

??

Índice general

Capítulo 1. Preliminares	5
1. Conceptos primitivos a utilizar en el curso	5
2. Propiedades y ejemplos	8
3. Relaciones de equivalencia	10
4. Ejercicios	13

Preliminares

1. Conceptos primitivos a utilizar en el curso

Tomamos como *conceptos primitivos* – y con eso queremos decir que no se definen – los conceptos de: conjunto, elemento, pertenencia de un elemento a un conjunto, relación y función de un conjunto en otro.

También tomaremos como conceptos primitivos las operaciones básicas entre conjuntos – unión, intersección y complemento – y la noción de conjunto finito. Diremos que un conjunto es *infinito* si no es finito.

OBSERVACIÓN 1.1. Los conceptos anteriores son tomados como primitivos por no ser la teoría de conjuntos el tema de este curso. Esto es innecesario, dado que todos ellos pueden ser definidos en términos de los conceptos de conjunto y de pertenencia como se puede ver en los libros de teoría de conjuntos.

Usaremos los siguientes símbolos y notaciones:

1. A, B, C y en general las letras mayúsculas del alfabeto latino representan conjuntos.
2. a, b, c y en general las letras minúsculas del alfabeto latino representan elementos.
3. El símbolo $a \in A$ representa que el elemento a pertenece al conjunto A . El símbolo $a \notin A$ representa que el elemento a no pertenece al conjunto A .
4. Si A y B son conjuntos, el símbolo $A \cup B$ representa la *unión* de los conjuntos A y B , es decir, el conjunto de los elementos que pertenecen a A o a B .

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

5. Si A y B son conjuntos, el símbolo $A \cap B$ representa la *intersección* de los conjuntos A y B , es decir, el conjunto de los elementos que pertenecen a ambos conjuntos a la vez.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

6. El símbolo $\emptyset$ representa el conjunto vacío, o sea al conjunto que no posee ningún elemento.
7. Si A y B son tales que $A \cap B = \emptyset$ se dice que A y B son *disjuntos*. Eso quiere decir que A y B no tienen ningún elemento en común.
8. Si A es un conjunto finito, el número de elementos de A se llama también el cardinal de A y se representa con el símbolo $\#(A)$, o simplemente $\#A$. Es importante destacar que el concepto de cardinal se puede definir aún para conjuntos infinitos. Si A no es finito diremos que es *infinito* y notaremos $\#A = \infty$. Asimismo, notaremos $\#A < \infty$ para indicar que A es un conjunto finito.

DEFINICIÓN 1.2. Si A y B son dos conjuntos, notamos

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

EJEMPLO 1.3. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Consideremos los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1 \text{ } n \text{ es par}\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 7\}$ y $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{2, 4\} \cup \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 6\} = \{2, 4, 6, 7, \dots\} \\ A \cap B &= \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 7, n \text{ es par}\} = \{8, 10, 12, \dots\} = \{n \in \mathbb{Z} : n = 8 + 2h, h \geq 0\} \\ A \setminus B &= \{2, 4, 6\} \\ B \setminus A &= \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 7, n \text{ es impar}\} = \{7, 9, 11, \dots\} = \{n \in \mathbb{Z} : n = 7 + 2h, h \geq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#A &= \infty \\ \#B &= \infty \\ \#C &= 4 \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.4. Si dos conjuntos A y B son tales que todo elemento de A es también un elemento de B decimos que A es un *subconjunto* de B , o que A está contenido en B , y lo denotamos como $A \subset B$. En este caso, llamamos *complemento* de A en B al conjunto $B \setminus A$. Si el conjunto B está claro por el contexto, escribimos $B \setminus A = A^c$.

Si A y B son tales que $A \subset B$ pero $A \neq B$ (o sea si todo elemento de A es un elemento de B pero hay elementos de B que no están en A) decimos que A está contenido estrictamente en B y lo denotamos $A \subsetneq B$.

