_n) \subset B$ con $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$. Considerando la desigualdad:

$$\dot{(}x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y)$$

el ejercicio sale fácilmente.

Antes de probar la existencia del completado de un espacio métrico, veamos algunas propiedades de los espacios métricos completos.

Ejercicio 4.12. Sea (M,d) un espacio métrico completo. Probar que un subconjunto N de M es completo con la métrica inducida si y sólo si N es cerrado en M.

Ejercicio opcional 4.13. Sea ℓ_∞ el espacio de todas las sucesiones complejas acotadas. Es un espacio vectorial con las operaciones coordenada a coordenada. Probar que la función $d\big(\{x_n\},\{y_n\}\big) = \sup_n\big\{|x_n - y_n|\big\}$ es una distancia y que ℓ_∞ es un espacio métrico completo.

Deducir que c, el conjunto de las sucesiones complejas convergentes, y c_0 el conjunto de las sucesiones convergentes a 0, con la métrica inducida por la del ejercicio anterior, son completos.

¿Es completo el subconjunto de las sucesiones que son cero a partir de un n?

Ejercicio 4.14. Sea (M,d) un espacio métrico, y $\mathcal{B}(M)$ el conjunto de todas las funciones acotadas de M en $\mathbb{R}$. En $\mathcal{B}(M)$ se usa la métrica $d_\infty(f,g) = \sup\big\{|f(x) - g(x)| \ : x \in M\big\}$.

(a) Probar que es una métrica.
(b) Probar que $(B(M), d_\infty)$ es completo.
(c) Sea $X = \mathcal{C}\big([0,1]\big)$, el conjunto de todas las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Probar que (X, d_∞) es completo. Sugerencia: por el Ejercicio 4.12, como X es subconjunto de $B\big([0,1]\big)$ y este es completo, basta ver que X es cerrado. Sea $\{f_n\}$ una sucesión que converge a f en d_∞; hay que ver que f es continua. Para eso, observe que dado $\epsilon > 0$ existe N tal que $\big|f_n(z) - f(z)\big| < \epsilon/2$ para todo $n \geq N$ y todo $z \in [0,1]$. En particular vale eso para N. Pero f_N es continua, y en particular uniformemente continua, por el ejercicio 5. Así que si

existe $\delta > 0$ tal $d(x,y) < \delta$ implica $\big|f_N(x) - f_N(y)\big| < \epsilon/4$. Juntando esas dos cosas se obtiene

$$\big|f(x) - f(y)\big| \le \big|f(x) - f_N(x)\big| + \big|f_N(x) - f_N(y)\big| + \big|f_N(y) - f(y)\big| < \epsilon.$$

Definición 4.16. La convergencia en el espacio $\big(B(M), d_\infty\big)$ (Ejercicio 4.14) se llama la *convergencia uniforme*. Difiere de la convergencia en el espacio producto $\mathbb{R}^M$, ya que la convergencia en este espacio es equivalente a la convergencia puntual, ver el ejercicio 3.7.

Ejercicio 4.15. Probar que el producto de espacios métricos completos es completo, con cualquiera de las métricas d_1, d_2, d_∞ (Ejercicio 4.3). Probar que un espacio métrico puede ser completo con una métrica y no ser completo con una métrica equivalente. Esto significa que la completitud no es una propiedad topológica.[2]

Teorema 4.17 (Encaje de Cantor). *Sea (M,d) un espacio métrico. Entonces son equivalentes:*

(1) (M,d) es completo.
(2) Si $\{A_n\}$ es una sucesión de subconjuntos de M que cumplen:
  (a) Cada A_n es cerrado no vacío.
  (b) Para todo n se cumple que $A_n \subset A_{n-1}$.
  (c) El diámetro de A_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$.
  Entonces $\#\big(\cap_n A_n\big) = 1$. En particular, $\cap_n A_n \neq \emptyset$.

Demostración: Para probar que (1) implica (2), consideramos una sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \in A_n$, y probamos que es de Cauchy. Entonces (x_n) converge, sea $\ell = \lim x_n$. Observamos que las suceciones $f_N : \mathbb{N} \to M$, dadas por $f_N(n) = x_{N+n}$ tienen imagen contenida en A_N y convergen a ℓ. Tenemos entones que $\ell \in A_N$, para todo N.

Para probar que la intersección es única, observemos que si $y \in \cap_n A_n$ es otro punto de la intersección, entonces $0 \le d(\ell, y) \le \operatorname{diam}(A_n)$ para todo n, y como la sucesión de los diámetros tiene a 0, deducimos que $d(\ell, y) = 0$, es decir $\ell = y$.

Para probar que (2) implica (1), observar que si (x_n) es una sucesión de Cauchy, entonces si $B_n = \big\{f(m) : m \ge n\big\}$, entonces los conjuntos $A_n = \overline{B_n}$ cumplen con las condiciones de (2). En efecto, $\operatorname{diam}(A_n) = \operatorname{diam}(B_n)$ (ver Ejercicio 4.11) y $\lim \operatorname{diam}(B_n) = 0$, pues (x_n) es de Cauchy. $\square$

Definición 4.18. Sea (X, T) un espacio topológico. Un subconjunto A de X es *nunca denso* en X si su clausura tiene interior vacío. Un subconjunto A de X se llama *magro* si es unión numerable de conjuntos nunca densos.

Un subconjunto A de X se llama *residual* si es una intersección numerable de conjuntos abiertos y densos.

[2]Por lo tanto, la noción de espacio métrico (o distancia) tiene aspectos que van más allá de sus propiedades topológicas.

Ejercicio 4.16. Probar las siguientes propiedades:

Si un conjunto es abierto y denso, entonces su complemento es nunca denso, y si un conjunto es nunca denso, entonces su complemento contiene un abierto denso.

Por ejemplo el "conjunto de Cantor" (ver Ejemplo 4.19 abajo) es nunca denso en $\mathbb{R}$, y cualquier subconjunto de un conjunto nunca denso también lo es. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales es denso en $\mathbb{R}$ pero también es magro en $\mathbb{R}$. Ahora, $\mathbb{R} \setminus Q$ es residual.

Ejemplo 4.19 (El conjunto de Cantor[3]). Hagamos la siguiente notación: si $I = [a, b]$ es un intervalo de la recta denotamos por $\hat{I}$ lo que se obtiene de remover de I el tercio (abierto) central,

$$\hat{I} = [a, b] - \left(a + \frac{b-a}{3}, a + \frac{2(b-a)}{3}\right) = \left[a, a + \frac{b-a}{3}\right] \cup \left[a + \frac{2(b-a)}{3}, b\right].$$

Si tenemos una unión disjunta de intervalos $C = \cup_k I_k$ denotamos por $\hat{C} = \cup_k \hat{I}_k$ lo que se obtiene de remover de C cada tercio central de cada intervalo que componen C.

Comencemos con $C_0 = [0, 1]$. Sea $C_1 = \hat{C}_0 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. En general $C_{n+1} = \hat{C}_n$. La familia $\{C_n; n \in \mathbb{N}\}$ es una familia encajada de conjuntos compactos de $\mathbb{R}$ (con la topología usual). Cada C_n es una unión disjunta de 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$.

Se define el *conjunto de Cantor* como

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Por el Ejercicio 4.12 tenemos que $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Veremos algunas propiedades de este conjunto. Antes, pongámosle nombre a otra propiedad que interesa estudiar

Definición 4.20. Decimos que un subconjunto C de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *perfecto* si C es igual al conjunto de sus puntos de acumulación C'. Dicho de otra forma, C es cerrado y todo punto de C es punto de acumulación de C.

Ejercicio 4.17 (la notaciones binaria y triádica). En este ejercicio veremos como formalizar las notaciones binarias y triádicas de los relaes del intervalo $[0, 1]$.

(1) *La notación binaria*

   (a) Probar que la serie $\sum_n a_n \frac{1}{2^n}$, con $a_0 = 0$ y $a_n \in \{0, 1\}$ si $n > 0$, converge a $a \in [0, 1]$. Llamaremos a una de estas series una *expresión binaria*

[3]Para este ejemplo, pirateamos alegremente (retocándolas) las notas de Martín Sambarino.

(b) Probar que si (a_n) y (b_n) son tales que $a_n = b_n$ para todo $n < N$, $a_N = 0$, $b_N = 1$, $a_m = 1$ y $b_m = 0$ para todo $m > n$ entonces $\sum_n a_n \frac{1}{2^n} = \sum_n b_n \frac{1}{2^n}$.
(c) Dar otro ejemplo de dos expresiones binarias diferentes que converjan al mismo número.
(d) Para eliminar la ambigüedad anterior, podemos elegir varios caminos. He aquí dos de ellos:
  (I) Dado $a \in [0,1]$ le asociamos una expresión binaria del siguiente modo:
   - $a_0 = 0$
   - Si $a > 1/2$, entonces $a_1 = 1$, si $a \leq 1/2$, entonces $a_1 = 0$.
   - Por inducción, si llamamos $S_n = \sum_j a_j \frac{1}{2^j}$, entonces si $S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < a$, entonces $a_{n+1} = 1$, de lo contrario $a_{n+1} = 0$.

  Probar que $\lim S_n = a$. Hallar la expresión binaria de $\frac{1}{7}2^n$

  Dado $a \in [0,1]$ le asociamos una expresión binaria del siguiente modo:
   - $a_0 = 0$
   - Si $a \geq 1/2$, entonces $a_1 = 1$, si $a < 1/2$, entonces $a_1 = 0$.
   - Por inducción, si llamamos $S_n = \sum_j a_j \frac{1}{2^j}$, entonces si $S_n + \frac{1}{2^{n+1}} \leq a$, entonces $a_{n+1} = 1$, de lo contrario $a_{n+1} = 0$.

  Probar que $\lim S_n = a$. Hallar la expresión binaria de $\frac{1}{7}2^n$

(2) *La notación triádica*

(a) Probar que la serie $\sum_n a_n \frac{1}{3^n}$, con $a_0 = 0$ y $a_n \in \{0,1,2\}$ si $n > 0$, converge a $a \in [0,1]$. Llamaremos a una de estas series una *expresión triádica*
(b) Probar que si (a_n) y (b_n) son tales que $a_n = b_n$ para todo $n < N$, $a_N = 0$, $b_N = 1$, $a_m = 2$ y $b_m = 0$ para todo $m > n$ entonces $\sum_n a_n \frac{1}{3^n} = \sum_n b_n \frac{1}{3^n}$.
(c) Dar otro ejemplo de dos expresiones binarias diferentes que converjan al mismo número.
(d) Para eliminar la ambigüedad anterior, podemos elegir como antes varios caminos. He aquí el que nos servirá para trabajar con el conjunto de Cantor

  Dado $a \in [0,1]$ le asociamos una expresión triádica del siguiente modo:
  - $a_0 = 0$
  - Si $a \geq 2/3$, entonces $a_1 = 2$; si $a \leq 1/3$, entonces $a_1 = 0$; si $1/3 < a < 2/3$, entonces $a_1 = 0$.
  - Por inducción, si llamamos $S_n = \sum_j a_j \frac{1}{3^j}$, entonces si $S_n + \frac{2}{3^{n+1}} \leq a$, entonces $a_{n+1} = 2$; si $a \leq S_n + \frac{1}{3^{n+1}}$, entonces $a_{n+1} = 0$; si $S_n + \frac{1}{3^{n+1}} < a < \frac{2}{3^{n+1}}$, entonces $a_{n+1} = 1$.

  Probar que $\lim S_n = a$. Hallar la expresión binaria de $\frac{j}{7}3^n$.

(e) Probar que a está en un intervalo central de longitud $1/3^{k+1}$, de la etapa k de la construcción del conjunto de Cantor si $a_n \neq 1$ para todo $n \leq k$, y $a_{k+1} = 1$.

TEOREMA 4.21. *El conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ verifica las siguientes propiedades:*

1. *Es perfecto.*
2. *Es totalmente desconexo, es decir, las componentes conexas son puntos.*[4]
3. *Es homeomorfo al conjunto $\Sigma_0 = \{a : \mathbb{N} \to \{0, 2\}\}$ con la distancia $d(a, b) = \sum_{n\geq 0} \frac{|b(n)-a(n)|}{3^n}$ y también homeomorfo a $\Sigma_1 = \{a : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$ con la distancia $d(a, b) = \sum_{n\geq 0} \frac{|b(n)-a(n)|}{2^n}$ En particular $\mathcal{C}$ tiene la potencia del continuo.*
4. *Existe una función $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua, monótona y sobreyectiva tal que $f(\mathcal{C}) = [0, 1]$.*[5]

DEMOSTRACIÓN: Ya sabemos que $\mathcal{C}$ es cerrado. Veamos que cada punto de $\mathcal{C}$ es punto de acumulación de $\mathcal{C}$. Sea $c \in \mathcal{C}$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea n tal que $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Como $c \in C_n \subset \mathcal{C}$ (ver Ejemplo 4.19), tenemos que $c \in I_n \subset C_n$, donde I_n es uno de los 2^n intervalos cerrados, de longitud $1/3^n$, cuya unión disjunta conforma C_n. Por otra parte, por construcción tenemos que $c \in I_n \subset B(c, \varepsilon)$. Recordemos que $\hat{I}_n$ consta de dos intervalos disjuntos ("tercios" de I_n) I_{n+1} y J_{n+1}, ambos además siendo intervalos de los que componen C_{n+1}. Como $c \in \mathcal{C}$, o bien $c \in I_{n+1}$ o bien $c \in J_{n+1}$, digamos $c \in I_{n+1}$. Como $\mathcal{C} \cap J_{n+1} \neq \emptyset$ (¿por qué?) y $c \in I_{n+1}$, resulta que $\mathcal{C} \cap B(c, \varepsilon) \setminus \{c\} \neq \emptyset$.

El mismo tipo de argumento muestra que $\mathcal{C}$ es totalmente desconexo (algo que veremos después, en el Ejercicio 5.10 del Capítulo 5).

Para la última parte, consideramos la expansión triádica de un real $r \in [0, 1]$ $r = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n}$ donde $a_n \in \{0, 1, 2\}$. Si para algún n se tiene que $a_n = 1$ entonces r pertenece a alguno de los tercios centrales que fueron removidos. Los puntos de borde, que son de la forma $\frac{k}{3^n}$ admiten dos expansiones distintas, pero solo una donde los a_n son 0 o 2. Es decir, si $r \in \mathcal{C}$ existe una única sucesión $a : \mathbb{N} \to \{0, 2\}$ tal que $r = \sum_{n\geq 1} \frac{a(n)}{3^n}$. Es claro que esta asociación es un homeomorfismo. Es claro también que Σ_0 es homeomorfo a Σ_1. En el Ejercicio 5.11 veremos nuevamente esta prueba.

Finalmente consideremos $\mathcal{C} = \Sigma^1$ y sea $f : \mathcal{C} \to [0, 1]$ donde $f(r) = f\big((a_n)\big) = \sum_n \frac{a_n}{2^n}$. Como el orden en $\mathcal{C}$ (como subconjunto de $\mathbb{R}$) es igual al orden lexicográfico en Σ_1 (considerando $0 < 1$) resulta que f es monótona en $\mathcal{C}$. Por otra parte $f(\mathcal{C})$ es compacto y denso en $[0, 1]$ por lo que $f(\mathcal{C}) = [0, 1]$.

[4]Esta propiedad está aquí para que quede registrada junto con las otras. Veremos más adelante qué significa, y la prueba en este caso.

[5]La prueba de esta propiedad usa resultados que todavía no vimos, por lo que la veremos nuevamente más adelante (Definición 5.13 del Capítulo 5.

Como es además monótona y sobreyectiva, se extiende (de forma única) a una función continua y monótona definida en todo $[0,1]$. □

Las primeras dos condiciones *caracterizan* los conjuntos de Cantor, como enunciamos a seguir. La demostración del teorema excede el alcance de este curso.

TEOREMA 4.22. *Sea (X,d) un espacio métrico compacto, perfecto y totalmente inconexo. Entonces (X,d) es homeomorfo al conjunto de Cantor usual $\mathcal{C}$.* □

Así, a un (X,d) es un espacio métrico compacto, perfecto y totalmente inconexo lo llamaremos *un conjunto de Cantor*.

Volvamos al estudio de los conjuntos residuales:

TEOREMA 4.23 (Teorema de Baire). *Sea (M,d) un espacio métrico completo. Entonces todo subconjunto residual es denso.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A = \cap_n A_n$ un conjunto residual en M, donde cada A_n es abierto y denso. Sea $B_0 = B(x_0; r_0)$ una bola cualquiera en M. Se probará que $B_0 \cap A \neq \emptyset$.

Por ser A_1 denso y abierto, existe una bola B_1 de radio $r_1 > 0$ cuya clausura está contenida en $B_0 \cap A_1$. Ahora, por ser A_2 abierto y denso, existe una bola B_2 de radio r_2 cuya clausura está contenida en $B_1 \cap A_2$, donde además se puede tomar $r_2 < r_1/2$. Por inducción se prueba que existe una sucesión de bolas B_n de radios $r_n < r_{n-1}/2$, tales que la clausura de B_n está contenida en $B_{n-1} \cap A_n$ para todo n. Por el teorema del encaje de Cantor (Teorema 4.17), tenemos que $\{z\} = \cap_n B_n \subset A_n \cap B_0$, por lo que $z \in B_0 \cap A$. □

COROLARIO 4.24. *Si $(M,.d)$ es un espacio métrico completo, todo conjuto residual es no vacío.*

DEMOSTRACIÓN: Para ser denso, tiene que ser no vacío. □

EJERCICIO 4.18. Probar que ningún espacio completo es magro en sí mismo. Por ejemplo, el conjunto $\mathcal{C}$ de Cantor es nunca denso en $\mathbb{R}$ pero no es magro en sí mismo. Q es magro en sí mismo.

Averiguar si en $\mathbb{R}$ con la topología generada por la base de los intervalos semiabiertos cumple que todo residual es denso.

TEOREMA 4.25 (Teorema del punto fijo de Picard). *Sea (M,d) un espacio métrico completo, y $f : M \to M$ tal que existe una constante $\lambda < 1$ para la que $d\big(f(x), f(y)\big) \leq \lambda d(x,y)$ para todos x e y en M. Entonces f es uniformemente continua y tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $z \in M$ tal que $f(z) = z$.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba que f es uniformemente continua es un ejercicio simple. Para probar que f tiene un punto fijo tomamos un $x_0 \in M$ cualquiera y "seguimos si trayectoria según las iteraciones de f": consideremos la sucesión $x_n = f(x_{n-1})$. Se puede probar que es de Cauchy:

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+r}) \leq\ & d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+r-1}, x_{x+r}) = \\
& d(x_n, x_{n+1}) + d\big(f(x_n), f(x_{n+1})\big) + \cdots + d\big(f^{r-1}(x_n), f^{r-1}(x_{x+1})\big) \leq \\
& d(x_n, x_{n+1}) + \lambda d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + \lambda^r d(x_n, x_{n+1}) = \\
& \sum_{j=0}^{r} \lambda^j d\big(f^n(x_0), f^n f(x_1)\big) \leq \lambda^n \sum_{j=0}^{r} \lambda^j d(x_0, x_1)
\end{aligned}
$$

Como $\sum_{j=0}^{r} \lambda^j d(x_0, x_1) < (r+1) d(x_0, x_1)$ y $\lim_n \lambda^n = 0$ tenemos el resultado deseado.

Al ser la sucesión x_n de Cauchy, tiene límite z, que claramente cumple $f(z) = z$, ya que f es continua. Ahora, tome $y_0 \in M$. y pruebe que los iterados de y_0 convergen al mismo z, usando que $d(z, z') < \lambda d(z, z')$ si z, z' son puntos fijos. $\square$

Ejercicio 4.19. Sean (M, d) y (N, d') espacios métricos donde N es completo. Sea $f : A \to N$ definida en A, un subconjunto denso de M. Probar que si f es uniformemente continua, entonces existe una única extensión continua de f a M (esto es, existe una única función continua $f' : M \to N$ tal que $f(x) = f'(x)$ para todo $x \in A$). Además la extensión resulta uniformemente continua.

Antes de la demostración, analice el siguiente ejemplo: Sea f definida en $(0, 1]$ por $f(x) = 1/x$; es continua en $(0, 1]$ pero no puede extenderse como una función continua a todo el intervalo $[0, 1]$. Para la prueba, sea $x \in M$ y $\{x_n\}$ una sucesión en A que tiende a x. Entonces $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en N, de donde se deduce que tiene una subsucesión convergente. Su límite es el candidato a definición de $f'(x)$. Entre otras cosas, hay que probar que $f'(x)$ no depende de la elección de la sucesión $\{x_n\}$.

Definición 4.26. Una *isometría* entre espacios métricos es una función que preserva distancias. Esto implica que una isometría es inyectiva, pero no necesariamente es sobreyectiva. Cuando una isometría es biyectiva decimos que es un *isomorfismo de espacios métricos*, y que los espacios dominio y codominio son *isomorfos*.

Observación 4.27. Observar que una isometría es uniformemente continua, y que en caso de ser un isomorfismo, su inversa también es continua. En particular, dos espacios métricos isomorfos son homeomorfos.

Definición 4.28. Sea (M, d) un espacio métrico. Una *completación* de (M, d) es una isometría $i : (M, d) \to (\tilde{M}, \tilde{d})$, con imagen densa (un *epimorfismo*, ver Ejercicio 3.21) donde $(\tilde{M}, \tilde{d})$ es un espacio métrico completo.

Ejemplo 4.29. El espacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales con la distancia usual no es completo, una completación de este espacio es $\mathbb{R}$ con la distancia usual. Una completación del espacio del ejercicio 4.8 se obtiene uniendo $\mathbb{R}$ con dos puntos $+\infty$ y $-\infty$ (completar detalles).

La completación de un espacio métrico M cumple una propiedad universal: es el "mínimo" espacio métrico contiene a M como "subespacio métrico":

PROPOSICIÓN 4.30 (Propiedad universal de la completación). *Sea* (M, d) *un espacio métrico e* $i : (M, d) \to (\tilde{M}, \tilde{d})$ *una completación de* (M, d)*. Sea* (N, d') *otro espacio métrico completo y* $f : M \to N$ *una isometría, entonces existe una función uniformemente continua* $\tilde{f} : \tilde{M} \to N$ *tal que* $\tilde{f} \circ i = f$*.*

Mas aún, f *es una isometría si y sólo si* $\tilde{f}$ *lo es.*

DEMOSTRACIÓN (A COMPLETAR): La construcción de $\tilde{f}$ se deduce del Ejercicio 4.19. La unicidad de $\tilde{f}$ sale del Ejercicio 3.21.