OBSERVACIÓN 1.5. Algunas propiedades elementales de los conjuntos, cuya prueba dejamos como ejercicio:

1. Se verifica que $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.
2. Es fácil ver que $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B = A$.
3. Si $A \subset B$, entonces $B \setminus A = \emptyset$ si y sólo si $A = B$.
4. Si $A \subset B$, entonces $B = A \cup (B \setminus A)$.
5. Si I es un conjunto de índices y $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de conjuntos indexada por I –o sea si tenemos un conjunto A_i para cada índice i – se puede considerar $\bigcup_{i \in I} A_i$ y $\bigcap_{i \in I} A_i$ de forma análoga al caso de unión e intersección de dos conjuntos. Observar que para todo $i \in I$ tenemos que $A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ y $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_i$.
6. *Leyes de De Morgan* (ver ejercicio 3). Supongamos que tenemos un conjunto X y una familia $\{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos de X , entonces:

$$\begin{aligned} X \setminus \bigcup_i A_i &= \bigcap_i (X \setminus A_i), \\ X \setminus \bigcap_i A_i &= \bigcup_i (X \setminus A_i). \end{aligned}$$

7. Si $A \subset B$ entonces $\#A \leq \#B$ – tener en cuenta que $\infty \geq a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$. Observar que el recíproco de esta propiedad es falso – dejamos como ejercicio el proporcionar un contraejemplo, ver Ejercicio ??.

DEFINICIÓN 1.6. Sea $f : A \rightarrow B$ una función.

1. El conjunto A se llama *dominio* de f y el conjunto B el *codominio* de f .

2. Si $C \subset A$, el conjunto $f(C) = \{b \in B : \text{existe } c \in C \text{ tal que } f(c) = b\}$ se llama la *imagen* de C por f . La *imagen* de f es el conjunto $\text{Im } f = f(A)$. La función f se dice *sobreyectiva* si $f(A) = B$, es decir si la imagen coincide con el codominio. En otras palabras, f es sobreyectiva si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
3. La función $f : A \rightarrow B$ se dice *inyectiva* si $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$.
4. Una función inyectiva y sobreyectiva se dice que es *biyectiva*.
5. Si $D \subset B$, se define la *preimagen* de D por f como el conjunto $f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in D\}$. Por abuso de notación, si $b \in B$, se llama preimagen de b al conjunto $f^{-1}(\{b\})$ y se denota como $f^{-1}(b)$, es decir

$$f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}.$$

6. Notar que $f^{-1}(D)$ tiene sentido para *cualquier* función f aunque f no sea invertible – ver Definición 1.18.

EJEMPLO 1.7. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ son los números reales, dada por $f(x) = \sin x$. Entonces

- El dominio de f es $\mathbb{R}$.
- El codominio de f es $\mathbb{R}$.
- La imagen de f es el intervalo cerrado $[-1, 1]$:

$$\text{Im } f = f(A) = [-1, 1].$$

- La función f no es inyectiva, ya que, por ejemplo, $f(0) = f(\pi) = 0$.
- La función f no es sobreyectiva, porque $\text{Im } f = [-1, 1] \subsetneq \mathbb{R}$.
- $f^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$.
- $f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- $f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, 2k + 1\pi]$.

OBSERVACIÓN 1.8. Si $f : A \rightarrow B$, entonces $f^{-1}(B) = A$; si $C \subset B$ es tal que $C \cap f(A) = \emptyset$, entonces $f^{-1}(C) = \emptyset$.

DEFINICIÓN 1.9. Si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son funciones, se define la *composición* de f y g como la función $g \circ f : A \rightarrow C$ dada por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$; diremos que el diagrama que sigue

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g \circ f} & C \\ & \searrow f \quad \nearrow g & \\ & B & \end{array}$$

conmuta.

EJEMPLO 1.10. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin x$, y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = [x]$, donde $[x]$ es la *parte entera* de x , es decir $[x]$ es el mayor entero n tal que $n \leq x$. Entonces,

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } \pi + k\pi < x < 2\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{en el resto de los casos} \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 1.11. Sea $f : A \rightarrow B$ una función y C un conjunto tal que $B \subset C$. Entonces podemos considerar otra función $\tilde{f} : A \rightarrow C$, dada por $\tilde{f}(a) = f(a)$ para todo $a \in A$, donde estamos haciendo uso que todo elemento de B pertenece a C .