Supongamos que f es una isometría. Dados $x, y \in \tilde{M}$, sean $\{x_n\}, \{y_n\} \subset M$ dos sucesiones tales que $\lim i(x_n) = x$, $\lim i(y_n) = y$. Entonces, de la continuidad de la función distancia deducimos que

$$\begin{aligned} d'\big(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)\big) = {} & \lim d'\big(\tilde{f}(i(x_n)), \tilde{f}(i(y_n))\big) = \lim d'\big(f(x_n), f(y_n)\big) = \\ & \lim d(x_n, y_n) = \lim \tilde{d}\big(i(x_n), i(y_n)\big) = \tilde{d}(x, y). \end{aligned}$$

□

COROLARIO 4.31. *Sea* (M, d) *un espacio métrico e* $i : (M, d) \to (\tilde{M}, \tilde{d})$*,* $f : (M, d) \to (N, d')$ *dos completaciones de* (M, d)*. Entonces existe un isomorfismos de espacios métricos* $\varphi : \tilde{M} \to N$ *tal que* $\varphi \circ i = f$*.*

DEMOSTRACIÓN (A COMPLETAR): Esta es una aplicación inmediata de la propiedad universal de la completación. Como (casi) siempre en estos casos, se prueba considerando las propiedades universales para cada completación, con la isometría de la otra. □

Por lo anterior, se habla de *la* completación de (M, d), muchas veces sin mencionar la isometría i.

TEOREMA 4.32. *Todo espacio métrico* (M, d) *admite una completación.*

DEMOSTRACIÓN (A COMPLETAR): Fije un $x_0 \in M$. Considere, para cada $x \in M$ la función $f_x : M \to \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0)$. Veamos que $f_x \in B(M)$, es decir, que f_x es una función acotada. De la desigualdad triangular, se deduce que $|f_x(y)| = |d(y, x) - d(y, x_0)| \leq d(x, x_0)$ para para todo $y \in M$. Sea $i : M \to B(M)$ definida por $i(x) = f_x$. Tenemos que

$$d_\infty(f_x, f_z) = \sup_{z \in M} \big| d(z, x) - d(z, x_0) - d(z, y) + d(z, x_0) \big| = \sup_{z \in M} \big| d(z, x) - d(z, y) \big|.$$

Como $\big|d(z, x) - d(z, y)\big| \leq d(x, y)$ para todo $z \in M$, y la igualdad se cumple para $z = x$ (y para otros elementos, como ser $z = y$, tenemos que I es una isometría, de donde $(i(\bar{M}), d_\infty)$ es una completación de (M, d). □

OBSERVACIÓN 4.33. Observemos que al final de la prueba del Teorema 4.32 usamos que si tenemos una isometría $i : M \to N$, entonces $i : M \to \overline{i(M)}$ es una completación.

El Teorema 4.32 permite entonces construir una completación de los racionales. Pero... si queremos construir los números reales, necesitamos extender la suma y el producto. ¿se anima a hacerlo?

Capítulo 5

Conexión e irreducibilidad

1. Conexión e irreducibilidad

Consideremos el conjunto $A = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$. Una de las maneras más "naturales" de describirlo (en parte por como lo presentamos) es como la unión de dos intervalos. Lo mismo pasa con el conjunto $B = [0,2] \setminus \{1\}$: lo pensamos con la unión de los intervalos semi-abiertos $[0,1)$ y $(1,2]$. Sin embargo... ¿por qué no pensar A o B como la unión de los conjuntos formados por sus puntos?, ¿o de los puntos racionales unión los irracionales?

$$\begin{array}{ll} A &= \bigcup_{x\in A}\{x\} \quad = \quad (A\cap\mathbb{Q})\cup(A\cap\mathbb{I}) \\ B &= \bigcup_{x\in B}\{x\} \quad = \quad (B\cap\mathbb{Q})\cup(B\cap\mathbb{I}) \end{array}$$

Consideremos ahora el conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ conformado por la unión de los ejes coordenados. Nuevamente, tenemos varias otras maneras de pensar a C como unión de conjuntos.

Cuando pensamos A y B como unión de intervalos o a C como unión de dos rectas, estamos tratando de distinguir sus "pedazos" : estamos teniendo en cuenta su geometría. En este capítulo veremos dos nociones de topología que nos permiten capturar esta forma intuitiva de "separar un conjunto en sus partes".

Una idea central atrás de estas descomposiciones es el intentar describir la topología de un espacio topológico X en función de topologías más pequeñas:

Ejemplo 5.1. Sean $(A, \mathcal{T}_A)$ y $(B, \mathcal{T}_B)$ dos espacios topológicos. Consideremos la unión disjunta $X = A \cup B$ (es decir, dentro de X, $A \cap B = \emptyset$). Entonces podemos definir una topología en X, tomando como subbase $\mathcal{B} = \mathcal{T}_A \cup \mathcal{T}_B$.
(1) La familia $\mathcal{B}$ es una base, ya que si $U, V \in \mathcal{B}$, entonces o bien ambos UyB están en $\mathcal{T}_A$ por lo que su intersección está en $\mathcal{T}_A$, o bien ambos están en $\mathcal{T}_B$ y $U \cap V \in \mathcal{T}_B$, o bien uno de ellos está en $\mathcal{T}_A$ y el otro en $\mathcal{T}_B$, por lo que $U \cap V = \emptyset$. Por otra parte como $X = A \cup B$, tenemos que la familia $\mathcal{B}$ cubre X.
(2) Es fácil además describir los abiertos de la topología en X: si $W \subset X$ es abierto, entonces $W \cap A \in \mathcal{T}_A$ y $W \cap B \in \mathcal{T}_B$. En otras palabras W es abierto en X si y sólo si $W = U \cup V$, con $U \in \mathcal{T}_A$ y $V \in \mathcal{T}_B$.

Ejercicio 5.1. Consideremos ahora un espacio topológico X, y $A \subset X$ tal que A es abierto y cerrado en X. Entonces $B = A^c$ es abierto y cerrado en X también. Probar que W es abierto en X si y sólo si $W \cap A$ y $W \cap B$ son abiertos.

Deducir que si $\mathcal{T}_A$ y $\mathcal{T}_B$ son las topologías relativas de A y B, entonces $\mathcal{T}_A \cup \mathcal{T}_B$ es una base de $\mathcal{T}_X$.

CLaramente, el ejercicio 5.1 es m;ás interesante cuando A es un subconjunto propio de X no vacío, es decir cuando $\emptyset \neq A \subsetneq X$, por lo que lo mismo pasa con A^c. ¡Queremos entonces identificar esos subconjuntos! Eso nos lleva a la noción de conexión, y de componente conexa.

Definición 5.2. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *conexo* si no existen dos abiertos disjuntos no vacíos cuya unión sea X.

Un subconjunto $Y \subset X$ es *conexo* si es conexo cuando se considera con la topología inducida.

Si X no es conexo, diremos que es *Desconexo* o *desconectado*.[1]

Ejemplo 5.3. (1) Un punto es siempre conexo.

(2) Si X tiene la topología indiscreta, entonces todo subconjunto $A \subset X$ es conexo, ya que la topología relativa es también la indiscreta, y not enemos abiertos no triviales.

(3) En la topología discreta, lo únicos conjuntos conexos son los puntos, ya que cualquier conjunto es abierto.

Proposición 5.4. *Los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ con la topología usual son los intervalos.*

Para que la afirmación anterior tenga sentido, definimos intervalo *así : $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si $x, y \in I$ y $x < z < y$ implican $z \in I$ — esta definición abarca los intervalos abiertos, cerrados, semi-abiertos y cerrados, las semirrectas abiertas y cerradas, los puntos y toda la recta real.*

Demostración: Esta propiedad es una consecuencia de la completitud de $\mathbb{R}$. En efecto, sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y A, B subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos de I, vamos a probar que la unión no puede dar I.

Existe un punto $a \in A$ y un punto $b \in B$, podemos suponer $a < b$. Entonces el conjunto A' de los $t \in A$ tales que $t < b$ está acotado superiormente (por b) y es no vacío ($a \in A'$). Sea s el supremo de A'. Es claro que s está en I porque $a \leq s \leq b$ siendo que a y b están en el intervalo I. El punto s no puede estar en B porque al ser B abierto habría una cota superior de A' menor que s (para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, $(s - \varepsilon, s] \subset B$). Tampoco s puede estar en A, porque al ser A abierto, resultaría que s no es cota de A'. Se deduce que la unión de A y B no puede ser I. Esto prueba que todo intervalo es conexo.

[1] Algunos autores usan la palabra *inconexo*.

Para el recíproco, suponga que $C \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo, esto quiere decir que hay puntos a y b en C y un punto $z \in (a, b)$, tal que $z \notin C$. Sean $A = \{x \in C \ : x < z\}$ y $B = \{y \in C \ : z < y\}$. Es claro que A y B son abiertos en C, que su unión da C y que son disjuntos y no vacíos en C. $\square$

EJERCICIO 5.2. Sea (X, T) un espacio topológico. Probar que son equivalentes:

(a) X es conexo.
(b) X no es la unión de dos conjuntos cerrados disjuntos y no vacíos.
(c) Todo subconjunto de X que no es $\emptyset$ ni X, tiene frontera no vacía.
(d) Si un subconjunto A de X es abierto y cerrado, entonces $A = \emptyset$ o $A = X$.

EJERCICIO 5.3 (Teorema de Bolzano). Probar el teorema de Bolzano, en su versión sofisticada:

Sea $f : X \to Y$ continua, donde X es conexo. Entonces $f(X)$ es conexo.

Deducir el teorema de Bolzano en su versión clásica para funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

EJERCICIO 5.4 (Bolzano caracteriza a la conexión). Demostrar que X es conexo sii para toda $f : X \to \mathbb{R}$ continua se cumple que $f(X)$ es un intervalo, sii para toda función continua $f : X \to Y$, $f(X)$ es conexo.

EJERCICIO 5.5. Probar que si un subespacio A de X es conexo, entonces $\bar{A}$ también es conexo.

Mostrar con un ejemplo que el recíproco no es cierto.

EJERCICIO 5.6. Probar con ejemplos que la intersección y la unión de conexos no tiene que ser conexa necesariamente. Sin embargo, se tiene lo siguiente:

La unión de una familia de subconjuntos conexos es conexa si la intersección es no vacía.

Claramente la conexión no es una *propiedad local* : no se puede verificar viendo que pasa en entornos de puntos. Siendo un *propiedad global*, es de esperar que permita identificar espacios topológicos homeomorfos:

EJERCICIO 5.7. Probar que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $A \subset X$ es conexo si y sólo si $f(A) \subset Y$ es conexo.

EJERCICIO 5.8. Probar que los siguientes pares de conjuntos no son homeomorfos:

(a) S^1 y el intervalo $[0, 1]$.
(b) El anillo $[0, 1] \times S^1$ y la bola unidad cerrada en $\mathbb{R}^2$.

EJERCICIO OPCIONAL 5.9. Determinar cuáles son las clases de espacios homeomorfos entre las letras mayúsculas del alfabeto. Ejemplo: O y D son homeomorfas, E y T también, pero en una clase diferente.

El siguiente resultado es útil a la hora de clasificar objetos mediante propiedades topológicas:

Proposición 5.5. *Sean* $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *dos espacios topológicos, con* X *conexo. Entonces toda función* localmente constante *(es decir, para todo* $x \in X$ *existe un entorno (abierto)* $x \in U \subset X$ *tal que* $f|_U$ *es constante), es constante — recordar además que en el Ejercicio 3.3 vimos que toda función localmente constante es continua.*

Demostración: Como f es localmente constante, sus fibras $f^{-1}(y)$ son abiertas y cerradas — son abiertas por ser f localmente constante, y son cerradas pues $f^{-1}(y)^c = \big(f^{-1}(Y \setminus \{y\})\big) = \cup_{z \in Y \setminus \{y\}} f^{-1}(z)$.[2] Sea $x_0 \in X$. Entonces $f^{-1}\big(f(x_0)\big)$ es abierto y cerrado, y como X es conexo, esta fibra es todo X. □

Observemos que la prueba anterior usó que si una función es localmente constante, entonces sus fibras son abiertas y cerradas a la vez. En vista del Ejercicio 3.3 tenemos entonces el siguiente corolario:

Corolario 5.6. *Sean* $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *dos espacios topológicos, con* X *conexo y* $\mathcal{T}_Y$ *la topología discreta. Entonces toda función* $f : X \to Y$ *es constante.*

Demostración: Como todo punto de Y es abierto, tenemos que las fibras de f son abiertas, por lo que f es localmente constante. □

Antes de continuar con nuestro estudio de la conexión, retomemos el ejemplo del principio

Ejemplo 5.7. La unión de los ejes coordenados de $\mathbb{R}^2$ es un conjunto conexo (¡buscar más arriba el ejercicio que nos permite probar esto inmediatamente!)

Entonces, la conexión parece no alcanzar para formalizar nuestra intuición geométrica que dice que la cruz tiene dos ramas.

Por otro lado, podríamos sacar a la cruz el origen, y tenemos entonces cuatro subconjuntos conexos. Esto parecería identificar la cruz, pero.... si pensamos en una T y en un "rulo" (ver dibujo en clase...) tenemos que sacar la intersección nos da en ambos casos tres conexos.

La conexión no alcanza entonces para distinguir todas las propiedades que deseamos.

2. Componentes conexas

El Ejercicio 5.8 y el Ejemplo 6.5 nos muestran que tiene interés identificar en "cuántos conexos podemos separar nuestro espacio topológico". Formalicemos esta idea:

[2] Esta es la prueba de una parte del Ejercicio 3.3.

Definición 5.8. Una *componente conexa* de un espacio X es un subconjunto conexo maximal (para el orden de la inclusión).

La existencia de las componentes conexas (y que X es unión disjunta de sus componentes conexas) es fácil de probar : dado $x \in X$, sea $\mathcal{C}$ la colección de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x. Esta clase es no vacía porque $\{x\}$ es conexo, además la intersección de todos los elementos de $\mathcal{C}$ es no vacía. Se deduce del Ejercicio 5.6 que la unión de los elementos de $\mathcal{C}$ es conexa. Y claramente es maximal.

Claramente dos componentes conexas son disjuntas, nuevamente por el Ejercicio 5.6.

Las componentes conexas siempre son cerradas, en virtud del Ejercicio 5.5. Sin embargo, no tienen por qué ser abiertas:

Ejemplo 5.9. Como la unión finita de cerrados es cerrada, si un conjunto tiene una cantidad finita de componentes conexas, ellas van a ser abiertas. Sin embargo, si hay un número infinito de componentes conexas, no podemos garantizar nada:

(a) El conjunto de los enteros $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ tiene una cantidad infinita de componentes conexas, todas abiertas y cerradas.
(b) Lo mismo pasa con $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, pero...
(c) El conjunto $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tiene infinitas componente conexas, todas abiertas menos una (¿cuál?).
(d) El lector no debe confundirse y pensar que en el ejemplo anterior era importante que las componentes sean puntos: el conjunto

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ o } x = \frac{1}{n}\,,\ \in N\big\}$$

es otro ejemplo.

Observación 5.10. El ejemplo anterior nos muestra que la idea que presentamos al inicio del capítulo (descomponer a X como unión de abiertos disjuntos) no siempre se podrá hacer de modo que la famlia de abiertos sea maximal (para el orden de la inclusión en el conjunto de las partes).

Decir que un espacio topológico es unión disjuntas de sus componentes conexas es decir que las componentes conexas establecen una partición de X, por lo que tenemos antes nuestros ojos una relación de equivalencia

Definición 5.11. Se define la siguiente relación en X: $x \sim_C y$ si existe un subconjunto conexo de X que contiene a x e y. Es una relación de equivalencia cuyas clases son las componentes de X. Notaremos por $\pi_0(X)$ al conjunto cociente con la topología cociente, y por $\gamma_X : X \to \pi_0(X)$ a la proyección canónica.

Observación 5.12. La topología del espacio $\pi_0(X)$ nos muestra cómo se posicionen (en relación a la topología) las componentes conexas de X.

Por ejemplo, si X es el espacio del Ejemplo 5.9(d), tenemos que $\pi_0(X)$ es el espacio del Ejemplo 5.9(c): esto nos dice que salvo la componente O_y, las componentes conexas de X son aisladas, y acumulan precisamente en eje coordenado O_y.

EJERCICIO 5.10. Hallar las componentes conexas de:

(a) La gráfica de $sen(1/x)$, definida en $\mathbb{R}^+$.
(b) La unión de la gráfica de la función $sen(1/x)$ definida en $\mathbb{R}^+$ con el segmento $x = 0,\ -1 \leq y \leq 1$.
(c) El conjunto de Cantor.
(d) Los naturales con la topología de los complementos finitos.

El ejercicio anterior nos dice que el conjunto de Cantor es totalmente desconexo.

DEFINICIÓN 5.13. Un espacio topológico es *totalmente desconexo* o está *totalmente desconectado* si sus componentes conexas son sus puntos.

Aprovechemos la aparición del conjunto de Cantor para terminar la prueba del Teorema 4.21 del Capítulo 4.

EJERCICIO 5.11 (La escalera del diablo). Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor, que describimos así

$$\mathcal{C} = \{x \in [0,1] \ : \ x = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{3^n} \ : \ x_n \in \{0,2\}\}$$

Se considera la función $f : \mathcal{C} \to [0,1]$ como $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n/2}{2^n}$.
Probar que f es continua y sobreyectiva.

EJERCICIO 5.12. Probar que el conjunto de puntos del plano con al menos una coordenada irracional es conexo.

3. Conexión por caminos

DEFINICIÓN 5.14. Un *camino* o *curva* en un espacio X una función continua $\alpha : [0,1] \to X$. A veces abusaremos la notación y diremos que la curva es la imagen de α — vista de esta última manera, una curva es es la imagen de una función continua $[0,1] \to X$, por lo que es un conjunto.

Usando que los intervalos son conexos y Bolzano, se tiene que una curva siempre es conexa. El uso de curvas en un espacio topológico es una de las herramientas fundamentales de la topología algebraica.[3]

[3]También se usan "curvas cerradas": funciones continuas $f : S^1 \to X$, donde S^1 es la circunferencia, y otras generalizaciones a dimensiones superiores, pero profundizar nos lleva a otro curso diferente, continuación de éste.

DEFINICIÓN 5.15. Sea X un espacio topológico. Dos puntos $x, y \in X$ están *conectados pro un camino* si existe una curva $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

Un espacio X es *conexo por caminos* si para cualquier par de puntos de X está conectado.

OBSERVACIÓN 5.16. La propiedad de estar conectados es una rlación de equivalencia:

1. La curva constante $\alpha_x : [0,1] \to X$, $\alpha_x(t) = x$ muestra que x está conectado con x.
2. Si $\alpha : [0,1] \to X$ es continua, entonces $\beta : [0,1] \to X$, $\beta(s) = \alpha(1-s)$ es continua — luego si x está conectado con y entonces Y está conectado con x.
3. Si $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ son dos funciones continuas tales que $\alpha(1) = \beta(0)$, entocnes la función $\gamma : [0,1] \to X$ dada por
$$\gamma(t) \begin{cases} \alpha(\frac{t}{2}) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(1 + \frac{t}{2}) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$
es continua.

Desde este punto de vista, un espacio X es conexo por caminos si X es la única clase de equivalencia de la relación "estar conectados".

OBSERVACIÓN 5.17. La Definición 5.15 es equivalente a la siguiente:

> Un espacio topológico X es conexo por caminos si para cualquier par de puntos en X existe una curva (pensada com oconjunto) que los contiene,

Una de las implicaciones es obvia. La otra requiere un poco de esfuerzo:

Sea $\alpha : [0,1] \to X$ una función continua y $x, y \in \mathrm{Im}(\alpha)$. Queremos construir una función continua $\beta : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\beta(1) = y$ (o al revés). Sea $a \in [0,1]$ tal que $\alpha(a) = x$ y $b \in [0,1]$ tal que $\alpha(b) = y$. Suponemos sin pérdidad de generalidad que $a < b$ (si son iguales no hay nada que probar, si se cumple que $a > b$ entonces encontraremos una función tal que $\alpha(0) = y$ y $\alpha(1) = x$). La función β que queremos la podemos construir así:
$$\beta(t) = \alpha\big(a + \frac{t}{b-a}\big).$$

PROPOSICIÓN 5.18. *Un espacio topológico conexo por caminos es conexo.*

DEMOSTRACIÓN (A COMPLETAR): Usar el Ejercicio 5.6. □

El recíproco de la Proposición 5.18 no es cierto — ver el Ejemplo 5.19 más abajo.

EJERCICIO 5.13. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Si X es conexo por caminos y f definida en X es continua, entonces $f(X)$ es conexo por caminos.
(b) Si A es conexo por caminos, entonces $\overline{A}$ es conexo (veremos que no necesariamente $\overline{A}$ es conexo por caminos).
(c) Pruebe el Ejercicio 5.6 cambiando *conexo* por *conexo por caminos.*
(d) Defina componente conexa por caminos y repita el ejercicio 9 sustituyendo *componente conexa* por *componente conexa por caminos.*

Ejemplo 5.19 (Conexión no implica conexión por caminos). Sea α una curva contenida en el conjunto del ejemplo 5.10(b), que lo podemos escribir como $G \cup I$ donde G es el gráfico de $x \mapsto \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ e I el segmento vertical. Se supone que $\alpha(0) \in s$ y que $\alpha(1) \in G$ para llegar a un absurdo.

Como $\alpha(1) = (x_0, \operatorname{sen}(\frac{1}{x_0})$ para $x_0 > 0$, existe un entorno abierto de $\alpha(1)$ disjunto de I. Luego, por continuidad de la función α resulta que existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha(t) \in G$ para todo $t > 1 - \epsilon$.

Sea t_0 el supremo de los t tales que $\alpha(t) \in I$ — existe por la completitude los reales. Entonces $\alpha(t) \in G$ para todo $t > t_0$. Como I es cerrado, resulta que $\alpha(t_0) \in s$.

Observemos que si $r > 0$ es suficientemente pequeño,

$$B(\alpha(t_0), r) \cap (I \cup G) = \big\{(0, y) : y_0 - r < y < y_0 + r\big\} \cup \big(B(\alpha(t_0), r) \cap G\big)$$

donde $\alpha(t_0) = (0, y_0)$. Ahora bien, el conjunto $A = \big(B(\alpha(t_0), r) \cap G\big)$ está compuesto por una infinidad de componentes conexas, todas ellas abiertas en A.

Como α es continua, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $C = \alpha\big((t_0, t_0 + \delta)\big) \subset A$ (ya que $\alpha(t) \in G$ is $t > t_o$). Como el intervalo $(t_0, t_0 + \delta)$ es conexto, tenemos que B debe estar contenido en una de las componentes conexas de A, pero eso implica que α es discontinua en t_0.

Proposición 5.20 (El producto de conexos es conexo). *Sea $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ una familia de espacios topológicos conexos. Entonces el espacio topológico producto es conexo.*

Demostración (a completar): Probar primero el caso finito, usando que $\{x\} \times Y$ es homeomorfo a Y para cualquier $x \in X$ y que $X \times \{y\}$ homeomorfo a X para todo $y \in Y$ (por definición de la topología producto), demostrar que el producto de conexos X e Y es conexo.

Para el caso general, sea $f \in X = \prod_\alpha X_\alpha$. Se demostrará que la componente conexa que contiene a f es densa en X, eso alcanza porque las componentes son cerradas. Tomamos un abierto de la base

$$V = \cap_{i=1}^n p_i^{-1}(A_i),$$

donde A_i es abierto en el espacio X_{α_i}. Probar que el conjunto

$$\big\{g \in X : g(\alpha) = f(\alpha) \text{ para todo } \alpha \text{ distinto de todo } \alpha_i\big\}$$

es homeomorfo al producto finito de los X_{α_i} y concluir.

$\square$

Ejercicio 5.14. Probar que el producto de espacios topológicos conexos por caminos es conexo por caminos.

Vemos ahora como relacionar la "conexión local" con la global — dentro de lo posible.

Definición 5.21. Un espacio X es *localmente conexo* (resp. *localmente conexo por caminos*) si cada punto tiene una base de entornos conexos (resp. conexos por caminos).

Ejercicio 5.15. Probar las siguientes propiedades.

(a) Si X es conexo y localmente conexo por caminos, entonces es conexo por caminos.
(b) Un espacio puede ser conexo pero no localmente conexo (cuidado: esta no es la propiedad que vimos antes).
(c) Las componentes de un espacio localmente conexo son abiertas.

4. Irreducibilidad

Otra noción que tiene que ver con la "detección de pedazos" en un espacio topológico es la irreducibilidad — como veremos en el Ejercicio 5.16 esta es una noción eventualmente útil es espacios que no son Hausdorff.

Definición 5.22. Un espacio topológico X se dice *irreducible* si no se puede poner como unión de dos cerrados diferentes.

En otras palabras si $X = Y \cup Z$, con Y, Z cerrados, entonces $Y = X$ o $Z = X$.

Un subconjunto $A \subset X$ se dice irreducible si lo es con la topología inducida. Es decir si $A = (Y \cap A) \cup (Z \cap A)$ con Y, Z cerrados de X, entonces o $A \subset Y$ o $A \subset Z$.

Ejercicio 5.16. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Entonces X es irreducible si y sólo si es un punto. Sugerencia : si $x, y \in X$ son dos puntos distintos, es fácil encontrar dos cerrados, uno que no contiene a x y otro que no contiene a y, tal que la unión da todo X.

Ejemplo 5.23. Sea X un conjunto muñido de la topología indiscreta. Entonces X es claramente irreducible.

La siguiente caracterización es muy útil para trabajar con la noción de irreducibilidad.

Proposición 5.24. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces X es irreducible si y solamente si todo par de abiertos U, V no vacíos se intersectan — es decir $U \cap V \neq \emptyset$.*

Demostración (a completar): Es una aplicación directa de la definición de cerrado. □

Ejercicio 5.17. Sea X un conjunto muñido de la topología del complemento finito. Probar que si X es infinito o un punto entonces es irreducible, y que si $1 < \#X = n$, entonces X no es irreducible.

También es fácil ver que la imagen de un irreducible por una función continua es irreducible.

Ejercicio 5.18. Probar que si $f : X \to Y$ es una función continua, y $A \subset X$ es irreducible, entonces $f(A)$ es irreducible. Dar un ejemplo que muestre que el recíproco es falso.

La irreducibilidad se "comporta bien" cuando tomamos clausura.

Ejercicio 5.19. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un conjunto irreducible. Entonces todo subconjunto Y tal que $A \subset Y \subset \overline{A}$ es irreducible.

Proposición 5.25. *Un conjunto irreducible de un espacio topológico es conexo.*

Demostración: En efecto, no puede haber abiertos no vacíos disjuntos. □

Veamos ahora cómo probar la existencia de componentes irreducibles.

Definición 5.26. Sea X un espacio topológico. Una *componente irreducible* es un subconjunto irreducible, maximal para esa propiedad.

Proposición 5.27. *Un espacio topológico es la reunión (no tiene por qué ser disjunta) de sus componentes irreducibles. Las mismas son cerrados conexos de X. En particular, las componentes conexas de X son unión de componentes irreducibles.*

Demostración: La prueba es una aplicación del lema de Zorn. Sea $x \in X$ un punto, y consideremos la familia $\mathcal{F}$ de los conjuntos irreducibles que contienen a x. Esta familia es no vacía por que $\{x\}$ es irreducible. Sea $\mathcal{F}_x = \{X_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos irreducibles que contienen a x, totalmente ordenada para la inclusión. Afirmamos que $X_\infty = \cup_{i\in I} X_i$ es un conjunto irreducible. Sean U, V dos abiertos de X tales que $U \cap X_\infty \neq \emptyset$, $V \cap X_\infty \neq \emptyset$. Entonces existen $i, j \in I$ tales que $U \cap X_i \neq \emptyset$, $U \cap X_j \neq \emptyset$, como I es totalmente ordenado, o bien $X_i \subset X_j$ o bien $X_j \subset X_i$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$. Entonces $U \cap X_j \neq \emptyset$, por lo que $\emptyset \neq U \cap V \cap X_j \subset U \cap V X_\infty$. Luego X_∞ es una cota en $\mathcal{F}$ para la familia $\mathcal{F}_x$. Los elementos maximales que hayamos son las componentes irreducibles de X que contiene a x.

Como la clausura de un irreducible es irreducible y las componentes irreducibles son maximales, deducimos que las mismas son cerradas. Como ser irreducible implica ser conexo, tenemos que toda componente irreducible que pasa por x está contenida en la componente conexa que contiene a x. □

Ejercicio 5.20 (Un punto puede pertenecer a más de una componente irreducible). Consideremos en $\mathbb{R}$ la topología de complemento finito

(a) Verificar que las uniones finitas de rectas horizontales y verticales y puntos asilados, son los cerrados de la topología producto en $\mathbb{R}^2$
(b) Probar que un cerrado es irreducible si y solamente si es una recta o un punto.
(c) En particular, la unión X de los ejes coordenados tiene dos componentes irreducibles: cada uno de los ejes.
(d) Probar que X es conexo : las componentes conexas no coinciden necesariamente con las componentes irreducibles.

El Ejercicio 5.16 nos dice que la noción de componente irreducible tendrá utilidad (afinando la noción de componente conexa, ver Proposición 5.27), cuando el espacio topológico no es Hausdorff.

Capítulo 6

Compacidad

En los cursos de cálculo vimos que las funciones continuas $f : A \to R$, que tienen como dominio un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado (compacto) tienen varias propiedades interesantes y útiles, como ser la existencia de máximo y mínimos — si la función es además diferenciable, los cálculos se simplifican, pero como ya vimos, la diferenciabilidad no es una propiedad topológica.

Como la noción de "conjunto acotado" es una noción relacionada con la existencia de una distancia, se puede establecer en espacios métricos, pero no en espacios topológicos cualesquiera. En este capítulo veremos cómo definir una noción de compacidad que permita establecer resultados similares al de cálculo mencionado.

1. Espacios topológicos compactos

Establezcamos primero la terminología que nos simplificará los enunciados.

Definición 6.1. Dado un conjunto X, un *cubrimiento* $\mathcal{F}$ de X es una familia de subconjuntos de X cuya unión da X. Los cubrimientos están entonces ordenados parcialmente por la inclusión: un *subcubrimiento* de $\mathcal{F}$ es una subfamilia $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ que es también un cubrimiento.

Como la noción de compacidad está relacionada con la posibilidad o no de cubrir todo X, le pondremos también nombre al hecho que una familia de subconjuntos *no* sea un cubrimiento: una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ es *inadecuada* si no es un cubrimiento, es decir si $\cup_{A\in\mathcal{F}} A \subsetneq X$. Una familia $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ es *finitamente inadecuada* si toda subfamilia finita $\mathcal{F} \subset G$ es inadecuada. En otras palabras, $\mathcal{G}$ es finitamente inadecuada si $A_1 \cup \cdots \cup A_n \subsetneq X$ para toda familia $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{G}$.

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, un *cubrimiento por abiertos* es un cubrimiento $\mathcal{F}$ de X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$.

Ejemplo 6.2. (1) $\mathcal{P}(X)$ es un cubrimiento de X — es el mayor cubrimiento.

(2) Toda familia que contenga a X es un cubrimiento de X. En particular $\{X\}$ es el cubrimiento con menor cantidad de conjuntos posible. Es un cubrimiento minimal para el orden de la inclusión en $\mathcal{P}(X)$, pero no es mínimo (¿por qué ?).

(3) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, $\mathcal{T}$ es el mayor cubrimiento por abiertos de X. Nuevamente $\{X\}$ es un cubrimiento por abiertos minimal, pero no es mínimo a no ser que... ¿qué?

(4) La familia de abiertos $\{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ es un cubrimientos por abiertos de $\mathbb{R}$. Es una familia finitamente inadecuada.

En una primera visión, la noción de espacio compacto es una noción de "finitud" : si una familia de abiertos cubre al espacio, tengo que poder encontrar una subfamilia finita que lo cubre.[1]

Definición 6.3. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *compacto* si todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento finito.

Un subconjunto $Y \subset X$ es compacto si lo es para la topología inducida.

Reformulemos esta defineión de un modo conveniente para probar ciertos resultados, como ser el Teorema de Tijonov[2] (Teorema 6.23):

Un espacio topológico es compacto si toda familia de abiertos ninitamente idadecuada es inadecuada.

Observación 6.4. De acuerdo con lo visto en el Capítulo 2, tenemos entonces que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, un subconjunto $Y \subset X$ es compacto si toda vez que $Y \subset \cup_{U \in \mathcal{F}} U$, con $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$, tenemos que existe una familia finita $U_1, \ldots U_n \in \mathcal{F}$ tal que $Y \subset \cup_i U_i$.

Para simplificar los argumentos, diremos que la familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ es un cubrimiento por abiertos de Y — esto es un abuso de notación, pues los conjuntos U_i no son abiertos de Y, pero lo usaremos cuando no pueda llevar a error.

Ejemplo 6.5. (1) Si X está munido de la topología indiscreta, todo subconjunto es compacto.

(2) Si X está munido de la topología indiscreta, entonces los subconjuntos compactos son los subconjuntos finitos.

(3) Si X es un espacio topológico y $x \in X$, entonces $\{x\}$ es compacto. Más en general, todo conjunto finito es compacto.

[1] Esta definición es muy práctica cuando trabajamos con espacios topológicos que son Hausdorff : implícitamente está asumiendo que es difícil cubrir al espacio topológico con pocos abiertos — algo que en los espacios Hausdorff suele suceder. Sin embargo, los matemáticos que se encuentran asiduamente con espacios que no son Hausdorff prefieren hablar de *quasi-compacto*.

[2] Esta es una de las trasliteraciones en español del apellido ruso, se puede encontrar escrito como a Tikhonov, Tychonoff, ...

(4) Si X está munido de la topología del complemento finito, todo subconjunto es compacto.

(5) Sea (x_n) una sucesión convergente es un espacio topológico de Hausdorff: el conjunto $\{x_n\} \cup \{\lim x_n\}$ es compacto.

(6) Si (M, d) es un espacio métrico, entonces un conjunto no acotado no es compacto — veremos más adelante en la Proposición 6.11 que los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ son los cerrados y acotados, pero CUIDADO: existen espacios métricos acotados que no son compactos (ver Ejercicio 6.11).

(7) No es compacto un espacio no numerable con la topología de los complementos numerables.

EJERCICIO 6.1. Si consideramos en un conjunto X la topología discreta, entonces $Y \subset X$ es compacto si y sólo si Y es finito.

Veamos ahora una propiedad cómoda a la hora de estudiar si un espacio topoógico es compacto o no (la usaremos para simplicar la prueba del Teorema de Tijonov, por ejemplo).

LEMA 6.6. *Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de la topología tal que si $U, V \in \mathcal{B}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{B}$. Entonces un subconjunto $Y \subset X$ es compacto si y solo si todo cubrimiento de Y por abiertos de la base $\mathcal{B}$ admite un subcubrimiento finito.*

DEMOSTRACIÓN: Si Y es compacto, entonces todo cubrimiento por abiertos tiene un subcubrimiento finito, por lo que no hay nada que probar.

Para probar el recíproco, consideremos un cubrimiento $\mathcal{U}$ de Y por abiertos cualesquiera. Si $U \in \mathcal{U}$, entonces $U = \cup_{\alpha \in I_U} V_{\alpha,U}$, donde los $V_{\alpha,U}$ son abiertos de la base $\mathcal{B}$. Entonces Y puede cubrirse con la familia de abiertos $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \{V_{\alpha,U} : \alpha \in I_U\}$, por lo que existe un subcubrimiento finito $Y \subset V_{\alpha_{i_1}, U_{i_1}} \cup \cdots \cup V_{\alpha_{i_n}, U_{i_n}}$, y deducimos que $Y \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ — observemos que podría pasar que $U_{i_j} = U_{i_h}$, para algunos $h, h \in \{1, \ldots, n\}$, pero eso no es un problema. $\square$

LEMA 6.7. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico de Hausdorff. Entonces todo subconjunto compacto es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN (A COMPLETAR): Supongamos que $Y \subset X$ es compacto. Queremos probar que dado $a \in Y^c$, existe un entorno abierto $a \in U \subset Y^c$. Para ello, usamos la propiedad de Hausdorff para cada $y \in Y$. Tenemos entonces entornos abierto $a \in U_y$ y $y \in V_y$ tales que $U_y \cap V_y = \emptyset$ para cada $y \in Y$. Usando la compacidad, podemos encontrar una cantidad finita de entornos $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ que cubren Y. El entorno abierto $U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ está contenido en Y^c. $\square$

LEMA 6.8. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto. Entonces todo subconjunto cerrado es compacto.*

Demostración: Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ un cubrimiento por abiertos de Y. Entonces $\mathcal{F} \cup \{Y^c\}$ es un cubrimiento por abiertos de X, por lo que admite un cubrimiento finito, que será de la forma $\{U_1, \dots, U_n\} \cup \{Y^c\}$ con $U_i \in \mathcal{F}$ — Y^c puede no ser vacío si $Y = X$, o no aparecer (en ese caso $\bigcup_i U_i = X$), en ambos casos, el razonamiento que sigue sigue siendo válido —, por lo que $\{U_1, \dots, U_n\}$ es un subcubrimiento finito de Y. □

Combinando los lemas 6.7 y 6.8 tenemos la siguiente caracterización:

Lema 6.9. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico de Hausdorff compacto. Entonces $Y \subset X$ es compacto si y sólo si es cerrado.* □

Ejercicio 6.2. Probar que todo subconjunto infinito de un espacio compacto X tiene punto de acumulación (la prueba de este ejercicio está más adelante).

Ejercicio 6.3. Dar un ejemplo de un espacio topológico compacto que tenga subespacios compactos, no cerrados — el Lema 6.7 y por lo tanto la caracterización del Lema 6.9 no se pueden generalizar a cualquier espacio topológico.

Lema 6.10. *Sea (M, d) un espacio métrico y $C \subset M$ un subconjunto compacto. Entonces C es cerrado y acotado.*

Demostración: Por el Lema 6.7 sabemos que C es cerrado, y por el Ejemplo 6.5 (5), tenemos que C es acotado. □

Como dijimos antes, el recíproco del Lema 6.10 no es cierto (ver Ejemplo 6.11).

Proposición 6.11. *Los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ con la topología usual son los conjuntos cerrados y acotados.*

Demostración: Como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico, tenemos que todo compacto es cerrado y acotado por el Lema 6.10.

Veamos primero que un intervalo $X = [a, b]$ cerrado y acotado es compacto — otra vez el axioma de completitud será necesario. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X — observar que $\mathcal{U}$ es entonces un cubrimiento abierto de cualquier subconjunto de X. Definimos $X' \subset X$ como el conjunto de los $x \in X$ tales que $[a, x]$ tiene un subcubrimiento finito; queremos probar que $b \in X'$ (de hecho, si la proposición es cierta, sabemos que X' será todo el intervalo $[a, b]$). El conjunto X' es no vacío porque existe $\{a\}$ es compacto y está acotado superiormente (por b), por lo que X' tiene supremo, que notaremos s. Probaremos que $s = b \in X'$.

Supongamos por absurdo que $s < b$. Sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $s \in V$ — existe un tal V porque $\mathcal{U}$ es un cubrimiento. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset V \cap [a, b]$. Como $s = \sup X$, tenemos que existe $x' \in (s - \varepsilon, s] \cap X'$, por lo que $[a, x']$ admite un subcubrimiento finito $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ — observemos que en principio s podría ser a, en ese caso $x' = s = a \in X'$.

Pero entonces $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{V\} \subset \mathcal{U}$ es un subcubrimiento finito de $[a, s]$, por lo que $s \in X'$. Pero $\mathcal{G}$ es un subcubrimiento finito para todos los intervalos $[a, x'']$, con $x'' \in [a, s+\varepsilon)$: tenemos entonces que s no es el supremo de X', a no ser que $s = b$.

Resta ver qué sucede si X es cualquier cerrado y acotado. En ese caso existe un intervalo $[a, b]$ que lo contiene. Este último es compacto, y X es un subconjunto cerrado, así que también es compacto, por el Lema 6.8. $\square$

Veamos ahora una caracterización de la compacidad desde la óptica de las familias de cerrados.

DEFINICIÓN 6.12. Sea $\{C_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ una familia de cerrados en un espacio X. Se dice que tiene la *PIF (propiedad de intersección finita)* si para cualquier subconjunto finito F de I se cumple que $\cap_{\alpha \in F} C_\alpha \neq \emptyset$.

PROPOSICIÓN 6.13. *Un espacio topológico X es compacto si y sólo si toda familia de cerrados con la PIF tiene intersección no vacía.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba es vía “tomar complementos y usar las leyes de De Morgan”, observando que una familia de abiertos $\{U_\alpha\}$ es finitamente inadecuada si y sólo si la familia $\{U_\alpha^c\}$ tiene la PIF, y es inadecuada si y sólo si $\cap_\alpha U_\alpha^c \neq \emptyset$. $\square$

Recordemos ahora el Teorema de Bolzano-Weierstrass:

TEOREMA 6.14. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f tiene máximo y mínimo. Más aún. la imagen de f es intervalo cerrado.*

La prueba del Teorema de Bolzano-Weierstrass que se estudia en los cursos de cálculo es muy interesante — la misma utiliza herramientas que veremos en la sección 4.1. Obtendremos ahora el teorema como consecuencia de resultados más generales sobre funciones continuas con dominio compacto y conexo. Recordemos que ya probamos (en el Ejercicio 5.3) que la imagen de un conexo es conexa (el Teorema de Bolzano), por lo que tenemos solamente que probar que la imagen de un compacto por una función continua es compacta, para deducir que $f\big([a, b]\big)$ es un conjunto conexo (un intervalo) cerrado y acotado: es un intervalo cerrado del tipo $[c, d]$.

TEOREMA 6.15. *Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función continua y $D \subset X$ un subconjunto compacto. Entonces $f(D)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha \in \mathcal{T}_Y : \alpha \in I\}$ un cubrimiento por abiertos de $f(D)$. Como f es continua, tenemos que $\mathcal{U} = \big\{f^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in I\big\}$ es un cubrimiento por abiertos de D (recordar que $f^{-1}\big(f(D)\big) \supset D$). Como D es compacto, tenemos que existe un subcubrimiento finito $f^{-1}(V_{\alpha_1}), \ldots, f^{-1}(V_{\alpha_n})$, de donde deducimos que la familia $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}$ es un cubrimiento de $f(D)$. $\square$

Ejercicio 6.4. Probar que si $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función continua y biyectiva, con X compacto e Y Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo (comparar con el ejercicio 3.4, donde vemos que la compacidad es necesaria).

Las nociones de *regularidad* y *normalidad*[3] se usan para dar un paso más adelante en la noción de ser Hausdorff:

Definición 6.16. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *regular* si dados un punto $x \in X$ y un cerrado $Y \subset X$, un cerrado que no contiene a x, existen abiertos disjuntos U, V que los contienen: $x \in U$, $Y \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. El espacio si dice *normal* si dados dos cerrados disjuntos $Y, Z \subset X$ existen abiertos disjuntos U_Y, U_Z que los contienen: $Y \subset U_Y$, $Z \subset U_Z$, $U_Y \cap U_Z = \emptyset$.

Ejemplo 6.17. Los espacios topológicos de Hausdorff compactos son regulares y normales.

El ejemplo anterior deja un poco de "sabor a poco". Sin pensar mucho, parecería que R^n es regular (o normal), y no es cubierto por el mismo. Para ver si nuestra intuición es correcta, intentemos buscar otras propiedades relacionadas con la compacidad que sean verificadas por $\mathbb{R}^n$. Intentemos primero estableciendo una noción "local" de compacidad.

Definición 6.18. Diremos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *localmente compacto* si todo punto $x \in X$ tiene un entorno compacto.

Ejemplo 6.19. (1) $\mathbb{R}^n$ es un espacio localmente compacto.
(2) los racionales no son localmente compactos.

Ejercicio 6.5. Mejorar el Ejemplo 6.17 mostrando que los espacios topológicos de Hausdorff localmente compactos son regulares.

Ejercicio 6.6. Sea X un espacio topológico.
(1) Probar que si los puntos son cerrados entonces:

  (a) Si X es normal entonces X es regular.
  (b) Si X es regular entonces X es Hausdorff.

(2) Dar un ejemplo de un espacio topológico regular que no es Hausdorff.
(3) Dar un ejemplo de un espacio topológico normal que no es regular. Sugerencia: en el ejemplo que vimos en clase para (2), tenemos que agregar algún punto abierto más, manteniendo la menor cantidad posible de abiertos...

[3]La nomenclatura en matemática muchas veces tiene razones históricas, lo que lleva a que el mismo nombre se use en diferentes contextos, los términos *regular* y *normal* aparecerán entonces en diferentes disciplinas, nombrando otros tipos de comportamiento.

2. El Teorema de Tijonov

El objetivo de esta sección es probar que el producto de espacios topológicos compactos es compacto. La prueba de este resultado en general es delicada, ya que usa de un modo bastante astuto el lema de Zorn. Probaremos entonces una primera versión "finita" (de modo de familarizarnos un poco más con la topología producto), para luego pasar a probar el resutlado general.

PROPOSICIÓN 6.20. *Sean* $(X, \mathcal{T}_X)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *dos espacios topológicos compactos. Entonces el espacio topológico producto* $X \times Y$ *es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: En vista del Lema 6.6, alcanza con considerar un cubrimiento de $X \times Y$ por abiertos de la forma $A \times B$, con $A \in \mathcal{T}_X$ y $B \in \mathcal{T}_Y$ y probar que tiene un subcubrimiento finito. Sea entonces $\mathcal{U} = \{A_i \times B_i : i \in I\,,\ A_i \in \mathcal{T}_X\,,\ B_i \in \mathcal{T}_Y\}$ un cubrimiento de $X \times Y$. Dado $x \in X$, como la función $f_x : Y \to X \times Y$, $f_x(y) = (x, y)$ es continua, tenemos que $\{x\} \times Y$ es compacto, por lo que admite un subcubrimiento finito $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}$: $\{x\} \times Y \subset \cup_{U \in \mathcal{U}_x} U$.

Tenemos entonces que la famila $\mathcal{V} = \cup_{x \in X} \mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}$ recubre todo $X \times Y$. Queremos encontrar dentro de $\mathcal{V}$ un subcubrimiento finito del producto. Para ello, encontraremos un cubrimiento finito de abiertos de la forma $W \times Y$, de modos que cada uno de los abiertos tenga a su vez un cubrimiento finito por abiertos de $\mathcal{V}$ — de hecho, existirá $x_W \in X$ tal que $\mathcal{U}_{x_W}$ cubre $W \times Y$.