Si $g : C \rightarrow D$ es una función podemos entonces considerar $g \circ \tilde{f} : A \rightarrow D$. Por abuso de notación, diremos que la composición $g \circ f$ está dada por $g \circ f(a) = g \circ \tilde{f}(a) = g(f(a))$. Observemos que hablar de composición no es realmente correcto, porque en la definición impusimos que la codominio de f sea el dominio de g .

DEFINICIÓN 1.12. Si A es un conjunto, se define la función *identidad* en ese conjunto como la función $\text{id}_A : A \rightarrow A$ tal que $\text{id}_A(a) = a$ para todo $a \in A$. Cuando no de lugar a confusión, se omitirá en la notación el subíndice A .

Si A y B son conjuntos dados y $b \in B$ es un elemento fijo, definimos la función $c_b : A \rightarrow B$, función constantemente igual a b , como $c_b(a) = b$ para todo $a \in A$.

2. Propiedades y ejemplos

NOTACIÓN 1.13. Usaremos las siguientes notaciones:

1. $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ los conjuntos de los números enteros, racionales, reales y complejos respectivamente.
2. Sea A un conjunto cualquiera. Si $a_1, \dots, a_n \in A$, el subconjunto de A que contiene exactamente esos elementos se denota $\{a_1, \dots, a_n\}$. Por ejemplo, el subconjunto de los enteros formado por los números pares entre 1 y 10 es $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. El conjunto que tiene tan sólo al elemento a se denota $\{a\}$. Notar la diferencia entre $a \in A$ y $\{a\} \subset A$. En particular, observar que los conjuntos $\{\{a\} : a \in A\}$ y $\{a : a \in A\}$ son isomorfos pero no iguales.
3. El conjunto finito $\{1, \dots, n\}$ se denota $[n]$ y es claro que $[n] \subset [m]$ si y sólo si $n \leq m$.¹

DEFINICIÓN 1.14. Sean A y B dos conjuntos.

1. Se define su *producto cartesiano* $A \times B$ como el conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

2. Si $f : A \rightarrow B$ es una función, se define el *gráfico* de f como

$$\text{Graf}(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subset A \times B.$$

OBSERVACIÓN 1.15. Si A y B son conjuntos finitos, entonces $\#(A \times B) = \#A \times \#B$. Si A o B es infinito, entonces el producto cartesiano también es infinito.

OBSERVACIÓN 1.16. La composición de funciones es asociativa, o sea, si $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow D$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Además, si $f : A \rightarrow B$ tenemos que: $f \circ \text{id}_A = f$ y $\text{id}_B \circ f = f$.

TEOREMA 1.17. Una función $f : A \rightarrow B$ es biyectiva si y sólo si existe $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = \text{id}_A : A \rightarrow A$ y $f \circ g = \text{id}_B : B \rightarrow B$.

¹Recordemos que si $x \in \mathbb{R}$, es usual usar la notación $[x]$ para la parte entera de x . Dado que a partir de ahora no utilizaremos este concepto, esta ambigüedad en la notación no generará ningún problema.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : A \rightarrow B$ una función biyectiva. Definimos $g : B \rightarrow A$ como sigue: dado $b \in B$, $g(b)$ es el único elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Dejamos como ejercicio (ver Ejercicio 1.8) probar que $f \circ g = \text{id}_B$ y $g \circ f = \text{id}_A$.

Supongamos ahora que existe g como en el enunciado; probemos que entonces f es inyectiva: si $f(a) = f(a')$ para algunos $a, a' \in A$, deducimos que $g(f(a)) = g(f(a'))$, de donde $a = a'$. Como para todo $b \in B$ se verifica que $f(g(b)) = b$ se deduce que f es sobreyectiva. $\square$

DEFINICIÓN 1.18. Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es *invertible* si existe $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = \text{id}_A : A \rightarrow A$ y $f \circ g = \text{id}_B : B \rightarrow B$. La función g se llamará la *inversa* de f , y se notará $f^{-1} = g$.

El Teorema 1.17 puede entonces reformularse como sigue: *una función es biyectiva si y sólo si es invertible*.