Dado $x \in X$, supongamos que $\mathcal{U}_x = \{A_{1,x}, \times B_{1,x}, \dots, A_{n_x,x} \times B_{n_x,x}\}$ y consideremos $W_x = \cap_{i=1}^{n_x} A_{i,x} \in \mathcal{T}_X$. Como $W_x \times B_{i,x} \subset A_{i,x} \times B_{i,x}$ y $x \in W_x$, tenemos que

$$\{x\} \times Y \subset W_x \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} W_x \times B_{i,x} \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} (A_{i,x} \times B_{i,x}).$$

En efecto, si $(w, y) \in W_x \times Y$, entonces $w \in \cap A_{i,x}$. Sea j tal que $(x, y) \in A_{j,x} \times B_{j,x}$; entonces $(w, y) \in A_{j,x} \times B_{j,x}$.

Deducimos entonces que el abierto $W_x \times Y$ es cubierto por la familia $\mathcal{U}_X$. Por otra parte, la familia de abiertos $\{W_x \times Y : x \in X\}$ cubre $X \times Y$: si lobramos encontrar una subcubrimiento finito $X \times Y = \bigcup_{t=1}^m W_{x_t} \times Y$, entonces $\bigcup_{t=1}^m \mathcal{U}_{x_t}$ será un subcibirmento finito. Para encontrar los x_t, observamos ahora que $\{W_x : x \in X\}$ es un cubrimiento del compacto X, por lo que admite un subcubrimiento finito $\{W_{x_1}, \dots, W_{x_m}\}$, por lo que $X \times Y = \bigcup_t W_{x_t} \times Y$. □

COROLARIO 6.21. *Si* $(X_i, \mathcal{T}_i)$ *es una familia finita de espacios topológicos compactos, entonces el espacio topológico producto es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: ¡Ejercicio! □

Antes de entrar en la prueba del resultado general veamos una consecuencia (esperada) del teorema que acabamos de probar.

EJERCICIO 6.7. Probar que los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ son los cerrados y acotados.

Para probar el teorema de Tijonov, conviene utilizar el siguiente criterio para determinar si un espacio topológico es compacto, que mejora el lema 6.6.

TEOREMA 6.22 (Teorema de Alexander). *Un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *es compacto si y sólo si para una (toda) subbase* $\mathcal{S}$ *se cumple que todo cubrimiento de* X *por abiertos de* $\mathcal{S}$ *admite un subcubrimiento finito.*

DEMOSTRACIÓN: Por conveniencia, usaremos el lenguaje de "cubrimientos inadecuados". Por definición, si X es compacto entonces toda subbasse cumple que todo cubrimiento por abiertos de la misma que es finitamente inadecuado, es inadecuado.

Supongamos ahora que existe una subbase $\mathcal{S}$ tal que todo cubrimiento por abiertos de $\mathcal{S}$ finitamente inadecuado, es indadecuado y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ un cubrimiento finitamente inadecuado; necesitamos probar que es indadecuado. Observemos primero que si existe un cubrimento mayor $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ que es inadecuado, entonces $\mathcal{F}$ es también inadecuado. Consideramos entonces la familia $\mathbb{G}$ de las familias finitamente indadecuados que contienen a $\mathcal{F}$ — nótese que los elementos de $\mathbb{G}$ son familias finitamente inadecuadas que contienen a $\mathcal{F}$ –, y probemos que tiene una familia maximal. Para empezar, observemos que $\mathcal{F} \in \mathbb{G}$; supongamos entonces que tenemos una subfamilia $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ totalmente ordenada para la inclusión $\{\mathcal{F}_i \in \mathbb{G} : i \in I\}$ (esta afirmación implica en particular que I es un conjunto totalmente ordenado, ya que $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$ si y sólo si $i \leq j$). Afirmamos que $\cup \mathcal{F}_i$ es finitamente inadecuada; en efecto consideremos una subfamilia finita

$$\{U_1, \ldots, U_n : U_j \in \mathcal{F}_{i_j} \text{ para algún } i_j \in I\}$$

Entonces $U_j \in \mathcal{F}_{\text{máx}\{I_1,\ldots,i_n\}}$, por lo que $X \neq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. El Lema de Zorn nos garantiza entonces que tenemos la familia $\mathbb{G}$ tiene un elemento maximal, es decir famila $\mathcal{F}_\infty \supset \mathcal{F}$, finitamente inadecuada, tal que si $\mathcal{F}_\infty \subsetneq \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G}$ admite un cubrimiento finito.

Probemos ahora que $\mathcal{F}_\infty$ es inadecuada. Para ello, probaremos la siguiente

> *Afirmación 1:* Si U es un abierto de X, con $U \notin \mathcal{F}_\infty$, entonces existen $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{F}_\infty$ tales que $X = U \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

En efecto, observemos que si no fuera el caso $\mathcal{F}_\infty \cup \{U\}$ sería finitamente inadecuada, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{F}_\infty$, con lo que la afirmación de más arriba queda probada.

Observemos ahora que la propiedad de más arriba nos permite afirmar que si $U \notin \mathcal{F}_\infty$, entonces ningún abierto que contenga a U pertenece a $\mathcal{F}_\infty$ (los mismos U_i que usamos para U nos sierven). Más aún, si $V \notin \mathcal{F}_\infty$, y

$V_1, \dots, V_m \in \mathcal{F}_\infty$ son tales que $X = V \cup V_1 \cup \dots \cup V_m$, entonces

$$X = (U \cap V) \cup U_1 \cup \dots U_n \cup V_1 \cup \dots \cup V_m$$

lo que se puede ver tomando complemento y aplicando las leyes de De Morgan, por ejemplo. Deducimos entoneces que $U \cap V \notin \mathcal{F}_\infty$, por lo que ningún abierto que contenga a $U \cap V$ pertenece a $\mathcal{F}_\infty$.

Iterando el proceso, probamos entonces la siguiente

> *Afirmación 2:* Si $W_1, \dots, W_t \notin \mathcal{F}_\infty$, y W es un abierto tal que $W_1 \cap \dots \cap W_t \subset W$. entonces $W \notin \mathcal{F}_\infty$.

"Enunciando el contrarecíproco" obtenemos que si $T_1, \dots, T_s$ son abiertos tales que un abierto de $\mathcal{F}_\infty$ contiene a su intersección, entonces alguno de los T_i pertence a $\mathcal{F}_\infty$.

Veamos ahora cómo utilizar esta propiedad para probar que $\mathcal{F}_\infty$ es inadecuada. Sea $\mathcal{S}$ una subbase como en la hipótesis (es decir, toda subfamila de $\mathcal{S}$ finitamente inadecuada es inadecuada). Tenemos que la familia $\mathcal{G} = \mathcal{S} \cap \mathcal{F}_\infty = \{U \in \mathcal{T} : U \in \mathcal{S} \cap \mathcal{F}_\infty\}$ es una subfamilia de $\mathcal{S}$ finitamente inadecuada, por lo que es inadecuada. Para probar que $\bigcup_{U \in \mathcal{F}_\infty} U \subsetneq X$, alcanza entonces que

$$\bigcup_{U \in \mathcal{F}_\infty} U = \bigcup_{V \in \mathcal{G}} V \subsetneq X.$$

Observemos que la inclusión $\bigcup_{V \in \mathcal{G}} V \subset \bigcup_{U \in \mathcal{F}_\infty} U$ es obvia, (y que en realidad es la otra inclusión la que necesitamos). Consideremos entonces $x \in \bigcup_{U \in \mathcal{F}_\infty} U$, y sea $U_0 \in \mathcal{F}_\infty$ tal que $x \in U_0$. Como $\mathcal{S}$ es una subbase de la topología, sabemos que existen $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{S}$ tales que $x \in U_1 \cap \dots \cap U_n \subset U_0$, de donde deducimos que existe $1 \leq i_0 \leq n$ tal que $U_{i_0} \in \mathcal{F}_\infty$ y por la maximalidad de $\mathcal{F}_\infty$ (usamos aquí la afirmación que acabamos de probar). Tenemos entonces que $x \in U_{i_0} \subset \bigcup_{V \in \mathcal{G}} V$. □

El teorema de Alexander es el ingrediente principal que usaremos para probar que el producto de espacios topológicos compactos es compacto:

Teorema 6.23 (Teorema de Tijonov). *Sea* $\big\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\big\}$ *una familia de espacios topológicos compactos. Entonces* $(\prod X_i, \prod \mathcal{T}_i)$ *es un espacio topológico compacto.*

Demostración: Usaremos el Teorema de Alexander (Teorema 6.22). Consideremos entonces la subbase $\mathcal{S} = \big\{p_i^{-1}(U) : i \in I\, ,\ U \in \mathcal{T}_i\big\}$ (ver Proposición 3.9). y probemos que toda subfamilia $\mathcal{F}$ finitamente inadecuada de $\mathcal{S}$ es inadecuada.

Dada $\mathcal{F} \subset S$ finitamente inadecuada, primero observemos que $X \notin \mathcal{F}$. Para cada $i \in I$, sea $\mathcal{F}_i = \big\{V \in \mathcal{T}_i : p_i^{-1}(V) \in \mathcal{F}\big\}$ la familia de abiertos de X_i tales que su preimagen por p_i está en $\mathcal{F}$. Entonces $X_i \notin \mathcal{F}_i$ y tenemos que

$$\mathcal{F}_i = \big\{p_i(U) : U \in \mathcal{F}\big\} \setminus \{X_i\}.$$

Para cada $i \in I$, consideremos la familia

$$p_i^{-1}(\mathcal{F}_i) = \{p_i^{-1}(V) : V \in \mathcal{F}_i\} = \{U \in \mathcal{F} : p_i(U) \in \mathcal{F}_i\}$$

Tenemos entonces que $p_i^{-1}(\mathcal{F}_i) = \{U \in \mathcal{F} : p_i(U) \neq X_i\}$ es una subfamilia de $\mathcal{F}$ y

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{F}_i). \tag{2}$$

En particular, tenemos que $p_1^{-1}(\mathcal{F}_i)$ es finitamente inadecuada para todo $i \in I$. Probemos ahora la siguiente

Afirmación: la familia $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{T}_i$ es finitamente inadecuada para todo $i \in I$.

En efecto, si $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{F}_i$ son tales que $X_i = V_1 \cup \cdots \cup V_n$, entonces

$$\prod_{j \in I} X_j = p_i^{-1}(X_i) = p_i^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup p_i^{-1}(V_n),$$

lo que contradice que $p_i^{-1}(\mathcal{F}_i)$ es finitamente inadecuada.

Como X_i es compacto, tenemos entonces que $\mathcal{F}_i$ es inadecuada para todo $i \in I$, y existe entonces $x_i \in X_i \setminus \bigcup_{V \in \mathcal{F}_i} V$. Consideremos ahora la La función $f : I \to \bigcup_i X_i$ dada por $f(i) = x_i$. Este elemento del producto $\prod X_i$ no pertenece entonces a $\mathcal{F}$, ya que $p_i(f) = f(i) = x_i \notin \bigcup_{V \in \mathcal{F}_i} V$, de donde deducimos que $f \notin p_1^{-1}(\mathcal{F}_i)$ para todo $i \in I$, y aplicando la ecuación (2) deducimos que $f \notin \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$ — en otras palabras, $\mathcal{F}$ es inadecuada. $\square$

3. Algunas propiedades relacionadas

Los espacios topológicos compactos tienen varias propiedades intereantes, algunas de las cuales de hecho catracterizan la compacidad en las hipótesis adecuadas. En este sección veremos algunas de ellas.

Recordemos que si $f : \mathbb{N} \to X$ es una sucesión, para construir una subsucesión tomamos una función estrictamente creciente $j : \mathbb{N} \to N$ y consideramos la composición $f \circ j : \mathbb{N} \to X$.

Definición 6.24. Un espacio topológico X es *secuencialmente compacto* si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente en X.

Ejercicio 6.8. (1) Observar que el espacio topológico $[0,1]^{[0,1]}$ es compacto pero no verifica ni el primer axioma de numerabilidad (ni el segundo) y no es secuencialmente compacto.

(2) Probar que un espacio topológico compacto que cumple el primer axioma de numerabilidad es secuencialmente compacto.

Definición 6.25. Un espacio topológico X es de *Lindelof* si todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento numerable.

Un espacio topológico X es *compacto numerable* si todo cubrimiento abierto numerable de X tiene un subcubrimiento finito.

Observación 6.26. (1) En términos de familias finitamente inadecuadas, un espacio topológico es Lindelof si toda familia numerablemente inadecuada es inadecuada — dejamos al lector la tarea de descubir qué quiere decir que una familia es numerablemente inadecuada.

(2) Del mismo modo, un espacio es compacto numerable si toda familia numerable finitamente inadecuada es numerablemente inadecuada — atención aquí: ¡la familia de partida no la estamos suponiendo numerable!

(3) Es claro que si X es compacto, entonces es Lindelof y compacto numerable. También es obvio que Lindelof y compacto numerable implica compacto.

Ejercicio 6.9. Si consideramos en un conjunto X la topología discreta, entonces $Y \subset X$ es Lindelöf si y sólo si Y es numerable.

Veamos ahora que un espacio secuencialmente compacto es compacto numerable.

Teorema 6.27. *Si X es un espacio topológico secuencialmente compacto, entonces es compacto numerable.*

Demostración (a completar): Sea $\mathcal{F} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento numerable de X y supongamos que no tiene subcubrimiento finito (que es finitamente inadecuado). Llegaremos a un absurdo construyendo una sucesión sin subsucesiones convergentes.

Como $A_1 = A_{n_0} \neq X$, existe $x_1 \notin A_1$; sea A_{n_1} tal que $x_1 \in A_{n_1}$; observemos que $A_{n_0} \neq A_{n_1}$ y que $n_1 > n_0$. Como $\mathcal{F}$ es finitamente inadecuado, existe $x_2 \notin \cup_{i=n_0=1}^{n_1} A_i$ y como $\mathcal{F}$ es un cubrimiento, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_2 \in A_{n_2}$. Notemos que tenemos que $x_1 \neq x_2$, y que $A_j \neq A_{n_2}$ para $j = 1, \ldots, n_1$.

Por inducción, se prueba que existe una sucesión de puntos $\{x_k\} \subset X$, todos ellos distintos entre sí, y una sucesión estrictamente creciente de números naturales $\{n_k\}$ tales que $x_k \notin \cup_{i=1=n_0}^{n_k} A_i$ pero $x_k \in A_{n_{k+1}}$.

Afirmamos que la sucesión $\{x_n\}$ no tiene subsucesiones convergentes. Alcanza con ver que dado $z \in X$ existe un entorno U de z tal que $\#\big(U \cap \{x_k\}\big) < \infty$, ya que en ese caso la sucesión entra a este entorno sólo un número finito de veces, y por lo tanto no puede tener una subsuceción convergente a z.

Para probar la afirmación, consideremos A_m tal que $z \in A_m$. Como la sucesión de naturales $\{n_k\}$ es estrictamente creciente, se sigue que $m < n_k$ para algún k. Entonces como $x_t \notin \bigcup_{i=1}^{n_k} A_i$ para todo $t > k$, deducimos que $\#\big(A_m \cap \{x_k\}\big) \leq k$. $\square$

Ejercicio 6.10. (1) Probar que todo espacio topológico que cumple el segundo axioma es Lindelof.

(2) En espacios métricos vale el recíproco (es decir el segundo axioma es equivalente a la propiedad de ser Lindeloff — tenemos entonces otra equivalencia a la separabilidad en espacios métricos para agregar a las encontradas en el ejercicio 4.4.

(3) En particular $\mathbb{R}$ con la topología usual es Lindelof pero no compacto.

(4) Pero un espacio topológico secuencialmente compacto que satisface el segundo axioma de numerabilidad es compacto.

4. Espacios métricos compactos

En un espacio métrico, la compacidad tiene algunas equivalencias bastante más manejables que la definición por cubrimientos. La más obvia sería generalizar la de $\mathbb{R}^n$ (Ejercicio 6.7), pero no es verdad:

EJERCICIO 6.11. Un espacio métrico completo y acotado no es necesariamente compacto. Usar la bola unidad cerrada de ℓ_∞ (ver Ejercicio 4.13). También la bola unidad cerrada de $C([0,1])$ con la distancia d_∞ es un ejemplo (ver Ejercicio 4.14).

IDEA DE LA PRUEBA/ EJEMPLO QUE SIRVE:

En ambos casos, la idea es encontrar un conjunto infinito sin putnos de acumulación. Para ello, encontremos conjuntos infinitos cuya distancia dos a dos sea 1. Si Y es un tal conjunto, entonces no puede tener puntos de aculumación:

Sea $Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B}(0,1)$ tal que $d(y_i, y_j) = 1$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$, con $i \neq j$. Dado $z \in \overline{B}(0,1)$, consideremos $B(z, 1/3)$. Si $y_j \in B(z, 1/3)$, entonces $d(y_i, z) \geq d(y_i, y_j) - d(y_j, z) > 2/3$ (¡esto es la desigualdad triangular!). A partir de aquí tendría que ser fácil terminar el razonamiento...

COMENTARIO SOBRE ESTE EJEMPLO: Observemos que lo que hizo funcionar el razonamiento es poder tener "alejados uniformemente" infinitos puntos.

Veamos primero que los espacios métricos compactos tiene "buenas propiedades"

PROPOSICIÓN 6.28. *Todo espacio métrico compacto M es completo y satisface el segundo axioma de numerabilidad.*

DEMOSTRACIÓN (A COMPLETAR): Sea (x_n) una sucesión de Cauchy, es decir $f : \mathbb{N} \to M$ está dada por $f(n) = x_n$. Entonces, como $\mathbb{N} = \cup_{y \in \mathrm{Im}(f)} f^{-1}(y)$, tenemos que si $\mathrm{Im}(f)$ es finito existe una subsucesión x_{n_i} constante. Si $\mathrm{Im}(f)$ es infinito, entonces el conjunto $\{x_n\}$ tiene un punto de acumulación z. A partir de ahí, es fácil probar que la sucesión (x_n) es convergente: podemos construir una subsucesión convergente al punto de acumulación z, y entonces deducimos que (x_n) es convergente a z.

Que un espacio métrico completo satisface el segundo axioma de numerabilidad es una consecuencia de la caracterización de espacios métricos Lindelöf que vimos en el Ejercicio 4.4. □

4.1. Equivalencia con la compacidad secuencial.

En esta sección probamos que en un espacio métrico la compacidad y la compacidad secuencial son equivalentes, lo que da una caracterización bastante útil. Antes daremos una definición y una observación que van a ayudar en la prueba.

Definición 6.29. Sea (M, d) un espacio métrico. Un subconjunto A de M se dice *ϵ-separado* (donde $\epsilon > 0$) si dados dos puntos distintos x e y de A se cumple que $d(x, y) > \epsilon$. Además A es *ϵ-separado maximal* si no está estrictamente contenido en un conjunto ϵ-separado.

Notaremos por $\mathcal{A}_\epsilon$ a la familia de los conjuntos ϵ-separados.

Ejemplo 6.30. (1) Un punto $\{x\}$ es ϵ-separado para todo $\epsilon > 0$.
(2) Si consideramos en $\mathbb{R}^2$ una "grilla de triángulos equiláteros", tenemos que el conjunto de los vértices es ϵ-separado para todo $0 < \epsilon < 1$, pero no es 1-separado. Hallar el menor ϵ para el cual el conjunto es ϵ-separado maximal (se sugiere considerar el baricentro de un triángulo equilátero y a partir de ah;í hacer cuentitas).
(3) Que el lector no se deje engañar por el ejemplo (2): el conjunto $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ es 2/3-separado maximal, pero el conjunto $\{1/100\} \cup \{n \in \mathbb{Z} : n \neq 0\}$ también.

Lema 6.31. *Sea (M, d) un espacio métrico y $\epsilon > 0$. Entonces todo conjunto ϵ-separado $A \in \mathcal{A}_\epsilon$ está contenido en un conjunto ϵ-separado maximal.*

Demostración: Consideramos en $\mathcal{P}(M)$ el orden parcial de la inclusión y aplicamos el lema de Zorn. para ello, dado $A \in \mathcal{A}_\epsilon$, consideremos la familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_\epsilon$ de los conjuntos ϵ-separados que contienen a A. Si $\mathcal{C} \subset B$ es una familia totalmente ordenada, entonces $C_\infty = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ contiene a A y es ϵ-separado : en efecto, si $x, y \in C_\infty$, existen $C_x, C_y \in \mathcal{C}$ tales que $x \in C_x$, $y \in C_y$. Como $\mathcal{C}$ es totalmente ordenado, podemos suponer que $x, y \in C_y$, por lo que $d(x, y) > \epsilon$. $\square$

Corolario 6.32. *Si M es secuencialmente compacto, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un subconjunto de M que es ϵ-separado maximal y es finito.*

Demostración: ¡Ejercicio! Ojo con los casos límite: un conjunto de un punto es ϵ-separado para todo $\epsilon > 0$. $\square$

Teorema 6.33. *Si (M, d) es espacio métrico, son equivalentes:*
(a) M es compacto,
(b) M es compacto secuencial,
(c) M compacto numerable,
(d) todo conjunto infinito tiene punto de acumulación.

Demostración (a completar): (b) implica (c) es el contenido del Teorema 6.27.

Para probar que (c) implica (d), probamos en contrarecíproco: si un conjunto es infinito y sin puntos de acumulación, entonces tiene un subconjunto numerable $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ sin puntos de acumulación, luego $A = \overline{A}$, por lo que A es cerrado, es dedir A^c es abierto. Para cada n tomamos un entorno U_n de a_n que no corte $A \setminus \{a_n\}$ — esta operación es posible porque $A \setminus \{a_n\}$ también es cerrado: $U_n = \big(A \setminus \{a_n\}\big)^c$ sirve. La familia formada por los $\{U_n\}_n$ y A^c es un cubrimiento abierto y numerable de X que no tiene subcubrimiento finito.

Es fácil probar que (d) implica (b): si una sucesión tiene imagen finita, tiene una subsucesión convergente. Si una sucesión tiene imagen infinita, si z es un punto de acumulación de la sucesión, tomando las bolas $B(z, 1/j)$ podemos encontrar una subsucesión convergente.

Falta ver que (a) implica o (b) o (c) o (d) (eso es fácil) y que alguna (o todas) de las tres implica (a). Para esto, probar que compacto secuencial implica separable, por lo tanto compacto secuencial implica compacto numerable y Lindelof, lo que equivale a compacto. $\square$

Observación 6.34. Obseremos que en el teorema 6.33 probamos que si M es *un espacio topológico* compacto numerable, entonces todo conjunto infinito tiene punto de acumulación, ya que en la prueba no usamos que M es un espacio métrico.

La compacidad secuencial es bastante más manejable que la compacidad, por ejemplo, se puede probar la caracterización de los compactos en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ de manera más directa:

Ejemplo 6.35. Hallar los compactos de $\mathbb{R}$ usando la compacidad secuencial. Hallar los compactos de $\mathbb{R}^n$ sin usar el teorema de Tijonov.

4.2. Equivalencia con completo+totalmente acotado.

Como se vio al comienzo de la sección en el Ejercicio 6.11, un espacio métrico puede ser completo y acotado sin ser compacto. Sin embargo hay sí una hipótesis (más fuerte que ser acotado) que junto a la completitud implican la compacidad de un espacio métrico.

Definición 6.36. Un subconjunto Y de un espacio métrico (X, d) es *r-denso* si para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $d(x, y) < r$. Un espacio métrico es *totalmente acotado* si para todo $r > 0$ hay un subconjunto finito y r-denso.

Ejemplo 6.37. En un espacio métrico M un conjunto $Y \subset M$ es denso si y sólo si Y es r-denso para todo r.

La noción de r-densidad es una condición de aproximación de los puntos de M *a menos de distancia fija* (igual a r). La noción de totalmente acotado usa esa noción para imponer una condición más fuerte que el ser acotado.

Observación 6.38. Sea M un espacio métrico.

(1) Un subconjunto $Y \subset M$ es r-denso si y sólo si $M = \bigcup_{y \in Y} B(y, r)$.

(2) Un conjunto $Z \subset M$ es acotado si para todo $z \in Z$, existe $R > 0$ tal que $Z \subset B(z, R)$.

(3) Un conjunto $X \subset M$ es totalmente acotado si para todo $r > 0$, existe un subconjunto finito $A \subset X$ tal que $X \subset \bigcup_{a \in A} B(a, r)$.

Ejercicio 6.12. En un espacio métrico, un conjunto totalmente acotado es acotado.

Ejemplo 6.39. (1) un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es totalmente acotado sii es acotado.

(2) Un subconjunto X de un espacio métrico M totalmente acotado es también totalmente acotado. En efecto, dado $r > 0$, si consideramos $Y = \{y_1, \ldots, y_n\} \subset M$ tal que $M = \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, r/2)$, entonces $X = \bigcup_{i=1}^{n} \big(X \cap B(y_i, r/2)\big)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $X \cap B(y_i, r/2) \neq \emptyset$. consideremos $x_i \in X \cap B(y_i, r/2)$. Entonces $B(y_i, r/2) \subset B(x_i, r)$, por lo que $B = \{x_i\}$ es un conjunto r-denso en X (nótese que el cardinal de B puede ser estrcitamente menor que n).

Veremos en el Teorema 6.40 que la compacidad es equivalente a la completitud en un espacio totalmente acotado, por lo que deducimos del Ejercicio 6.11 que $C([0, 1])$ con la distancia d_∞ no es totalmente acotado. Veámoslo directamente:

Ejercicio 6.13. Determinar para qué valores de r existe un subconjunto finito y r-denso en la bola unidad de $C([0, 1])$ con la distancia d_∞.

Hacer lo mismo para ℓ_∞.

Teorema 6.40. *Un espacio métrico (M, d) es compacto sii es completo y totalmente acotado.*

Demostración: Supongamos (M, d) compacto. Entonces es completo por un ejercicio anterior. Para cada $r > 0$ sea $\mathcal{U}$ la familia de todas las bolas (abiertas) de radio r en M. Claramente $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X; por hipótesis existe un subcubrimiento finito. Los centros de las bolas de los elememntos del subcubrimiento forman un conjunto r-denso. Esto prueba una implicación.

Para probar la otra implicación, probaremos que si M es completo y totalmente acotado entonces es secuencialmente compacto. Se deduce entonces del Teorema 6.33 que M es compacto. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en M. Como M es totalmente acotado, existe alguna bola cerrada B_1 de radio 1 que contiene infinitos elementos de la (imagen de la) sucesión. Esta bola es también totalmente acotada, por lo que existe un cubrimiento finito de B_1 por bolas de radio $1/2$ y esto implica que existen infinitos valores de n para los cuales x_n pertenece a una bola cerrada B_2 contenida en B_1. Se construye entronces por iteración una sucesión de conjuntos encajados B_n (tales que B_n es una bola cerrada en B_{n-1}) cuyos radios tienden a 0, y tales que cada una contiene infinitos elementos de la sucesión. Por el Teorema de encaje de Cantor 4.17 existe un punto z en la intersección de las bolas B_n, y como cualquier entorno de z contiene infinitos elementos de la sucesión, se concluye que una subsucesión $(x_{n_i})_i$ converge a z. Esto prueba la compacidad secuencial de X.

5. Compacidad en $C(X)$.

El estudio de las funciones continuas de un espacio topológico (compacto) a los números complejos es una herramienta muy útil[4]. Veamos aquí algunas propiedades, en el caso de los espacios métricos.

Definición 6.41. Sea X un espacio topológico compacto. Se define $C(X)$ como el conjunto de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{C}$.

Observación 6.42. Atención: anterioremente usamos la notación $C([0,1])$ para las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$; el escritor se disculpa por el abuso de notación. Sin embargo, sepa el lector disculpar al mismo: obsérvese que toda función con codominio los números reales puede pensarse como con codominio los números complejos, así si X es un espacio topológico entonces $\mathbb{R}^X \subset \mathbb{C}^X$ y

$$\big\{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\big\} \subset \big\{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es continua}\big\},$$

y entonces podemos ver al conjunto de la izquierda como un subespacio métrico de $C(X)$. Este abuso de notación aparecerá a lo largo de toda la sección.

Observación 6.43. (1) Como la imagen de un compacto por una función continua es un compacto, y que los compactos de $\mathbb{C}$ son los cerrados y acotados, tenemos que cada función $f \in C(X)$ es acotada — es decir, $|f|$ tiene máximo (recordemos además que $|\ | : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es una función continua, por lo que la función $|f| : X \to \mathbb{R}$ es continua y tiene entonces máximo).

(2) Por otra parte, $C(X)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con la suma punto a punto. Más aún, tenemos un producto asociativo (conmutativo) de funciones punto a punto: si $f, g \in C(X)$, entonces $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

La función constante $1_X : X \to \mathbb{C}$, $1_X(x) = 1$ es un neutro para ese producto, y se verifica la propiedad distributiva respecto de la suma: $C(X)$ es un $\mathbb{C}$-álgebra conmutativa.

(3) Podemos además definir una norma en $C(X)$: si $f \in C(X)$, entonces $||f|| = \text{máx}\,|f| = \text{máx}\big\{|f(x)| : x \in X\big\}$.

Esta norma induce una distancia, a través la fórmula $d_\infty(f,g) = ||f-g||$ (¡esto hay que probarlo!). Llamamos a esta distancia la *distancia del supremo* (¡aunque sea un máximo!). Compárese esta distancia con la construida en el Ejercicio 4.14.

(4) En los cursos de análisis se verá además una operación adicional en $C(X)$: si $f \in C(X)$, entonces $f^* : X \to \mathbb{C}$ está definida por $f^*(x) = \overline{f(x)}$

[4]En los cursos de análisis se verá este enfoque en profundidad.

(el conjugado de $f(x)$), y se verán, como el lector pordá imaginarse, generalizaciones de esta idea, cómo aprovechar los espacios topológicos compactos para entender este tipo de estructura y recíprocamente.

Concentrémosnos ahora en los espacios métricos compactos.

Ejercicio 6.14. Una función continua definida en un espacio métrico compacto es uniformemente continua.

Vemos ahora cómo se caracterizan los subconjuntos compactos de $C(X)$ con la distancia del supremo . Ya sabemos que una condición es que el subconjunto sea cerrado, pero no alcanza con agregar que sea acotado (ver Ejercicio 6.11).

Primero veamos que a veces $\overline{B}(0,1) \subset C(X)$ es compacta.

Ejercicio 6.15. (1) Probar que si X es finito, entonces la bola unidad de $C(X)$ es compacta.
(2) Sea X un espacio métrico compacto y $f : \mathbb{N} \to X$, $f(n) = x_n$, un sucesión inyectiva, con límite x. Observemos entonces que $Y = \{x_n\} \cup \{x\}$ es cerrado, luego compacto. Probar que $\overline{B}(0,1) \subset C(Y)$ no es compacta.

Definición 6.44. Sea (X,d) un espacio métrico. Un subconjunto A de $C(X)$ es *equicontinuo* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $f \in A$ y $x, y \in X$ tal que $d(x,y) < \delta$, se cumple que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Es decir, cada f en A es continua (por ser $A \subset C(X)$), e inclusive uniformemente continua (pues X es compacto, ver ejercicio 6.14). La condición adicional que estamos pidiendo para que A sea equicontinuo es que "el δ de la continuidad uniforme" dependa sólo de ϵ y no dependa de cuál sea la f en A: controlamos la variación de las funciones en A "a la vez".

Ejemplo 6.45. (1) El conjunto $A = \{f_a : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ f_a(x) = ax, \ a > 0\}$, no es equicontinuo.
(2) El conjunto $A = \{f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ f_n(x) = x^n, \ n > 0\}$ tampoco es equicontinuo.
(3) El conjunto $A = \{f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ f_n(x) = n, \ n > 0\}$ es equicontinuo, pero no es acotado.

El teorema de Arzelá-Ascoli nos dice que todo subconjunto equicontinuo acotado es secuencialmente compacto, siempre y cuando sea cerrado (y por lo tanto, usando el Teorema 6.33, sabemos que es compacto).

Teorema 6.46 (Arzelá-Ascoli). *Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Sea $A \subset C(X)$ equicontinuo y acotado. Entonces toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente — en otras palabras, A es compacto.*

Demostración (a completar): Sea (f_n) una sucesión en A (es decir, $s : \mathbb{N} \to A$, con $s(n) = f_n \in C(X)$. Para cada $x \in X$ la sucesión $f_n(x)$ está acotada en $\mathbb{C}$, por ser A acotado. Se toma un subconjunto numerable y denso de X, que denotaremos $\{y_n\}$ (¿por qué existe?). La idea general de la prueba es utilizar este subconjunto denso, para encontrar una subsucesión (f_{n_k}) tal que las restricciones $(f_{n_k}|_{\{y_n\}})$ convergen a una función $f : \{y_n\} \to \mathbb{C}$. Luego usaremos la equicontinuidad para extender f a todo X.

Como el conjunto $\{f_n(y_1)\} \subset \mathbb{C}$ es acotado, existe una sucesión creciente de naturales $\{n_k^1\}_k$ tales que $f_{n_k^1}(y_1)$ converge en $\mathbb{C}$; sea $f(y_1)$ ese límite. Por la misma razón, la sucesión $f_{n_k^1}(y_2)$ tiene una subsucesión convergente, digamos $f_{n_k^2}(y_2)$, que tiende a un punto que se denotará por $f(y_2)$. Por inducción, existe, para cada m, una sucesión creciente de naturales $\{n_k^m\}_k$ que cumple:

(a) Para cada m la sucesión $f_{n_k^m}(y_m)$ converge cuando k tiende a ∞ a un punto en $\mathbb{C}$, que se denota $f(y_m)$.
(b) La sucesión $\{n_k^m\}_k$ es subsucesión de $\{n_k^{m-1}\}_k$.

La idea ahora es tomar la "subsucesión diagonal". Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos n_k^k. Por construcción, dado $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $n_k^k \in \{n_k^m\}_k$ para todo $k \geq m$, podemos entonces considerar a $\{n_k^k\}_k$ como una subsucesión de cada una de las sucesiones $\{n_k^m\}_k$. Por lo tanto, no importa cual sea el m, se tendrá que $f_{n_k^k}(y_m)$ converge a $f(y_m)$ cuando k tiende a ∞. Para alivianar notación, definimos $n_k = n_k^k$.

Consideremos ahora la subsucesión (f_{n_k}); tenemos que para cada y_m de un conjunto denso, $f_{n_k}(y_m) \to f(y_m)$. Hay que probar que la función f, hasta ahora definida en el conjunto denso $\{y_m : m \in \mathbb{N}\}$, se puede extender a una función continua definida en todo X y que esta función es límite de la sucesión f_{n_k}.

En primer lugar, se probará que $f : \{y_n\} \to \mathbb{C}$ es uniformemente continua, y por lo tanto se extiende de manera única a una función continua definida en todo X (ver Ejercvicio 4.19). Sea entonces $\epsilon > 0$; se toma el $\delta > 0$ que da la equicontinuidad de la familia A. Si $d(y_n, y_m) < \delta$, elija un n_k tal que al mismo tiempo valgan $|f(y_n) - f_{n_k}(y_n)| < \epsilon$ y $|f(y_m) - f_{n_k}(y_m)| < \epsilon$. Entonces se tendrá:

$$|f(y_n)-f(y_m)| \leq |f(y_n)-f_{n_k}(y_n)|+|f_{n_k}(y_n)-f_{n_k}(y_m)|+|f(y_m)-f_{n_k}(y_m)| < 3\epsilon.$$

Se deduce que f es uniformemente continua, definida en el conjunto denso $\{y_m\}_m$. Entonces tiene una única extensión uniformemente continua a todo X, que también se denotará por f.

Resta ver que $\{f_{n_k}\}_k$ converge a f (en la topología dada por la distancia del supremo). Dado $\epsilon > 0$, tenemos que probar que existe k_0 tal que $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $k > k_0$ y todo $x \in X$. Elija $\delta > 0$ que satisface la condición de equicontinuidad de las f_{n_k} y la continuidad uniforme de f, esto es $|g(x) - g(y)| < \epsilon$, siendo g cualquiera de las funciones f ó f_{n_k} siempre que $d(x, y) < \delta$.

Antes de continuar la prueba, necesitamos probar la afirmación siguiente

EJERCICIO 6.16. *Sea Y denso en X métrico compacto y $\delta > 0$; entonces existe $Y' \subset Y$ finito y δ-denso. Recordar que un conjunto Y' es δ-denso si todo punto de X está a menos de δ de algún punto de Y'. Dicho de otra manera, la unión de las bolas de centros en puntos de Y' y radio δ cubren X.*

Sea entonces $\epsilon > 0$ dado y elija δ como arriba. Existe Y' contenido en el conjunto $\{y_m : m > 0\}$ que es finito y δ-denso. Sea k_0 tal que $|f_{n_k}(y) - f(y)| < \epsilon$ para cualquier $y \in Y'$ y cualquier $k > k_0$ (esto es posible en virtud de la finitud de Y').

Sea x en X. Existe $y \in Y'$ tal que $d(x, y) < \delta$. Por lo tanto, para cualquier $k > k_0$ se tiene:

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_{n_k}(y)| + |f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)| < 3\epsilon.$$

Esto termina la demostración. □

COROLARIO 6.47. *Sea X espacio métrico compacto. Un subconjunto A de $C(X)$ es compacto sii es acotado, cerrado y equicontinuo.*

DEMOSTRACIÓN: Ahora que tenemos probado el teorema de Arezalá-Ascoli, es un ejercicio fácil. □

Capítulo 7

Redes

Se ha visto que el concepto de sucesión no nos ha permitido caracterizar algunas nociones topológicas, salvo en espacios métricos. En este capítulo veremos la noción de *red*, que nos permitirá obtener resultados similares a los obtenidos para espacios métricos con sucesiones.

Comencemos recordando la definición de sucesión y subsucesión.

DEFINICIÓN 7.1. Una *sucesión* en un conjunto X es una función $s : \mathbb{N} \to X$; en general se denota por $s = (s_n)_n$ o (s_n). Una *subsucesión* de la sucesión $s : \mathbb{N} \to X$ es la restricción de s a un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la *sucesión s converge a un punto $z \in X$* o *s tiene límite z* si para cualquier entorno (abierto) U de z existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \in U$ para todo $n > N$.

Un punto $z \in X$ es de *aglomeración de s* si para todo entorno (abierto) V de z existen infinitos n tales que $s_n \in V$.

EJEMPLO 7.2. Si X es un espacio topológico con la topología indiscreta, toda sucesión converge a todo punto.

OBSERVACIÓN 7.3. (1) Notar que una subsucesión de s si bien no es formalmente una sucesión, podemos considerarla como tal gracias a la siguiente observación: Si s' es una subsucesión de s entonces existe una función estrictamente creciente $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $s' = s \circ t$. Recíprocamente, si $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente, entonces $s|_{\mathrm{Im(t)}}$ es un subsucesión de s.

En general, cuando consideremos una subsucesión, la pensaremos como la sucesión asociada: notaremos $(s_{n_i}) = (s_{n_i})_i$ la subsucesión de s obtenida restringiendo s a la imagen de la función $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ creciente dada por $i \mapsto n_i$.

(2) La definición de subred dada en la Definición 7.12 más abajo se modela a partir de la observación anterior.

(3) *No* es lo mismo decir que $z \in X$ es de aglomeración de la sucesión s que decir que z es de acumulación del conjunto imagen de la sucesión s. Por ejemplo, si s es la sucesión constante igual a z, entonces z es de aglomeración de s pero $s(\mathbb{N})$ tiene un único punto, por lo que z no es de acumulación de $s(\mathbb{N})$.

(4) Además es posible que z sea de aglomeración de una sucesión s pero que no exista una subsucesión de s que converge a z (ese ejemplo no es tan fácil, se verá más adelante en 7.13).

Para poder implementar la definición de red, necesitamos establecer una noción relacionada con los conjuntos ordenados.

DEFINICIÓN 7.4. Un conjunto D con un orden $\leq$ es un *conjunto dirigido* si el orden es reflexivo y para todo par de puntos n y m en D existe $p \in D$ tal que $n \leq p$ y $m \leq p$ (existencia de cotas superiores).

Si A es un conjunto ordenado, entonces $D \subset A$ es *dirigido* si es un conjunto dirigido con el orden inducido por A en D.

EJEMPLO 7.5. (1) Si D es un conjunto totalmente ordenado, entonces es dirigido, ya que si $a, b \in D$ o bien $a \leq b$ o bien $b \leq a$.

En particular, los números naturales, enteros, racionales y reales con el orden $\geq$ son conjuntos dirigidos.

(2) Dado un conjunto X, el conjunto de las partes $\mathcal{P}(X)$ es dirigido para el orden de la inclusión. Observemos que es dirigido “para abajo” y para “arriba” (es decir para el orden de la inclusión y su orden inverso): ya que dados $A_1, A_2 \subset X$, tenemos que $A_1 \cap A_2 \subset A_i \subset A_1 \cup A_2$.

(3) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces $\mathcal{T}$ es un conjunto dirigido para el orden de la inclusión (y también para el orden opuesto).

(4) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $x \in X$, entonces la familia de los entornos de x es un conjunto dirigido para el orden de la inclusión (y también para el orden opuesto).

EJERCICIO 7.1. Dar un ejemplo de un conjunto dirigido D y un subconjunto $E \subset D$ de modo que E no sea dirigido.

EJEMPLO 7.6. Dados dos conjuntos dirigidos $(D, <)$ y $(E, \leq)$ se define el *conjunto dirigido producto* $D \times E$ considerando el orden producto $(d, e) << (d', e')$ si $d < d'$ y $e \leq e'$.

Es fácil ver que es un conjunto dirigido.

Recordemos que la de arriba no es la única manera de producir un orden en el producto cartesiano. Si dotamos a $D \times E$ con orden lexicográfico, tenemos que es un conjunto dirigido.

DEFINICIÓN 7.7. Sea X un conjunto cualquiera. Una *red en X* es una función $S : D \to X$, donde $(D, <)$ es un conjunto dirigido. Si X es un espacio topológico, entonces la *red S converge a un punto $x \in X$* si para todo entorno U de x existe un $N \in D$ tal que $S(n) \in U$ para todo n tal que $N < n$. La red suele denotarse $\{S_d\}$.

EJEMPLO 7.8. (1) Dado un conjunto dirigido D y un punto $x \in X$, tenemos la *red constante* $\{x\}_{d \in D}$, que claramente converge a x.

(2) Como los naturales son dirigidos, tenemos que toda sucesión es una red. En este caso, la convergencia como red coincide con la convergencia como sucesión.

El ejemplo anterior tiene una generalización bastante fácil:

Ejercicio 7.2. Un conjunto dirigido también puede ser finito, dar ejemplos. Probar que en ese caso, necesariamente tiene un máximo elemento. Probar que una red definida en un conjunto dirigido finito converge.

Ejercicio 7.3. Más en general, probar que si un conjunto dirigido D tiene máximo M, entonces toda red $S : D \to X$ converge a $S(M)$

Ejercicio 7.4. Dado un punto x de un espacio topológico X, consideremos la familia de entornos abiertos de x, que notamos $\mathcal{B}_x$, ordenada por la inclusión "descendente", es decir $U \geq V$ si $U \subset V$. Definimos una red $S : \mathcal{B}_x \to X$ por $S(U) = x_U \in U$. Probar que esta red converge a x.

La convergencia de redes permite caracterizar varias propiedades topológicas. Por ejemplo, tenemos la siguiente caracterización de los conjuntos cerrados:

Lema 7.9. *Un punto x está en la clausura de un conjunto A en un espacio X sii existe una red en A que converge a x.*

Demostración: Si $x \in \overline{A}$, entonces o bien $x \in A$ o bien $x \notin A$ y es de acumulación. Consideremos la familia de entornos abiertos de x, ordenada por la inclusión. Entonces como la intersección de entornos abiertos es un entorno abierto, tenemos que es un conjunto dirigido. Para cada entorno U consideramos $x_U \in A \cap \big(U \setminus \{x\}\big)$. Entonces la red así conformada converge a x.

Para el recíproco, si $x \in A$ no hay nada que probar. Si $x \notin A$, consideremos una red $\{s_d\}_{d\in D}$ en A convergente a $x \notin A$. Si U es un entorno abierto de x, tenemos existe $d_0 \in D$ tal que $s_d \in U \cap A$ para todo $d > d_0$. Pero como $s_d \neq x$ (uno pertenece a A y el otro no), tenemos que x es de acumulación de A. $\square$

Ejercicio 7.5 (Para pensar). ¿Dónde falla la prueba del Lema 7.9 cuando consideramos sucesiones?

Ejercicio 7.6. Sean T_1 y T_2 topologías en X. Probar que son equivalentes:

(a) T_1 es más débil que T_2 (o sea, $T_1 \subset T_2$).

(b) Si una red en X converge según T_2 entonces converge según T_1.

Sugerencia: Si $U \in \mathcal{T}_1$ no es abierto en $\mathcal{T}_2$, existe $x \in U$ tal que para todo $V \in \mathcal{T}_2$ entorno aberito de x, se cumple que $V \setminus U \neq \emptyset$. A partir de ahí, construir una red que converja a x en $\mathcal{T}_2$ pero no lo haga en $\mathcal{T}_1$.

Veamos ahora la caracterización de las funciones continuas usando redes:

EJERCICIO 7.7. Una función f entre espacios topológicos es continua en x sii $f \circ S$ converge a $f(x)$ cada vez que S es una red que converge a x.

Finalmente, vimos que en un espacio de Hausdorff toda sucesión converge a un sólo punto. Sin embargo el recíproco no es cierto:

EJEMPLO 7.10. En el Ejecicio 2.3, se pidió calcular cuáles son las sucesiones convergentes para la topologia "de los complementos numerables".