OBSERVACIÓN 1.19. Si $f : A \rightarrow B$ es una función invertible y $D \subset B$, entonces $f^{-1}(D)$ puede interpretarse en el sentido de la Definición 1.6.2 (aplicada a la función f^{-1} y al conjunto $D \subset C$) o de la Definición 1.6.5 (aplicada a la función f y al conjunto $D \subset C$). Ambas interpretaciones dan lugar al mismo subconjunto de A , por lo que no hay ambigüedad en la notación.

OBSERVACIÓN 1.20. El teorema 1.17 puede refinarse del siguiente modo:

- (i) Una función $f : A \rightarrow B$ es sobreyectiva si y sólo si existe $g : B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = \text{id}_B$.
- (ii) Una función $f : A \rightarrow B$ es inyectiva si y sólo si existe $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = \text{id}_A$.

Dejamos como ejercicio la prueba de este resultado, ver Ejercicio 20.

DEFINICIÓN 1.21. Si A y B son conjuntos, podemos considerar el conjunto de todas las funciones de A en B , que se escribe como B^A . Explícitamente

$$B^A = \{f : A \rightarrow B : f \text{ es una función}\}.$$

EJEMPLO 1.22. El conjunto de las funciones biyectivas de A en B es un subconjunto de B^A . Nótese que el conjunto de las funciones biyectivas puede ser vacío, por ejemplo si A y B son conjuntos finitos con cardinales diferentes.

Un caso particular de la construcción precedente es el conjunto de las funciones biyectivas de un conjunto finito en sí mismo:

DEFINICIÓN 1.23. Si n es un número natural, el conjunto de las funciones biyectivas de $[n]$ en $[n]$ —que es un subconjunto de $[n]^{[n]}$ — se denota como $\mathcal{S}_n$. Los elementos de $\mathcal{S}_n$ se llaman las *permutaciones* de n elementos; y si $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ es una permutación de n elementos, es usual escribirla como $\sigma(1) \cdots \sigma(n)$, o sea como la lista de las imágenes por la función σ de los números $1, 2, \dots, n$.

Por ejemplo, $\mathcal{S}_2$ consiste de dos funciones, la función $\text{id}_{\{1,2\}} = 12$ y la función $\sigma = 21$, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, i.e., $\mathcal{S}_2 = \{12, 21\}$. Análogamente, los elementos de $\mathcal{S}_3$ son: $\mathcal{S}_3 = \{123, 213, 321, 132, 231, 312\}$. Es fácil ver que $\mathcal{S}_n$ tiene $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ elementos.

3. Relaciones de equivalencia

DEFINICIÓN 1.24. Si A es un conjunto, una *partición* de A es una familia A_i de subconjuntos no vacíos de A , donde i pertenece a un cierto conjunto I , con las siguientes dos propiedades:

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$;
2. $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

OBSERVACIÓN 1.25. La condición 1 de la definición de partición implica en particular que la familia $\{A_i : i \in I\}$ no puede tener elementos repetidos, ya que si $A_i = A_j$, tenemos que $A_i \cap A_j = A_i \neq \emptyset$, por lo que $i = j$.

EJEMPLO 1.26. Dos casos límites de particiones de un conjunto A son los siguientes:

1. la partición de A que consta tan sólo del conjunto A ;
2. la partición de A que consta de todos los subconjuntos de A de la forma $\{a\}$, con $a \in A$.

NOTACIÓN 1.27. Aceptaremos también como concepto primitivo el de *relación*. Sea $\mathcal{R}$ una relación en A , si $a, b \in A$ están relacionados decimos que $a \mathcal{R} b$.

DEFINICIÓN 1.28. Si A es un conjunto y $\mathcal{R}$ es una relación en A , decimos que $\mathcal{R}$ es una *relación de equivalencia* si se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Propiedad reflexiva*. Para todo $a \in A$, se cumple $a \mathcal{R} a$.
2. *Propiedad simétrica*. Si $a, b \in A$, entonces $a \mathcal{R} b$ si y sólo si $b \mathcal{R} a$.
3. *Propiedad transitiva*. Para todos $a, b, c \in A$, si $a \mathcal{R} b$ y $b \mathcal{R} c$ entonces $a \mathcal{R} c$.

DEFINICIÓN 1.29. Sea A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A . Si $a \in A$, se define un subconjunto de A que se denota $\mathcal{R}[a] = \{b \in A : b \mathcal{R} a\} \subset A$ y se le llama la *clase de equivalencia* de $a \in A$.

Es claro que $\mathcal{R}[a] = \mathcal{R}[a']$ si y sólo si $a \mathcal{R} a'$. Más aun, $\mathcal{R}[a] \cap \mathcal{R}[a'] \neq \emptyset$ si y sólo si $\mathcal{R}[a] = \mathcal{R}[a']$, es decir $a \mathcal{R} a'$. En efecto, si $b \in \mathcal{R}[a] \cap \mathcal{R}[a']$, entonces $b \mathcal{R} a$ y $b \mathcal{R} a'$, por lo que $a \mathcal{R} a'$.

Entonces, la familia de las clases de equivalencia es una partición de A ; y así el conjunto A se divide en una unión disjunta de clases de equivalencia. Estas clases de equivalencia de A forman otro conjunto $A/\mathcal{R}$ que se llama *conjunto cociente* de A por la relación de equivalencia $\mathcal{R}$. El conjunto $A/\mathcal{R}$ está formado por *subconjuntos* de A .

EJEMPLO 1.30. Sea $A = \mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Definimos una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ de la siguiente forma: $a \mathcal{R} b$ si y sólo si $a - b$ es un número par. Es fácil ver que $\mathcal{R}$ así definida es una relación de equivalencia. Si $a \in \mathbb{Z}$ es un número entero entonces

$$\mathcal{R}[a] = \{a + 2k : k \in \mathbb{Z}\},$$

o sea, $\mathcal{R}[a]$ es el conjunto de todos los números que difieren de a en un número par. Si denotamos P al conjunto de los números pares e I al conjunto de los números impares, es claro que para cualquier a dado, $\mathcal{R}[a] = P$ o $\mathcal{R}[a] = I$ de acuerdo con que a sea par o impar. Las clases de equivalencia son sólo dos $-P$ e $-I$ y el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{P, I\}$. La partición a que da lugar la relación de equivalencia es en este caso $\mathbb{Z} = P \cup I$.

EJEMPLO 1.31. Consideremos la función signo, $\text{sg} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{sg}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $x \mathcal{R} y$ si $\text{sg}(x) = \text{sg}(y)$ es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia son los conjuntos $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ y $\{0\}$, por lo que $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ tiene 3 elementos.

EJEMPLO 1.32. Vimos anteriormente que una relación de equivalencia en el conjunto A determina una partición en él, dada por la familia de las clases de equivalencia. Veamos ahora que una partición $\{A_i : i \in I\}$ de A determina una relación de equivalencia: alcanza con considerar la relación $x \mathcal{R} y$ si existe $i \in I$ tal que $x, y \in A_i$, es decir si los elementos x, y pertenecen al mismo subconjunto de la partición.

En efecto, como $A = \cup_{i \in I} A_i$, tenemos que existe un $i \in I$ tal que $x \in A_i$, es decir $x \mathcal{R} x$. Es claro que se cumple también la propiedad simétrica. Supongamos ahora que $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z$. Entonces existen $i_1, i_2 \in I$ tales que $\{x, y\} \subset A_{i_1}$ e $\{y, z\} \subset A_{i_2}$. Luego $A_{i_1} \cap A_{i_2} \supset \{y\}$, por lo que la intersección es no vacía. Pero como los subconjuntos de una partición son disjuntos, deducimos que $A_{i_1} = A_{i_2}$, por lo que $x, z \in A_{i_1}$, es decir $x \mathcal{R} z$.

Es fácil ver que las clases de equivalencia para esta relación son los subconjuntos A_i de la partición.

En resumen, acabamos de probar la siguiente

OBSERVACIÓN 1.33. Dar una relación de equivalencia en el conjunto A es lo mismo que dar una partición del mismo, donde la partición considerada es la familia de las clases de equivalencia de la relación.