Veamos ahora la respuesta (dejamos afuera algunos casos, que siguen quedando como ejercicio):

Supongamos que X es un conjunto infinito no numerable y consideremos la topología de los complementos de conjuntos numerables, Sea $s : \mathbb{N} \to X$ una sucesión. Si $x \in X \setminus \operatorname{Im}(s)$, como ese conjunto es abierto, tenemos que s no puede converger a x. Sea ahora $x = s(n_0)$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Como $X \setminus \big(\operatorname{Im}(s) \setminus \{x\}\big) = \big(X \setminus \operatorname{Im}(S)\big) \cup \{x\}$ es abierto, tenemos s converge a x si y sólo si existe $n_!$ $\in \mathbb{N}$ tal que $s(n) = x$ para todo $n \neq n_1$. Deducimos entonces que las únicas sucesiones convergentes son las constantes a partir de un momento, y que éstas tiene un único límite.

Por otro lado, recordemos que en este caso, X no es Hausdorff.

Si en vez de considerar sucesiones tomamos redes, tenemos una equivalencia.

EJERCICIO 7.8. (1) Probar que un espacio X es Hausdorff sii toda red en X converge a lo más a un punto.
(2) En las hipótesis del Ejemplo 7.10, mostrar unared que converja a más de un punto.

OBSERVACIÓN 7.11. Los resultados de más arriba (o más bien sus pruebas) muestran la flexibilidad adicional que brindan las redes frente a las sucesiones. En espacios métricos, la existencia de una base numerable de entornos abiertos, totalmente dirigida, permite el uso de las la sucesiones (que son redes con dominio un conjunto numerable, totalmente dirigido) para obtener los resultados deseados, pero esa situación es muy particular.

Veamos ahora cómo generalizar la noción de subsucesión.

DEFINICIÓN 7.12. Sea $S : D \to X$ una red definida en un conjunto dirigido $(D, <)$. Diremos que una red $T : E \to X$ (definida en el conjunto dirigido $(E, <_E)$ es una subred de S si existe una función $N : E \to D$ que factoriza a T (es decir $T = S \circ N$) y tal que para todo $m \in D$ existe $p \in E$ tal que $m < N(p)$.

EJEMPLO 7.13. Así como toda sucesión es una red, toda subsucesión es una subred. Pero no toda subred es un subsucesión.

Una manera de construir subredes es vía subconjuntos dirigidos de D, (como ocurre para las sucesiones) de la siguiente manera:

Definición 7.14. Sea $(D, <)$ un conjunto dirigido. Diremos que $E \subset D$ es un conjunto cofinal si para todo $m \in D$ existe $p \in E$ tal que $m < p$.

Observación 7.15. Observar primero que la restricción del orden de D a un conjunto cofinal E es también un conjunto dirigido (¿por qué?). Por lo tanto, si S_d es una red definida en D entonces tomando la función de inclusión $N : E \to D$ se obtiene que $S \circ N$ es la restricción de S a E y cumple que es una subred de S. Esta es, de hecho, la única forma que existe de obtener una subsucesión de una sucesión, sin embargo se verá que no toda subred de una red puede obtenerse como restricción a un conjunto cofinal, ya que no le pedimos a N que sea estrictamente creciente, sino una condición de no acotación.

Ejemplo 7.16. Un caso particular de la observación anterior es el "cortarle una parte a la red": si $(D, <)$ es un conjunto dirigido y $S : N \to X$ una red, para todo $d \in D$ tenemos el conjunto cofinal $D_d = \{e \in D : d \leq e\}$.

Ejercicio 7.9. Dados una red $S : D \to X$ y un conjunto dirigido E, una función $N : E \to D$ es tal que $S \circ N$ es un subred sii $\mathrm{Im}(f)$ es un conjunto cofinal.

Observación 7.17. (1) Si un conjunto dirigido tiene máximo $m \in D$, entonces todo conjunto cofinal debe contener a m.

(2) Por otro lado, si un conjunto dirigido tiene un elemento maximal, este es un máximo.

(3) Si D no tiene máximo, tenemos que un conjunto cofinal es infinito.

La ventaja de considerar subredes como se definió y no restricciones a conjuntos cofinales es que permite detectar (al igual que para el caso de subsucesiones) los puntos de aglomeración de una red.

Definición 7.18. Sea $S : D \to X$ una red definida en un conjunto dirigido $(D, <)$ a valores en un espacio X. Un punto $x \in X$ es *de aglomeración de S* si para todo entorno U de x y cada $m \in D$ existe $n \in D$ tal que $m < n$ y $S_n \in U$.

No confundir los conceptos: un punto de aglomeración se refiere a una red (incluye a las sucesiones). Un punto de acumulación se refiere a un conjunto. Y no es lo mismo que x sea punto de aglomeración de la red S con que x sea punto de acumulación del conjunto imagen de la red S.

Ejercicio 7.10. Sea X un espacio topológico y $S : D \to X$ una red en X. Entonces $x \in X$ es de aglomeración de S sii existe una subred de S que converge a x.

Ejercicio 7.11. Sea T un red en un espacio topológico. Probar que el conjunto de puntos de aglomeración es cerrado y que la red converge a x sii x es de aglomeración de toda subred.

Ejercicio 7.12. Se considera $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico proveniente del orden usual de $\mathbb{R}$, y la red $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $S(x, y) = y$ (en $\mathbb{R}$ consideramos la topología usual). Probar que todos los puntos de $\mathbb{R}$ son de aglomeración, hallando para cada y real, una subred de S que converja a y.

Caractericemos ahora la compacidad mediante redes.

Teorema 7.19. *Un espacio X es compacto sii toda red en X tiene una subred convergente.*

Demostración: Supongamos que existe una red $S : D \to X$ sin subredes convergentes; queremos encontrar un cubrimiento sin subcubrimientos finitos. Del Ejercicio 7.11 se sigue que la red no tiene puntos de aglomeración y por lo tanto para todo x en X existen un entorno abierto U_x de x y un punto $d_x \in D$ tales que $S_d \notin U_x$ para cualquier d tal que $d_x < d$ — si no fuera el caso, podemos construir una subred convergente a x. Probemos que el cubrimiento U_x no tiene subcubrimientos finitos: dada una familia finita $\{U_{x_i} : 1 \leq i \leq n\}$, sea d_0 un elemento de D tal que $d_{x_i} < d_0$ para todo $1 \leq i \leq n$ — tal d_0 existe porque D es dirigido. Entonces para todo i, S_{d_0} no pertenece a U_{x_i}. Esto demuestra que no hay subcubrimientos finitos de $\mathcal{U} = \{U_x \ : \ x \in X\}$.

Suponga ahora que toda red tiene subred convergente. Se probará la compacidad usando la PIF (Proposición 6.13). Sea $\{C_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de subconjuntos cerrados de X tal que cualquier intersección de finitos elementos es no vacía. Se considera el conjunto D formado por todos los subconjuntos finitos de I, que ordenado con la inclusión resulta un conjunto dirigido. Sea $S : D \to X$ que asocia a cada subconjunto finito F de I un elemento de la intersección de los C_α correspondientes:

$$S(F) \in \cap_{\alpha \in F} C_\alpha.$$

Esta red tiene punto de aglomeración por hipótesis, es decir existe un $z \in X$ tal que para cualquier entorno U de z y cualquier $F \subset I$ finito existe F' finito tal que $F \subset F'$ y $S(F') \in U$. Que $S(F')$ esté en U quiere decir que todos los conjuntos $C\alpha$ con $\alpha \in F'$ intersectan U, en particular todos los $C\alpha$ con $\alpha \in F$. Como F era cualquiera, resulta que todo C_α interseca U, o sea todo entorno de z. Como cada C_α es cerrado, se tiene que $z \in C_\alpha$, por lo que la intersección de los C_α es no vacía. □

Ejercicio 7.13. Sea $X = (\mathbb{Z}^{>0} \times \mathbb{Z}^{>0}) \cup \{(0, 0)\}$, donde $\mathbb{Z}^{>0}$ son los enteros positivos. En X se define una topología declarando que todo punto es abierto excepto el $(0, 0)$ y que los entornos del $(0, 0)$ son conjuntos que contienen *casi todos* los puntos de *casi todas* las columnas; (*casi todos* significa todos salvo un número finito).

(a) Probar que esa definición induce una topología. Probar que es Hausdorff.
(b) Probar que X es Lindelof pero no compacto.

(c) Ninguna sucesión contenida en $X \setminus \{(0,0)\}$ converge a $(0,0)$. (Una sucesión que tendiera a $(0,0)$ podría a lo más tener finitos puntos en cada columna, puesto que el complemento de esa columna es entorno de $(0,0)$).

(d) Probar que $(0,0)$ es punto de aglomeración de una sucesión contenida en $X \setminus \{(0,0)\}$ pero ninguna subsucesión converge a $(0,0)$. Sin embargo, ha de existir una subred de esta sucesión que converge a $(0,0)$.

(e) Concluir de la parte (d) que no toda subred es la restricción de la red a un conjunto cofinal.

veamos cómo generalizar la noción de series a redes.

Ejercicio 7.14 (Series generalizadas). Sea A un conjunto cualquiera. Sea D el conjunto dirigido de todas las partes finitas de A ordenado por inclusión. Sea $x : A \to \mathbb{C}$ una función, y para cada F finito contenido en A defina

$$S_x(F) = \sum_{a \in F} x(a).$$

Se dice que x es *sumable sobre* A si la red $S_x : D \to \mathbb{C}$ es convergente.

(a) Probar que si $x(a) \geq 0$ para todo a, entonces x es sumable sobre A sii la red S_x es acotada.

(b) Probar que si x es sumable entonces $x(a) = 0$ salvo para una cantidad numerable de elementos a de A.

(c) Probar que x es sumable sii $|x|$ es sumable.

(d) Suponiendo que $A = \mathbb{N}$, comparar la sumabilidad de x con la convergencia de la serie $\sum x_n$.

Ejercicio opcional 7.15 (El espacio $\ell^1(A)$). Sea A un conjunto arbitrario. Se define $\ell^1(A)$ como el conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{C}$ sumables (ver el ejercicio anterior).

(a) Notar que es un espacio vectorial y que $||x||_1 = \lim S_{|x|}$ define una norma en $\ell^1(A)$.

(b) Probar que $\ell^1(A)$ es completo (con la métrica inducida por la norma).

(c) Probar que X es segundo axioma sii el cardinal de A es numerable

Capítulo 8

Metrización

En este capítulo estudaimos algunas propiedades más finas de espacios topológicos. Uno de los objetivos es mostrar un teorema de metrización que, por ejemplo, dice que todo espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ compacto, Hausdorff y con base numerable es metrizable — es decir, existe una distancia d en X tal que $\mathcal{T}$ es la topología inducida por d. Para ello será clave un teorema fundamental (Lema de Uryshon) que nos da condiciones para "separar" conjuntos cerrados vía funciones continuas. Este capítulo está tomado de las notas de Martín Sambarino.[1]

1. Axiomas de separación

A lo largo del curso, vimos varios "axiomas de separación" [2]: $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff si dados dos puntos x, y existen abiertos U_x, U_y disjuntos tales que $x \in U_x$ e $y \in U_y$. A un espacio Hausdorff también se le llama $T2$. Veamos otras nociones de separación:

Definición 8.1. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.[3]

1. Decimos que X es $T0$ si dados dos puntos existe un abierto que contiene a uno y no a otro, es decir dados $x \neq y$ dos puntos de X existe un abierto U_x tal que $x \in U_x$ e $y \notin U_x$ o existe un abierto U_y tal que $y \in U_y$ y $x \notin U_y$.
2. Decimos que X es $T1$ si dados $x \neq y$ existen abiertos de cada uno y no contiene al otro, es decir, dos puntos de X existe un abierto U_x tal que $x \in U_x$ e $y \notin U_x$ y también existe un un abierto U_y tales que $y \in U_y$ y $x \notin U_y$.
3. Decimos que X es *regular* (o $T3$) si es $T1$ y dado $x \in X$ y un cerrado A con $x \notin A$ existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ y $A \subset V$. Notemos que a la definición de regular que vimos antes, le agregamos la condición de ser $T1$, para evitar casos "patológicos" (que vimos en su momento), que serán molestos para lo que sigue.

[1] Por supuesto, fue deformado y estropeado a gusto de quien esto escribe.

[2] Los axiomas de separación que vamos a ver se refieren a separar conjuntos por abiertos disjuntos. No confundir con conexión.

[3] En lo que sigue, la "T" en estos nombres proviene del alemán *Trennungsaxiom* que significa "axioma de separación". Estos nombres o notación han caído en desuso – salvo tal vez $T1$ o $T0$. Nosotros hablaremos de espacios *Hausdorff, Regular, Normal,...*

4. Decimos que X es *normal* (o $T4$) si es $T1$ y dados dos conjuntos cerrados A, B disjuntos existen abiertos disjuntos U, V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Onserve que nuevamente agregamos la condición de ser $T1$.

La primera observación es recordar que que un espacio es $T1$ si y solamente si los puntos son cerrados.

LEMA 8.2. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces es $T1$ si y solamente si $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$.*

DEMOSTRACIÓN. ¡Ejercicio! □

Las nociones que hemos visto se han dado en orden de "jerarquía" cuya demostración es inmediata:

PROPOSICIÓN 8.3. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces:*

$$\textit{Normal} \Rightarrow \textit{Regular} \Rightarrow \textit{Hausdorff} \Rightarrow T1 \Rightarrow T0.$$

DEMOSTRACIÓN. Al agregar la condición de $T1$ en las definciones de normal y regular, esto se volivó un ejercicio fácil. □

Veamos ejemplos donde no se cumplen los recíprocos:

•El espacio $X = \{a, b\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ es T_0 pero no $T1$.

•El espacio $\mathbb{R}_f$ ($\mathbb{R}$ con la topología cofinita) es $T1$ pero no Hausdorff.

Dado que en este capítulo nos interesamos en ver cuándo un espacio topológico es metrizable, trabajaremos con espacios topológicos que son Hausdorff (¿por qué?). Nos interesamos entonces en la relación entre Hausdorff, regular y normal.

Antes de ver otros ejemplos veamos algunas propiedades que caracterizan los espacios regulares y normales que son útiles.

PROPOSICIÓN 8.4. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico donde los puntos son cerrados. Entonces*

1. *X es regular si y solamente si dado $x \in X$ y U abierto con $x \in U$ existe V abierto tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subset U$, es decir, todo punto tiene un base de entornos cerrados.*
2. *X es normal si y solamente si dado un cerrado A y abierto U con $A \subset U$ existe un abierto V tal que $A \subset V$ y $\overline{V} \subset U$.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos la demostración de la primera parte. La segunda parte es completamente análoga. Supongamos que X es regular y U es una abierto que contiene a x. Luego x y U^c son conjuntos cerrados disjuntos. Luego existen V, B abiertos disjuntos tales que $x \in V$ y $U^c \subset B$. Pero entonces $\overline{V} \subset B^c \subset U$. Recíprocamente, sea $x \in X$ y A un conjunto cerrado tal que $x \notin A$. Sea $U = A^c$. Entonces existe V abierto, tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subset A^c$. Luego V y $\overline{V}^c$ son abiertos disjuntos conteniendo a x y a A respectivamente. $\square$

Ejercicio 8.1. Verificar en las pruebas de las dos partes de la proposición 8.4 en dónde se usó que la hupótesis de normalidad, yque los puntos son cerrados.

Ejercicio 8.2. Veamos un ejemplo que es Hausdorff pero no regular. Consideremos en $\mathbb{R}$ la familia $\mathcal{B}$ formada por los conjuntos de la forma $\{x\} \cup \big((a,b) \cap \mathbb{Q}\big)$, donde $x \in (a,b)$, y $a, b \in \mathbb{R}$ son cualesquiera.

(a) Probar que $\mathcal{B}$ es una subbase de una topología.
(b) Probar que $\mathbb{R}$ con esta topología es Hausdorff.
(c) Probar que $\mathbb{R}$ con esta topología no es regular, considerando la clausura del conjunto $(a,b) \cap \mathbb{Q}$.

Ejemplo 8.5. Veamos ahora un ejemplo de espacio regular que no es normal. Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ el semiplano (cerrado) superior en donde colocaremos la siguiente topología dada por la siguiente subbase: $\mathcal{B}$ está formada por los interiores de círculos que no tocan al eje real y los conjuntos de la forma $\{x\} \cup C$, donde C es el interior de un círculo en el semiplano superior que es tangente al eje real en x.

Observemos que esta topología fuera del eje real es la misma que la usual. Veamos que es regular: sea $x \in X$ y un abierto B que lo contenga, que podemos suponer de la base. Si x no está en el eje real, entonces tomando un disco más pequeño, su clausura va a estar contenida en B. Si x está en la recta real, si tomamos un elemento de la base B' que contiene a x pero cuyo circulo tiene radio más chico que el de B resulta que la clausura (que consiste del disco cerrado) $\overline{B'} \subset B$ y concluimos que X es regular.

Ver que el semiplano con esta topología no es normal es más delicado. Primero observemos que cualquier subconjunto de la recta real $\mathbb{R}$ es cerrado con esta topología. Supongamos por absurdo que X fuese normal. La idea es asociar a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ un subconjunto de $\mathbb{Q}^2$ y de forma inyectiva, esto sería un absurdo pues la cardinalidad de las partes de $\mathbb{R}$ es mayor que la cardinalidad de las partes de $\mathbb{Q}^2$ que tiene la cardinalidad de las partes de $\mathbb{N}$. Siguiendo con la demostración y suponiendo que es normal, para cada subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ existirían abiertos disjuntos U_A, V_A de X tales que $A \subset U_A$ y $\mathbb{R} - A \subset V_A$. Consideremos $Q_A = U_A \cap \mathbb{Q}^2$. Veamos que si $B \subset \mathbb{R}$ y $B \neq A$ entonces $Q_B \neq Q_A$. Si $B \neq A$ entonces existe $b \in B$ tal que $b \notin A$ o viceversa, la demostración es igual en ambos casos. Si $b \notin A$, entonces $b \in \mathbb{R} - A$, por lo que $b \in V_A$, y entonces no puede estar en U_A. Pero entonces existe un bola tangente al eje de las x en B, contenida en V_A, y como dicha bola tiene puntos de coordenadas racionales, tenemos que $Q_A \neq Q_B$. Como las partes de $\mathbb{R}$ tiene mayor cardinalidad de las partes de $\mathbb{Q}^2$ llegamos a un absurdo.

Ya hemos visto que los espacios Hausdorff se comportan bien respecto al producto (Teorema 2.26) y es una propiedad también hereditaria (es decir, que los subespacios topológicos la "heredan"). Los mismo sucede para los regulares pero no para los normales (ver ejercicios).

PROPOSICIÓN 8.6. *Se cumple que:*

1. *Un subespacio de un espacio regular es regular*
2. *El producto de espacios regulares es regular.*

DEMOSTRACIÓN. La primera parte es inmediata y se deja como ejercicio. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos regulares. Veamos que $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es regular. Como cada uno es Hausdorff, el producto es Hausdorff y por lo tanto los puntos son cerrados. Sea ahora $x = (x_\alpha) \in X$ y sea U abierto que contiene a x. Tomemos un elemento de la base de la topología producto $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ donde A_α es abierto y $A_\alpha = X_\alpha$ excepto para un número finito $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Para cada i sea V_{α_i} abierto tal que $x_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i}$ y $\overline{V_{\alpha_i}} \subset A_{\alpha_i}$. Si $\alpha \in I - \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ tomemos $V_\alpha = X_\alpha$. Luego $V = \prod_{\alpha \in I} V_\alpha$ es un abierto que contiene a x y $\overline{V} = \prod_{\alpha \in I} \overline{V_\alpha} \subset U$. Esto muestra, vía la Proposición 8.4, que X es regular. □

La "mayoría" de los espacios a que nos enfrentamos regularmente son normales, de hecho el siguiente teorema nos da condiciones bastante naturales para un espacio sea normal. Hagamos antes una definición más: un espacio $(X, \mathcal{T})$ se llama *Lindelöf* si todo cubrimiento por abiertos de X admite un subcubrimiento numerable.

TEOREMA 8.7. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces X es normal si se cumple alguna de la siguientes afirmaciones:*

1. *X es compacto y Hausdorff*
2. *X es regular con base numerable*
3. *X es regular y Lindelöf.*
4. *X es un espacio métrico.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primeramente que X es compacto y Hausdorff. Para ver que es normal, veamos primeramente que es regular. Sea x un punto y B un conjunto cerrado, $x \notin B$. Para cada $b \in B$ existen U_b entorno de x y V_b entorno de b tal que $U_b \cap V_b = \emptyset$. La familia $\{V_b : b \in B$ cubre B y por ser compacto tenemos un cubrimiento finito $V_{b_1}, ..., V_{b_n}$. Pero entonces $V = \cup_i V_{b_i}$ y $U = \cap_i U_{b_i}$ son abiertos disjuntos conteniendo B y x respectivamente y X es regular. Veamos ahora que es normal. Es esencialmente el mismo argumento. Sean A y B dos cerrados disjuntos de X, que por ser cerrados son compactos. Para cada $a \in A$ existen U_a abierto que contiene a a y V_a abierto que contiene a B por ser regular. Ahora, la familia $\{U_a : a \in A\}$ cubre A y por lo tanto tenemos un cubrimiento finito $U_{a_1}, ..., U_{a_m}$. Pero entonces $U = \cup_i U_{a_i}$ y $V = \cap_i V_{a_i}$ son abiertos disjuntos conteniendo A y B respectivamente.

Ahora supongamos que X es regular y tiene base numerable $\mathcal{B}$. Sean A y B dos cerrados disjuntos de X. Por ser regular, podemos encontrar un cubrimiento de A por elementos de la base cuya clausura es disjunto de B y recíprocamente. Para ver esto, para cada $a \in A$ existe un elemento de base que contiene a A y es disjunto de (un abierto que contiene a) B. La unión de todos es un cubrimiento de A que es disjunto de B. Sean entonces $\{U_n\}$ y $\{V_n\}$ cubrimientos de A y B respectivamente con U_n disjunto de B para todo n y V_n disjunto de A para todo n (estos cubrimientos son numerables porque X tiene base numerable). Ahora hagamos el siguiente truco y definamos:

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \quad \text{y} \quad V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}.$$

Sea $U = \cup_n U'_n$ y $V = \cup_n V'_n$. Veamos que son abiertos disjuntos conteniendo A y B respectivamente. Es claro que $A \subset U$ pues todo punto de A pertenece a algún U_n pero a ninguno de los V_m y por lo tanto está en U'_n. De forma análoga $B \subset V$. Ahora $U \cap V = \emptyset$ pues de lo contrario existirían n, m tal que $U'_n \cap V'_m \neq \emptyset$, y digamos que $m \leq n$. Como $V'_i \subset V_i$ para todo i tendríamos que $U'_n \cap V_m \neq \emptyset$ pero esto es absurdo por construcción.