Dado A un conjunto cualquiera y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A , existe una función, llamada *proyección canónica*, $\pi : A \rightarrow A/\mathcal{R}$, definida de la siguiente forma: $\pi(a) = \mathcal{R}[a]$. O sea a cada elemento de A la función π le asocia su clase de equivalencia. Es interesante notar que π es una función sobreyectiva.

EJEMPLO 1.34. En particular, en el caso del ejemplo 1.30 $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \{P, I\}$ y $\pi(a) = P$ si y sólo si a es un número par y $\pi(a) = I$ si y sólo si a es un número impar.

La propiedad más importante del par $(A/\mathcal{R}, \pi)$ —y que de hecho lo caracteriza— es la siguiente: sean A y $\mathcal{R}$ como antes y $\pi : A \rightarrow A/\mathcal{R}$ la proyección canónica. Si B es un conjunto cualquiera y $f : A \rightarrow B$ es una función tal que $a \mathcal{R} b$ implica que $f(a) = f(b)$, entonces existe una única función $\hat{f} : A/\mathcal{R} \rightarrow B$ tal que $f = \hat{f} \circ \pi$.

La igualdad anterior entre funciones se puede visualizar en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \pi \quad \nearrow \hat{f} & \\ & A/\mathcal{R} & \end{array}$$

La función $\hat{f} : A/\mathcal{R} \rightarrow B$ se define por $\hat{f}(\mathcal{R}[a]) = f(a)$.

Una función $f : A \rightarrow B$ como la considerada anteriormente, o sea tal que para $a \mathcal{R} b$ se verifica que $f(a) = f(b)$, se dice que es *constante en las clases de equivalencia*. Observar en particular que π , la proyección canónica, es constante en las clases de equivalencia. Más aún, si $\pi : A \rightarrow A/\mathcal{R}$ es la proyección canónica y $x \in A/\mathcal{R}$ entonces $\pi^{-1}(x)$ es una clase de equivalencia.

La propiedad anterior se denomina *propiedad universal del cociente* por una relación de equivalencia, y puede enunciarse como sigue:

Toda función constante en las clases de equivalencia se factoriza de un modo único a través del cociente.

EJEMPLO 1.35.

1. Si A es un conjunto cualquiera, la relación $a \mathcal{R} b$ definida como $a \mathcal{R} b$ si y sólo si $a = b$, es una relación de equivalencia y $\mathcal{R}[a] = \{a\}$. Además, $A/\mathcal{R} = \{\{a\} : a \in A\}$ y la proyección canónica $\pi : A \rightarrow A/\mathcal{R}$ es la función biyectiva que manda a en $\{a\}$. En este caso las clases de equivalencia tienen la menor cantidad posible de elementos, y corresponden a la partición $\{\{a\} : a \in A\}$ de A , que contiene la mayor cantidad posible de subconjuntos.

En este caso, cualquier función $f : A \rightarrow B$ está en las hipótesis de la propiedad universal del cociente.

2. Si A es un conjunto cualquiera, en el otro extremo de la situación anterior está la relación siguiente: para todo $a, b \in A$ decimos que $a \mathcal{R} b$. Esto da lugar a una relación de equivalencia con las siguientes propiedades: (1) la partición a que da lugar esta relación de equivalencia es $\{A\}$; (2) si $a \in A$ entonces $\mathcal{R}[a] = A$, $A/\mathcal{R} = \{A\}$ y la proyección canónica $\pi : A \rightarrow \{A\}$ es la función constante c_A .

En este caso como vimos hay una sola clase de equivalencia, que contiene entonces la mayor cantidad posible de elementos; la partición asociada contiene la menor cantidad posible de subconjuntos.

Las únicas funciones que se factorizan a través del cociente son las funciones constantes.