Observar que la misma prueba que acabamos de ver para espacios regulares con base numerable prueba que un espacio regular y Lindelöf es normal, puesto que lo único que se ha utilizado de la base numerable es para obtener un subcubrimiento numerable. Es decir, para cada $a \in A$ existe U_a abierto que contiene a a y tal que $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$ y extraemos del cubrimiento $\{U_a : a \in A\}$ un subcubrimiento numerable $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. De la misma forma, encontramos un cubrimiento numerable $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ de B tal que $\overline{V_n} \cap A = \emptyset$ para todo n. Haciendo el mismo truco que antes, definiendo $U'_n = U_n - \cup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$ y $V'_n = V_n - \cup j = 1^n \overline{U_j}$ encontramos dos abiertos U, V disjuntos que contienen a A y B respectivamente

Veamos finalmente que si X es métrico entonces es normal. Sean A, B cerrados disjuntos en X. Tomemos $a \in A$, entonces existe $r_a > 0$ tal que $B(a, r_a) \cap B = \emptyset$ pues B es cerrado y $a \notin B$. [4] De la misma forma, para cada $b \in B$ existe $r_b > 0$ tal que $B(b, r_b) \cap A = \emptyset$. Sean $U = \cup_{a \in A} B(a, r_a/2)$ y $V = \cup_{b \in B} B(b, r_b/2)$. Es claro que U, V son abiertos que contienen a A y B respectivamente. Veamos que son disjuntos. Si no lo fueran, existirían a, b tales que $B(a, r_a/2) \cap B(b, r_b/2) \neq \emptyset$. Si $r_b \leq r_a$ concluimos que $b \in B(a, r_a)$ lo cual es absurdo por construcción, y si $r_a \leq r_b$ concluimos que $a \in B(b, r_b)$, absurdo también. Hemos probado que X es normal.

□

[4] Es decir, $d(a, B) = \text{ínf}\{d(a, b) : b \in B\} > 0$, aunque este ínfimo pueda no ser mínimo. Observar también que $d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ puede ser cero como en el caso de $A = \{xy = 0\}$ y $B = \{xy = 1\}$ en $\mathbb{R}^2$.

2. Lema de Urysohn

En esta sección demostraremos un profundo resultado sobre separación de conjuntos cerrados por funciones continuas conocido como Lema de Urysohn. Este resultado será fundamental para tratar el teorema de metrización que veremos más adelante.

Teorema 8.8 (Lema de Urysohn). *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico normal y sean A, B dos conjuntos cerrados disjuntos. Entonces existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in B$.*

Demostración. La idea es la siguiente. Como A, B son cerrados disjuntos existen abiertos U, V disjuntos que los contienen. La idea es entonces definir una función f que valga $1/2$ en el complemento de $U \cup V$, que en U valga $\leq 1/2$ y que en V valga $\geq 1/2$. Luego, usar el mismo procedimiento con A y U^c y también con V^c y B e intentar definir f de forma que valga $1/4$ entre "medio" de A y U^c y $3/4$ entre medio de V^c y B, y así sucesivamente. De todas maneras, esto podría llevar a la idea equivocada de que f es sobre, cosa que no tendría por qué serlo. De hecho, si X no es conexo y A, B es una separación del espacio, entonces la función que buscamos es simplemente $f_{/A} = 0$ y $f_{/B} = 1$. Por este motivo, cambiaremos la idea de la siguiente forma: para cada racional[5] $p \in [0,1]$ elegiremos un abierto U_p de forma que si $p < q$ entonces $\overline{U_p} \subset U_q$. A partir de eso construiremos la función f en x como el ínfimo de los p tal que $x \in U_p$.

Tomemos entonces $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, que es un conjunto numerable, y lo numeramos $\{p_n\}$ de modo que $p_0 = 0$ y $p_1 = 1$. Construiremos los abiertos U_p de forma inductiva. Comencemos con $U_0 = U_{p_0}$. Como X es normal y A, B son cerrados disjuntos, existe un abierto U_0 tal que $A \subset U_0$ y $\overline{U_0} \cap B = \emptyset$. Luego, existe un abierto $U_1 = U_{p_1}$ disjunto de B tal que $\overline{U_{p_0}} \subset U_{p_1}$.

Supongamos ahora que para $p_1, ..., p_n$ tenemos definidos los abiertos U_{p_n} tal que si $p_i < p_j$ entonces $\overline{U_{p_i}} \subset U_{p_j}$. Veamos como construir $U_{p_{n+1}}$. Como $p_0 = 0$ es el mínimo de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $p_1 = 1$ es el máximo de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ tenemos que existen p_i, p_j con $i, j \in \{0, ..., n\}$ tal que $p_i < p_{n+1} < p_j$ y ningún otro p_t está entre p_i y p_j para $t = 0, ..., n$. Luego sabemos que $\overline{U_{p_i}} \subset U_{p_j}$ y por lo tanto $\overline{U_{p_i}} \cap U_{p_j}^c = \emptyset$ y son dos cerrados disjuntos. Luego existe un abierto $U_{p_{n+1}}$ tal que $\overline{U_{p_i}} \subset U_{p_{n+1}}$ y $\overline{U_{p_{n+1}}} \subset U_{p_j}$.

Así inductivamente, tenemos construido para cada $p \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ un abierto U_p tal que si $p < q$ tenemos que $\overline{U_p} \subset U_q$. Definimos $f : X \to [0,1]$ de la siguiente forma:

$$f(x) = 1 \mathcal{B}oxsix \notin U_1 \;\; \mathcal{B}oxy \;\; f(x) = \text{ínf}\{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1] : x \in U_p\} \mathcal{B}oxenotrocaso.$$

[5] o diádico si lo prefiere para seguir mas de cerca la idea expresada mas arriba

Es claro que $f(x) = 1$ si $x \in B$ y que $f(x) = 0$ si $x \in A$. Falta ver que f es continua. Observemos primero que $f(U_p) \subset [0,p]$ y que $f(U_p^c) \subset [p,1]$. Sea $x \in X$ y consideremos un abierto V de $[0,1]$ que contiene a $f(x)$ y que podemos suponer que V es de la forma $[0,c),(c,d)$ o $(d,1]$. En el primer caso, tomamos p tal que $f(x) < p < c$. Luego U_p es una abierto que contiene a x y como $f(U_p) \leq p$ se tiene que $f(U_p) \subset [0,c)$. En el segundo caso, tomamos p,q tales que $c < p < f(x) < q < d$. Luego, $U = U_p^c \cap U_q$ es un abierto que contiene a x y $f(U) \subset (c,d)$. Finalmente, el último caso tomemos $d < p < f(x)$. Tomemos $U = U_p^c$. Resulta que U es un abierto que contiene a x y $f(U) \subset (d,1]$. En cualquier caso hemos probado que existe un abierto U tal que $f(U) \subset V$ y esto prueba la continuidad de f. □

Decimos que dos conjuntos A,B disjuntos de un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ son separados por una función continua $f : X \to [0,1]$ si $f_{/A} = 0$ y $f_{/B} = 1$. El Lema de Urysohn no dice que si X es normal y A,B son cerrados entonces se pueden separar por una función continua. Una pregunta surge naturalmente, si A,B son cerrados disjuntos de un espacio normal, existe un función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $A = f^{-1}(0)$ y $B = f^{-1}(1)$? La demostración del Lema de Urysohn *no* da esa propiedad. En general no es cierto, pero bajo ciertas condiciones (ver ejercicios) sí es cierto.

3. Un teorema de metrización

En esta sección veremos un teorema de metrización debido a Urysohn. La idea es probar que bajo ciertas condiciones, podemos probar que un espacio topológico es homeomorfo a un subconjunto de un espacio métrico y por lo tanto es metrizable, es decir, podemos encontrar un métrica en el espacio que induce la misma topología.

Teorema 8.9. *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio regular y con base numerable. Entonces X es metrizable*

Demostración. Vamos a probar que X es homeomorfo a un subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto, que ya vimos que es métrico con la métrica:

$$d((a_n),(b_n)) = \sum_{n\geq 0} \frac{\text{mín}\{|a_n - b_n|, 1\}}{2^n}$$

Observemos que si para algún n tenemos $a_n = 1$ y $b_n = 0$ entonces

$$d((a_n),(b_n)) \geq \frac{1}{2^n}.$$

Ahora, como X es regular y tiene base numerable, entonces X es normal (y con base numerable). Sea $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\|$ la base numerable. Para cada par n,m tal que $\overline{B_n} \subset B_m$ tenemos una función continua $g_{n,m} : X \to [0,1]$ tal que $g(\overline{B_n}) = 0$ y $g(B_m^c) = 1$ por el Lema de Urysohn. Dados $x,y \in X$ distintos siempre existe n,m tales que $x \in B_n \subset \overline{B_n} \subset B_m$. Como el conjunto de los pares $\{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ es numerable, reindexando las funciones $g_{n,m}$ tenemos una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to [0, 1]$ tales que dados puntos $x \neq y$ existe n tal que $f_n(x) = 0$ y $f_n(y) = 1$. Definamos pues

$$F : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ \ \mathcal{B}oxpor \ \ F(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x), ...)$$

es decir $F(x) = (f_n(x))$. Por lo que acabamos de ver F es inyectiva. Como cada f_n es continua, tenemos que F es continua pues la topología en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es la topología producto (recordar Teorema 3.10). Veremos que X es homeomorfo a $F(X)$ con la topología relativa. Como $F : X \to F(X)$ es biyectiva, basta mostrar que F es abierta. Sea U abierto en X, queremos ver que $F(U)$ es abierto en $F(X)$ con la topología relativa, o lo que es equivalente, que cada $F(x)$ es interior a $F(U)$ para cada $x \in U$. Ahora, podemos encontrar un par k, m tal que $x \in B_k \subset \overline{B_k} \subset B_m \subset U$ y por lo tanto una función f_n tal que $f_n \equiv 0$ en un abierto que contiene x y vale 1 en el complemento de U. Pero entonces $B(F(x), \frac{1}{2^n}) \cap F(X) \subset F(U)$ pues si $F(y) \in B(F(x), \frac{1}{2^n}$ entonces $f_n(y) < 1$ y por lo tanto $y \in U$ y por lo tanto $F(x)$ es interior a $F(U)$.

$\square$

Capítulo 9

Ejercicios varios

1. Repaso de conjuntos y Funciones

Ejercicio 9.1. (a) Si I es un conjunto y A_α es un conjunto para cada $\alpha \in I$, entonces: $[\cup A_\alpha]^c = \cap A_\alpha^c$ y $[\cap A_\alpha]^c = \cup A_\alpha^c$.
(b) Sea $f : X \to Y$ una función, $A \subset X$, $B \subset Y$, $\{A_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de X y $\{B_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de Y.

Ejercicio 9.2. (a) Probar que f^{-1} preserva inclusiones, uniones, intersecciones, complementos y diferencias:
   (i) Si $B_1 \subset B_2$ entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
   (ii) $f^{-1}(\cup B_\alpha) = \cup f^{-1}(B_\alpha)$
   (iii) $f^{-1}(\cap B_\alpha) = \cap f^{-1}(B_\alpha)$
   (iv) $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$.
   (v) $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$
(b) Mostrar que f preserva sólo inclusiones y uniones:
   (i) Si $A_1 \subset A_2$ entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$.
   (ii) $f(\cup A_\alpha) = \cup f(A_\alpha)$
   (iii) $f(\cap A_\alpha) \subset \cap f(A_\alpha)$. Mostrar que la inclusión puede ser estricta. Probar que se da la igualdad si f es inyectiva.
   (iv) Hay alguna relación entre $f(A^c)$ y $[f(A)]^c$?
   (v) Probar que $f^{-1}(f(A)) \supset A$ y se da la igualdad si f es inyectiva
   (vi) Probar que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y se da la igualdad si f es sobreyectiva.

Ejercicio 9.3. Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos de X, se define el límite superior como :

$$\limsup_n A_n = \cap_{n\geq 0} \cup_{k\geq n} A_k$$

y el límite inferior como:

$$\liminf_n A_n = \cup_{n\geq 0} \cap_{k\geq n} A_k$$

Probar que

(a) $\cap_n A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \cup_n A_n$.
(b) Si A_n es una sucesión creciente de conjuntos, entonces $\liminf A_n = \limsup A_n = \cup A_n$. Si es decreciente, entonces $\liminf A_n = \limsup A_n = \cap A_n$

(c) $x \in \limsup A_n$ si y sólo si x pertenece a infinitos A_n. Además $x \in \liminf A_n$ si y sólo si x pertenece a todos salvo una cantidad finita de los A_n.
(d) Sea $\{a_n : n \geq 0\}$ una sucesión de números reales. Sea $A_n = (-\infty, a_n)$. ¿Qué dan el límite superior y el límite inferior de los conjuntos A_n? Repetir el ejercicio para $A'_n = (-\infty, a_n]$ y para $B_n = (a_n, +\infty)$

2. Cardinalidad

Ejercicio 9.4. (a) *(Principio del palomar)* Probar que si A es un conjunto finito y $f : A \to A$ es inyectiva entonces f es biyectiva.
(b) Probar que union finita y producto finito de conjuntos finitos es finita.
(c) Probar que si A is infinito y B es numerable entonces $\#(A \cup B) = \#A$.
(d) Sea $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ es finito}\}$. Probar que $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ es numerable.

Ejercicio 9.5. (a) Un número real x se dice *algebraico* (sobre el cuerpo de los racionales) si satisface una ecuación polinómica de grado positivo de la forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde los coeficientes a_i son racionales. Asumiendo que toda ecuación polinómica tiene a lo sumo finitas raices, mostrar que el conjunto de los números algebraicos es numerable.
(b) Un número real es trascendente is no es algebraico. Mostrar que el conjunto de los números trascendentes tiene la potencia del continuo.

Ejercicio 9.6. Probar que si $A \subset \mathbb{R}$ es no numerable entonces A tiene un punto de acumulación.

Ejercicio 9.7. Probar que el conjunto de bolas de $\mathbb{R}^n$ (con las distancia euclídea) cuyo centro tiene todas sus coordenadas racionales y cuyo radio es racional es numerable.

Ejercicio 9.8. Probar que $\#\mathbb{R}^k = \#\mathbb{R}$.

Ejercicio 9.9. (a) Probar que $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ tiene el cardinal de $\mathbb{R}$.
(b) ¿Cuál es el cardinal de $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$?

Ejercicio 9.10. (a) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ y a $A \subset V$ un conjunto numerable. Probar que el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de A con coeficientes en $\mathbb{Q}$ es numerable.
(b) Considere $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Probar que una base de Hamel[1] es no numerable. ¿Que cardinal tiene?

[1] Una base de Hamel es lo que en el curso de álgebra lineal se llama una base.

EJERCICIO 9.11 (Álgebra transfinita). Sean A y B dos conjuntos. Se definen

- $\#A + \#B = \#(A \cup B)$
- $\#A.\#B = \#(A \times B)$
- $\#A^{\#B} = \#\{f : B \to A\}$.

(a) Sean A y B tales que B es infinito y $\#A \leq \#B$. Probar que
  (I) $\#A + \#B = \#B$. SUGERENCIA: probar mediante el Lema de Zorn que todo conjunto infinito se escribe como unión disjunta de conjuntos numerables.
  (II) $\#B.\#B = \#B$ SUGERENCIA: Sea $L = \{(E, f_E) : E \subset B, f_E : E \to E \times E \text{ biyectiva}\}$. Encontrar un elemento maximal (M, f) y probar que $B - M$ es finito.
  (III) Si $A \neq \emptyset$ entonces $\#A.\#B = \#B$.
(b) Sea $\#A = a, \#B = b$ y $\#C = c$. Probar que
  (I) $(ab)^c = a^c b^c$
  (II) $a^{(b+c)} = a^b + a^c$.
  (III) $(a^b)^c = a^{bc}$.

EJERCICIO 9.12. (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ para todos } a, b \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Probar que si f es continua entonces f es lineal
(b) Construir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satifaga (3) y que no sea continua en ningún punto.

3. Topologías, bases y subbases

EJERCICIO 9.13. Determinar si las siguientes son topologías en los conjuntos X que se indican.

(a) En $\mathbb{N}$, sea p un primo y la familia $\tau = \{A \subset \mathbb{N} : p^n \in A \ \forall n \geq n_0 \text{ para algún } n_0\} \cup \{\emptyset\}$.
(b) En $\mathbb{R}^2$ y $\tau = \{(-\infty, a) \times (-\infty, b) : a, b \in \mathbb{R}.\}$.

EJERCICIO 9.14. Sea X un conjunto con un orden total $\leq$. Probar que $\tau = \{x \in X : a < x < b, a, b \in X.\}$ es una topología (llamada la *topología del orden*).

EJERCICIO 9.15. Sea X un conjunto. Probar que

(a) La intersección de una colección cualquiera de topologías en X es una topología en X.
(b) La unión de dos topologías en X puede no ser una topología en X.
(c) Sea $\{\tau_\alpha\}$ una familia de topologías en X. Mostrar que existe una única topología en X menor entre todas aquellas que contienen a todas las τ_α y que existe una única topología mayor entre todas aquellaas que están contenidasen todas las τ_α.

(d) Si $X = \{a, b, c\}$ sean $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$. Encontrar la menor que contiene a ambas y la mayor contenida en las dos.

Ejercicio 9.16. Mostrar que $\mathcal{B}$ es base de una topología de X entonces la topología generada por $\mathcal{B}$ es igual a la interesección de todas las topologías de X que contienen a $\mathcal{B}$. Probar lo mismo para una subbase.

Ejercicio 9.17. Decidir si las siquientes familias de conjuntos son subbases para las topologías indicadas.

(a) $\{X - \{x\}\}$ para la topología del complemento finito.
(b) $\{X - \{x\}\}$ para la topología del complemento numerable

4. Clausura, interior, frontera...

Ejercicio 9.18. Hallar interior, clausura y frontera de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ conla topología usual. Determinar si son abiertos y si son cerrados.

(a) $A = \{(x, y) : x > 0, y \neq 0\}$.
(b) $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{Q}$ o $y \in \mathbb{Q}\}$.
(c) $C = \{(x, y) : x \neq 0, y = \sin(\frac{1}{x})\}$.
(d) $C = \{(x, y) : xy = \frac{1}{n}$ para algún entero positivo $n\}$.

Ejercicio 9.19. Sea X un espacio topológico y $A, B \subset X$. Probar que:

(a) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
(b) $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ y $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(c) $\bigcup_\alpha \overline{A}_\alpha \subset \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$, dar un ejemplo en que la inclusión sea estricta.
(d) Las igualdades $(A \overset{\circ}{\cup} B) = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ no son ciertas en general.
(e) $\overline{A} = A \cup \partial A$ y $\overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A$.
(f) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$. Dar un ejemplo en que la inclusión sea estricta.
(g) $(\overset{\circ}{A^c}) = \left(\overline{A}\right)^c$ y $\overline{(A^c)} = \left(\overset{\circ}{A}\right)^c$.
(h) un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a su frontera y es abierto si y sólo si es disjunto con su frontera.
(i) ¿Es cierto que si A es abierto $A = \overset{\circ}{\overline{A}}$?

Ejercicio 9.20. (a) Probar que $\mathcal{S} = \{[a, \infty) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ es sub-base de una topología τ en $\mathbb{R}$.
(b) Describir los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados de $(\mathbb{R}, \tau)$.
(c) Dar la clausura e interior de los siguientes conjuntos, donde $x, y, z \in \mathbb{R}$:
   (i) $\{x\}$.
   (ii) $\{x, y\}$ donde $x \neq y$.

(III) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x > y\}$.
(IV) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x > y, x \notin \mathbb{N}\}$.

5. Base numerable, espacios separables y Hausdorff

EJERCICIO 9.21. En los siguientes ejemplos determinar si el espacio topológico es separable, tiene base numerable o es Haudorff.

(a) $\mathbb{R}$ con la topología usual.
(b) $\mathbb{R}$ con la topología del complemento finito.
(c) $\mathbb{R}$ con la topología del complemento numerable
(d) $\mathbb{R}$ con la topología del límite inferior
(e) $\mathbb{R}^2$ con la topología usual
(f) $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico.
(g) $\mathbb{R}^2$ con la topología $\tau = \{(-\infty, a) \times (-\infty, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

6. Topología relativa

EJERCICIO 9.22. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. Consideremos A con la topología relativa.

(a) Probar que si A es abiero en X y B es abierto en A entonces B es abierto en X.
(b) Probar que si A es cerrado en X y B es cerrado en A entonces B es cerrado en X.
(c) Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea $A = [0, 1) \cup \{2\}$. Cuales son los subconjuntos de A que son a la vez abiertos y cerrados en A?

EJERCICIO 9.23. Consideremos $X = [0, 1] \times [0, 1]$. Consideremos X con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicografico. Podemos dotar a X también una topología dado por el orden lexicográfico en X ¿Son la misma?

7. Funciones continuas

EJERCICIO 9.24. Sean X y τ_1, τ_2 dos topologías en X.

(a) Probar que τ_1 es mas fina que τ_2 si y solamente si $id_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua.
(b) Probar que $\tau_1 = \tau_2$ si y solamente si $id_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es un homeomorfismo.

EJERCICIO 9.25. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y sean $f : (X, \tau_X) \to (X, \tau_X)$ y $g : (Y, \tau_Y) \to (Y, \tau_Y)$ funciones continuas. Probar que $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ dada por $f \times g(x, y) = \big(f(x), g(y)\big)$ es continua con la topología producto.

EJERCICIO 9.26. Probar que las propiedades de un espacio topológico: ser *separable, tener base numerable, ser Hausdorff* se preservan por homemorfismos.

Ejercicio 9.27. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y consideremos $X \times Y$ con la topología producto. Probar que las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ son funciones continuas y abiertas.

Ejercicio 9.28. Consideramos en $\mathbb{R}$ las topologías usual, que notamos τ_1, de los complementos finitos que notamos τ_2 y la de aquellos conjuntos que contienen al cero (unión el vacío), que notamos τ_3.

(a) Encuentre una función continua $f : (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$ que no lo sea para $(\mathbb{R}, \tau_1)$ como espacio de salida.
(b) Encuentre una función continua $f : (\mathbb{R}, \tau_3) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$ que no lo sea para $(\mathbb{R}, \tau_2)$ como espacio de salida.
(c) Muestre que toda función continua resepcto $(\mathbb{R}, \tau_2)$ como espacio de salida, lo es respecto $(\mathbb{R}, \tau_1)$ como espacio de salida.

Ejercicio 9.29. Recordemos que una función es *abierta* si manda abiertos en abiertos

(a) Sea $[0, 1)$ con la topología relativa y $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ con la topología relativa heredada de $\mathbb{R}^2$ con la usual. Sea $f : [0, 10 \to S^1$ dada por $f(t) = e^{2\pi i t}$. ¿Es f un homemorfismo? ¿Es f biyectiva? ¿Es f abierta?
(b) Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y abierta. Probar que es inyectiva. ¿Es necesariamente sobreyectiva?
(c) Encontrar una función $f : S^1 \to S^1$ que sea continua, abierta, sobreyectiva pero no inyectiva.
(d) Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua, abierta y sobreyectiva, ¿es necesariamente un homemorfismo?

Ejercicio 9.30. Identificación de algunas superficies.

(a) Sean X e Y dos espacios topológicos, $A \subset X$, $B \subset Y$ y $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ dos funciones continuas tales que $f(A) = B$, $g(B) = A$ y $f \mid_A$ y $g \mid_B$ son inversa una de la otra. Probar que A y B son homeomorfos.
(b) Probar que el disco abierto $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ ||x|| < 1\}$ y $\mathbb{R}^n$ son homeomorfos.
(c) Sean $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 < ||x|| < 2\}$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$, y $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ ||x|| = 1\}$ probar que son homeomorfos $\mathbb{A}$, C, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ donde la topología del último espacio está generada por los conjuntos $U \times (a, b) := \{(\theta, x) \ / \ \theta \in U \ , \ x \in (a, b)\}$ siendo U una abierto relativo de $\mathbb{S}^1$.
(d) Probar que el disco cerrado $\mathbb{D}^2$ y el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ son homeomorfos.
(e) Probar que el disco cerrado $\mathbb{D}^2$ y un conjunto de la forma $\mathbb{D}^2 \setminus C_\theta$ con $C_\theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0, \ \theta|x| < y\}$ son homoeomorfos para todo $\theta \in [0, +\infty)$. Probar que los interiores de dichos conjuntos son homeomorfos.

(f) Si consideramos ahora el disco abierto $\mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ ||x|| < 1\}$ y $\mathbb{D}^2 \setminus \{(x, y)y \geq 0\}$, son estos conjuntos homeomorfos?

8. Conexión

Ejercicio 9.31. Sean D_1 y D_2 dos discos abiertos en el plano tal que $\overline{D_1} \cap \overline{D_2}$ se intersectan en un solo punto (es decir, los circulos del borde de los discos son tangentes). ¿Cuáles de los conjuntos $D_1 \cup D_2, \overline{D_1} \cup D_2, \overline{D_1} \cup \overline{D_2}$ son conexos?

Ejercicio 9.32. Dar un ejemplo de un subconjunto conexo C en $\mathbb{R}^2$ tal que ∂C no sea conexo.

Ejercicio 9.33. Sean τ y τ' dos topologías en X. Si $\tau' \supset \tau$, la conexión de X según una topología, ¿que consecuencia tiene sobre la conexión en la otra?

Ejercicio 9.34. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$ un subconjunto. Sea $C \subset X$ un subconjunto conexo. Probar que si $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap A^c \neq \emptyset$ entonces $C \cap \partial A \neq \emptyset$.

Ejercicio 9.35. Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ (con las topologías usuales) una función continua. Probar que existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.[2]

Ejercicio 9.36. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua (con la topología usual). Probar que existe x tal que $f(x) = x$.

Ejercicio 9.37. Probar que el producto de dos espacios conexos por caminos es conexo por caminos.

Ejercicio 9.38. Determinar si son conexos o conexos por caminos los siguientes subconjuntos Y de $\mathbb{R}^2$ (con la topología relativa de la usual). Si no lo son determinar su componentes conexas y componentes conexas por caminos. Determinar si son o no localmente conexos o localmente conexos por caminos o en que puntos lo son.

(a) Y es la curva del seno del topólogo $\overline{S}$ donde $S = \{(x, \sin\frac{1}{x} : x \in (0, 1]\}$.
(b) $Y = S \cup (0, -1) \cup (0, 1)$ donde S es como en la parte anterior.
(c) $Y = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\} \times [0, 1] \cup \{0\} \times [0, 1]$
(d) $Y = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\} \times [0, 1] \cup \{0\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\}$.
(e) $Y = \cup_{n \in \mathbb{Z}}\{(x, \sin\frac{1}{x-n}) : x \in (n, n + 1)\}$.

Ejercicio 9.39. Dar un ejemplo de un subconjunto Y de $\mathbb{R}^2$ que sea conexo y $p \in Y$ tal que Y sea localmente conexo en p pero no localmente conexo por caminos en p.

[2]Es el caso unidimensional del Teorema de Borsuk-Ulam: una función $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ continua tiene igual imagen en un par de puntos antipodales, es decir, existe x tal que $f(x) = f(-x)$. Esto se acostumbra a ejemplificar diciendo que siempre hay en la Tierra dos puntos antipodales donde la temperatura y la presión son iguales.

EJERCICIO 9.40. Dar un ejemplo de una función continua que no preserve la conexión local o la conexión local por caminos.

EJERCICIO 9.41. Sea (X,τ) un espacio topológico conexo. Decimos que $x \in X$ es un *punto separador* si $X - \{x\}$ no es conexo.

(a) Sean X, Y espacios topológicos conexos y sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Probar que puntos separadores de X se corresponden via f en puntos separadores de Y. Deducir que X e Y tienen la misma cantidad de puntos separadores y de puntos no separadores.
(b) Utilizar lo anterior para determinar que ninnguno par de los siguientes espacios son homeomorfos:
   (I) Intervalo cerrado $[a,b]$.
   (II) Intervalo abierto (a,b).
   (III) El círculo S^1.
   (IV) Una figura del tipo 8: dos circulos tangentes en el plano
   (V) Tres círculos tangentes en el plano dos a dos.
   (VI) Tres círculos A, B, C en el plano tal que A tangente con B, A tantente con C y A y C disjuntos.
   (VII) Tres segmentos en el plano que tienen solamente un punto en comun entre ellos y es un extremo de los segmentos (una "helice").

EJERCICIO 9.42. Utilizar el Teorema de Jordan (*toda curva cerrada simple en S^2 separa la esfera en dos componentes conexas*) para mostrar que S^2 y $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ no son homeomorfos.

9. Compacidad

EJERCICIO 9.43. Sea (X,τ) un espacio topológico.

(a) Probar que la unión finita de compactos es compacto.
(b) Mostrar que la intersección de dos conjuntos compactos puede no ser compacta.
(c) Probar que si X es Hausdorff, entonces la intersección de compactos es compacta.

EJERCICIO 9.44. Sea $\mathbb{R}_f$ la topología cofinita en los reales. Probar que cualquier subconjunto de $\mathbb{R}_f$ es compacto.

EJERCICIO 9.45. Sean A, B subconjuntos compactos de un espacio Hausdorff X. Probar que existen abiertos U, V disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

EJERCICIO 9.46. Probar que si Y es compacto entonces la proyección $p_1 : X \times Y \to X$ es cerrada para todo X.[3]

---

[3]En realidad este resultado es una equivalencia, pero el recíproco es medio complicado de probar.

SUGERENCIA Para una dirección probar primer que para todo $x \in X$, y todo abierto $U \subset X \times Y$ tal que $\{x\} \times Y \subset U$, se cumple que exuste $W \subset X$ entorno abierto de x tal que $W \times Y \subset U$.[4]

EJERCICIO 9.47. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función.

(a) Probar que si Y es Hausdorff y f es continua entonces el gráfico de $f, G_f = \{(x, f(x) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.
(b) Probar que si Y es compacto Hausdorff y el gráfico G_f de f es cerrado en $X \times Y$ entonces f es continua. Sugerencia, si V es un abierto de $f(x_0)$ entonces $G_f \cap (X \times (Y - V))$ es cerrado.

EJERCICIO 9.48. Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos cerrados y conexos, linealmente ordenada por la inclusión. Probar que $\cap_{A \in \mathcal{A}} A$ es compacto y conexo.

EJERCICIO 9.49. Sea X un espacio topológico que tiene la propiedad de Bolzano Weiestrass, es decir, todo conjunto infinito tiene un punto de acumulación.

(a) Si $f : X \to Y$ es continua, ¿$f(X)$ satisface la propiedad de B-W.?
(b) Si A es un subconjunto cerrado de X, ¿satisface A la propiedad de B-W?
(c) Si X es un subespacio de un espacio Hausdorff Z, ¿es X cerrado en Z?

EJERCICIO 9.50. Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau)$ donde $\tau = \{(-a, a) : a \in \mathbb{R}, a \geq 0\} \cup \emptyset$.

(a) Hallar un compacto que no sea cerrado
(b) Hallar un compacto cuya clausura no sea compacta.
(c) Probar que $\mathbb{R}, \tau)$ verifica la propiedad de Bolzano-Weiestrass.

EJERCICIO 9.51. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $A \subset X$ y $x \in X$. Definimos $d(x, A) =\in \{d(x, a) : a \in A\}$.

(a) Probar que $d(x, A) = 0$ si y solamente si $x \in \overline{A}$.
(b) Probar que si A es compacto, entonces $d(x, A) = d(x, a)$ para algún $a \in A$.
(c) Se define ε-entorno de A como $U_\varepsilon(A) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$. Probar que $U_\varepsilon(A) = \cup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.
(d) Si A es compacto y U es un abierto que contiene a A entonces existe ε tal que $U_\varepsilon(A) \subset U$. Muestre que si A no es compacto, la afirmación puede ser falsa.

EJERCICIO 9.52. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $f : X \to X$ es una isometría si $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Pruebe

[4]Este resultado es conocido como el "lema del tubo", en la prueba que el producto de compactos es compacto usamos algo parecido...

que si X es compacto y f es una isometría, entonces f es biyectiva y un homeomorfismo.

Ejercicio 9.53. Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \to X$ se dice *contráctil* si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Se dice que f es una contracción si existe $0 < \alpha < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

(a) Probar que si f es una contracción entonces es contráctil. Probar que toda aplicación contráctil es continua.
(b) Probar que si X es compacto y $f : X \to X$ es una contracción, entonces tiene un *punto fijo*, es decir, existe x_0 tal que $f(x_0) = x_0$.
(c) Dar un ejemplo de un espacio X compacto y $f : X \to X$ contráctil que no sea una contracción.
(d) Probar que si X es compacto y $f : X \to X$ es contráctil, entonces tiene un punto fijo.

Ejercicio 9.54 (Compactificación con un punto o de Alexandroff). Este ejercicio encaja todo espacio topológico en un espacio topológico compacto. Sea (X, τ) un espacio topológico y designemos por ∞ un elemento que no está en X. Consideremos $X^* = X \cup \{\infty\}$. Definimos una base $\mathcal{B}$ de X^* así: los abiertos de X, y los conjuntos formados por ∞ unión complementos de compactos y cerrados de X.

(a) Probar que $\mathcal{B}$ es una base de una topología en X^*, que X^* es compacto con esta topología y que $\overline{X} = X^*$.
(b) Probar que la inclusión $i : X \hookrightarrow X^*$ es un homeomorfismo sobre su imagen.
(c) Probar que si X es Hausdorff y localmente compacto[5], entonces X^* es Hausdorff.
(d) Probar que si $f : X \to Y$ es una función continua e inyectiva en un espacio compacto Y, entonces f se extiende a una función $\widetilde{f} : X^* \to Y$ con continuidad.
(e) Probar que si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto e Y es una compactificación de X tal que $Y \setminus X$ es sólo un punto, entonces existe un homeomorfismo entre Y y X^* que es la identidad en X.

Ejercicio 9.55. (a) Probar que la compactificación con un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo S^n.
(b) Dar una descripción de la compactificación con un punto en los siguientes casos:
  (i) El cilindro $S^1 \times (0, 1)$.
  (ii) La banda $B = \mathbb{R} \times [0, 1]$.
  (iii) Un cuadrado sin los vértices.

[5]En realidad, la compactificación a un punto tiene gracia cuando el espacio es localmente compacto

10. Topologías producto y cociente

EJERCICIO 9.56. Consideremos $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ donde en $\{0,1\}$ colocamos la topología discreta y en Σ la topología producto. Probar que Σ es (homeomorfo) al conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.

EJERCICIO 9.57. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_\alpha X_\alpha$ con la topología producto. Sea $A_\alpha \subset X_\alpha$ y sea $A = \prod_\alpha A_\alpha$. Probar que $\overline{A} = \prod_\alpha \overline{A_\alpha}$.

EJERCICIO 9.58. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_\alpha X_\alpha$ con la topología producto. Sea $\mathbf{x_n}$ una sucesión en X. Probar que $\mathbf{x_n}$ converge a $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ si y solamente si $\mathbf{x_n}(\alpha) \to \mathbf{x}(\alpha)$ para todo $\alpha \in I$. Probar que una red $(T_d)_{d\in D}$ converge a $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ si y solamente si la red $(T_d(\alpha))_{d\in D}$ converge a $\mathbf{x}(\alpha)$ para todo $\alpha \in I$. [6]

EJERCICIO 9.59. Consideremos $\mathbb{R}^\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto donde $\mathbb{R}$ tiene la topología usual. Probar que es metrizable. ¿Satisface el primer y/o segundo axioma de numerabilidad? ¿Es separable?

EJERCICIO 9.60. En $\mathbb{R}$ consideremos la distancia $d_S(x,y) = \text{mín}\{|x - y|, 1\}$ y en $\mathbb{R}^\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la *topología uniforme*, es decir con la distancia $d((a_n),(b_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_s(a_n, b_n)$. ¿Que relación hay entre esta topología y la topología producto? Probar que no es separable (y por lo tanto no tiene base numerable). ¿Cuál es la clausura en esta topología de $A = \{(a_n) : a_n = 0 \forall n \geq m \text{ para algún } m\}$?

EJERCICIO 9.61. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_\alpha X_\alpha$ con la topología producto. Probar que

(a) X es localmente compacto si y solamente si X_α es localmente compacto para cada α y X_α es compacto excepto para una cantidad finita de $\alpha's$.
(b) Probar que X tiene base local numerable (satisface primer axioma de numerabilidad) si y solamente si cada X_α tiene base local numerable y todos los X_α, excepto una cantidad *numerable*, tienen la topología trivial.
(c) Probar que X tiene base numerable (satisface segundo axioma de numerabilidad) si y solamente si cada X_α tiene base numerable y todos los X_α, excepto una cantidad *numerable*, tienen la topología trivial.
(d) Concluir que $X = [0,1]^{\mathbb{R}}$ con la topología producto, donde $[0,1] \subset \mathbb{R}$ tiene la topología usual, es compacto y no es metrizable.

EJERCICIO 9.62. (a) Sea $X = [0,1]$ con la topología usual. Encuentre una relación de equivalencia en X para que el cociente sea finito y tenga al menos un punto aislado. ¿Se podrá hacer un cociente de forma tal de obtener un conjunto finito con la topología discreta?

[6] Por este motivo, la topología producto es la topología de la *convergencia puntual*.

(b) Para el espacio anterior, encuentre una relación de equivalencia para la cual el cociente no sea Hausdorff.

Ejercicio 9.63. Sea $X = [0,1]$ con la topología usual y se consideran las siguientes relaciones de equivalencia en X:

• Defina $(x,y) \in R_1$ si $x = y$ o bien ($x = 0$ e $y = 1$) o bien ($x = 1$ e $y = 0$).

• Defina $(x,y) \in R_2$ si $x = y$ o si $x = 1 - y$.

En ambos casos, probar que son relaciones de equivalencia, determinar el espacio cociente y hallar un subespacio de $\mathbb{R}^2$ homeomorfo al cociente. Se pide fórmula explícita para los homeomorfismos correspondientes.

Ejercicio 9.64. Probar que el cociente de un espacio separable es separable. ¿Es cierto que el cociente de un espacio con base numerable tiene base numerable?

Ejercicio 9.65. Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia y $X_{/\sim}$ es espacio cociente y$p : X \to X_\sim$ el mapa cociente. Probar que A es cerrado en $X_\sim$ entonces $p^{-1}(A)$ es cerrado. Probar que si $X_\sim$ es Hausdorff, entonces las fibras $p^{-1}(y)$ son cerradas.

Ejercicio 9.66. Consideremos $\mathbb{R}^2 - \{(0,0\}$ y la relación de equivalencia $u \sim v$ si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$. El espacio cociente es la linea proyectiva $\mathbb{R}P^1$. Probar que si en S^1 identificamos puntos antipodales, obtenemos $\mathbb{R}P1$. Probar que $\mathbb{R}P1$ es homeomorfo a S^1.

Ejercicio 9.67. En $\mathbb{R}$ definimos la relación de equivalencia $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Probar que el cociente tiene la topología indiscreta.

Ejercicio 9.68. En $\mathbb{R}^2$ consideremos $(x,y) \sim (x',y')$ sii $x - x' \in \mathbb{Z}$. Identificar el cociente.

Ejercicio 9.69. Consideramos en $\mathbb{R}^2$ la relación $x \sim y$ sii $x - y \in \mathbb{Z}^2$.

(a) Probar que $\mathbb{R}^2/\sim$ es homeomorfo a $S^1 \times S^1$. A este espacio se lo conoce como toro 2 dimensional y se lo denota $\mathbb{T}^2$.
(b) Consideramos rectas en $\mathbb{R}^2$ dadas por $r_\theta = \{(x,y) \ / \ y = \theta x\}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$ tal que $\pi(x,y) = \overline{(x,y)}$. Probar que si θ es racional, entonces $\pi(r_\theta)$ es una curva cerrada en $\mathbb{T}^2$ (es decir, existe $\alpha : [0,1] \to \mathbb{T}^2$ continua con topología usual en $[0,1]$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$), y que si θ es irracional entonces $\pi(r_\theta)$ es un conjunto denso en $\mathbb{T}^2$.

Ejercicio 9.70. Sea S^2 la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$ y $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la simetría con respecto al plano $z = 0$. Definimos la relación en S^2: $x \sim y$ sii ($x = s(y)$ o $x = y$). Pruebe que $\sim$ es de equivalencia y caracterice el espacio $S^2/\sim$.

Ejercicio 9.71. En $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ se consideran las siguientes relaciones de equivalencia. Identificar los espacios cociente.

(a) $(0,y) \sim (1,y)$ y $(x,y) \sim (x,y)$ en otro caso.
(b) $(0,y) \sim (1,1-y)$ y $(x,y) \sim (x,y)$ en otro caso.
(c) $(0,y) \sim (1,y)$, $(x,0) \sim (x,1)$ y $(x,y) \sim (x,y)$ en otro caso.
(d) $(0,y) \sim (1,1-y)$, $(x,0) \sim (x,1)$ y $(x,y) \sim (x,y)$ en otro caso.

11. Potpourri de ejercicios

Ejercicio 9.72. Sea (X,T) compacto Hausdorff. Si $T_1 \supset T$ pero $T_1 \neq T$, entonces (X,T_1) es Hausdorff pero no es compacto.

Si $T_2 \subset T$ pero $T_2 \neq T$, entonces (X,T_2) es compacto pero no es Hausdorff.

Ejercicio 9.73 (Número de Lebesgue de un cubrimiento). Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de un espacio métrico X. Entonces $L > 0$ es número de Lebesgue de $\mathcal{U}$ si cualquier bola en X de radio L está contenida en un elemento de $\mathcal{U}$. Por ejemplo, la familia de intervalos $\{(1/n, 2/n) : n > 1\}$ es un cubrimiento abierto de $(0,1)$, pero no tiene número de Lebesgue, ya que para cubrir el intervalo $(0,L)$ se necesita usar más de un elemento del cubrimiento. Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de un espacio compacto, entonces $\mathcal{U}$ tiene número de Lebesgue.

Ejercicio 9.74. Sea X un espacio métrico. Probar que dados dos cerrados disjuntos, existen abiertos disjuntos que los contienen, es decir, todo espacio métrico es normal.

Ejercicio 9.75. Sea (M,d) un espacio métrico. Para cualquier subconjunto A de X se define $d(x,A) = \inf\{d(x,y) \ : \ y \in A\}$. Probar que $d_A : M \to \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x,A)$ es uniformemente continua, y que $d_A^{-1}(0)$ es igual a la clausura de A.

Ejercicio 9.76. Sea (M,d) espacio métrico y $\mathcal{K}$ el conjunto de todos los subconjuntos compactos de M. En $\mathcal{K}$ se define una distancia así : dados K_1 y K_2 compactos defina $\rho(K_1,K_2) = \max\{d(x,K_2) \ : \ x \in K_1\} + \max\{d(x,K_1) \ : \ x \in K_2\}$. Probar que está bien definida (es decir existen los mínimos en cuestión y que es efectivamente una distancia. Probar que la distancia entre dos conjuntos es menor que ϵ sii cada uno de ellos está contenido en el ϵ-entorno del otro. Probar también que el espacio métrico $(\mathcal{K},\rho)$ es completo.

Ejercicio 9.77. Probar que con la topología de los intervalos semiabiertos $\mathbb{R}$ es no conexo y hallar sus componentes. Probar que es Hausdorff, regular y normal y que por lo tanto $\mathbb{R}^2$ con la topología producto es Hausdorff y regular. Probar que no es normal: por ejemplo en la recta $x+y=1$, se consideran los conjuntos A de puntos con ambas coordenadas irracionales y el conjunto B de los puntos cuyas coordenadas son ambas racionales. Probar que A y B son cerrados y disjuntos pero que no hay abiertos disjuntos que los contengan.

Ejercicio 9.78. Sea X un espacio topológico de Hausdorff que no es normal y sean A y B cerrados disjuntos con la propiedad de que dos abiertos que contienen a A y B siempre se intersectan. Se considera la siguiente relación R en X: $(x, y) \in R$ si $x = y$ o ambos x e y pertenecen a A, o ambos x e y pertenencen a B. Probar que es una relación de equivalencia, las clases de equivalencia son A, B y cada uno de los puntos del complemento.

Probar que R es cerrada en $X \times X$ pero que el cociente X/R no es Hausdorff.

Ejercicio 9.79. Sea $\mathbb{Z}$ con la topología T definida por: $A \in T$ si $2n \in A$ sii $2n-1 \in A$. Probar que eso define una topología. Estudiar si es Hausdorff, conexo, compacto.

Ejercicio 9.80. Las verticales $x = 1/n$ $0 \leq y \leq 1$ unión dos puntos el $(0, 0)$ y el $(0, 1)$ no es conexo, los puntos son diferentes componentes pero cualquier descomposici ón en dos abiertos tiene a ambos puntos del mismo lado.

Ejercicio 9.81. Probar que la intersección de compactos encajados no vacíos en un espacio T_2 es no vacía. Si un abierto que contiene a la intersección, entonces contiene a alguno de los compactos.

Ejercicio 9.82. Sea Y un espacio topológico de Hausfdorff. Entonces una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si su gráfico es cerrado.

Ejercicio 9.83. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua, donde X es segundo axioma. Entonces $f(M)$ es numerable, donde $x \in M$ sii x es un máximo local de f.

Ejercicio 9.84. Probar que un espacio X no es conexo si y sólo si existe un subconjunto propio no vacío $\emptyset \neq Y \subsetneq X$ tal que la función característica $\mathbf{1}_Y$, $\mathbf{1}_Y(x) = 1$ si $x \in Y$ y $\mathbf{1}_Y(x) = 0$ si $x \notin Y$, es continua.

Ejercicio 9.85. Sea X una unión de segmentos de $\mathbb{R}^2$ cada uno de los cuales contiene al origen. Probar que si f es una aplicación continua que lleva X en X, entonces f tiene punto fijo.

Ejercicio 9.86. Sea X normal. Son equivalentes: (a) X es compacto numerable. (b) Toda $f : X \to \mathbb{R}$ continua es acotada. (c) Toda $f : X \to \mathbb{R}$ continua tiene máximo y mínimo.

Ejercicio 9.87. La clausura de un compacto puede no ser compacta.