3. Sea A el conjunto de las rectas del plano. Si $r, r' \in A$ son dos rectas decimos que $r \mathcal{R} r'$ si y sólo si r y r' son rectas paralelas. Si r es una recta, $\mathcal{R}[r]$ es el conjunto de rectas paralelas a r o sea –en el lenguaje de la geometría proyectiva– el punto al infinito asociado a la recta r .
4. En el conjunto de los números racionales, definimos la relación $x \mathcal{R} y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$. Es claro que es una relación de equivalencia. Dejamos como un (fácil) ejercicio demostrar que hay infinitas clases de equivalencia.
5. Sean A y B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Definimos una relación $\mathcal{R}$ de la siguiente forma: decimos que $a \mathcal{R} a'$ si $f(a) = f(a')$. En ese caso $\mathcal{R}[a] = \{a' \in A : f(a') = f(a)\}$ y $A/\mathcal{R}$ se puede identificar con $f(A) = \text{Im } f$ y $\pi : A \rightarrow A/\mathcal{R} = f(A)$ se puede identificar con f .
6. Consideremos la relación de equivalencia definida en los enteros $a \mathcal{R} b$ si $a - b$ es múltiplo de 2. Sean $s, m : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/\mathcal{R}$, dadas por $s(a, b) = a + b$, $m(a, b) = ab$. Es fácil ver que estas dos funciones son constantes en las clases de equivalencia, dando entonces lugar a dos funciones $\tilde{s}, \tilde{m} : \mathbb{Z}/\mathcal{R} \times \mathbb{Z}/\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Z}/\mathcal{R}$, $\tilde{s}([a], [b]) = [a + b]$, $\tilde{m}([a], [b]) = [ab]$.

4. Ejercicios

1. Si A, B, C son conjuntos, probar que:
 - (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
 - (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. En el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$, hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:
 - (a) $x^2 + x = x(x + 1)$
 - (b) $x^2 + x + 1 = 0$
 - (c) $2x - 3 = 7$
3. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de subconjuntos de un conjunto A , probar las leyes de De Morgan (ver Observación 1.5.6):
 - (a) $(\cup_{i \in I} A_i)^c = \cap_{i \in I} A_i^c$.
 - (b) $(\cap_{i \in I} A_i)^c = \cup_{i \in I} A_i^c$.
4. Si A y B son dos conjuntos, probar que $\{A \cap B, A \setminus B\}$ es una partición de A .
5. Describir dos conjuntos A y B tales que $\#A < \#B$, pero $A \not\subset B$ (ver Observación 1.5.7).
6. Si A, B son subconjuntos de un tercer conjunto C , probar que la *diferencia simétrica* $(B \setminus A) \cup (A \setminus B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
7.
 - (a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Hallar la preimagen de un elemento $a \in \mathbb{R}$. Hallar $\text{Im } f$.
 - (b) Sea $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$. Hallar la imagen de g .
 - (c) Calcular la imagen de $f \circ g$.
8. Probar que una función $f : A \rightarrow B$ es biyectiva si y sólo si es invertible. Este resultado es el Teorema 1.17, del cual sólo se probó una implicación.
9. Sea $\mathcal{R}$ la relación $\leq$ de $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, es decir $a \mathcal{R} b$ si y sólo si $a \leq b$. Determinar si $\mathcal{R}$ es:
 - (a) reflexiva;
 - (b) simétrica;
 - (c) transitiva;
 - (d) relación de equivalencia.

10. Si $n \in \mathbb{N}^*$ se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow (a - b) \text{ es dividido por } n .$$

Muestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y determine sus clases.

11. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define una relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$(a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c .$$

Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

12. Se considera en el conjunto $\mathcal{P}$ de las personas, la siguiente relación: $x \sim y$ si y sólo si x e y cumplen años el mismo día (lo que no significa que hayan nacido el mismo día).

1. Observar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
2. Determinar cuántas clases de equivalencia existen.
3. Determinar cuál de las siguientes funciones pasa al cociente:
 - a) $f(x)$ = signo del zodiaco de x ,
 - b) $g(x)$ = signo del horóscopo chino de x .

13. Sean A un conjunto, $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A y $\pi : \rightarrow A/\mathcal{R}$ la proyección canónica. Probar que si $J \subset A/\mathcal{R}$ es un subconjunto, entonces $\pi^{-1}(J)$ es una unión de clases de equivalencia.

Ejercicios complementarios

14. Fijemos dos conjuntos no vacíos, X e Y , de manera que $X \subset Y$. En X definimos la relación de equivalencia $x \mathcal{R} y$ si y solamente si $\{x, y\} \subset X$ o $\{x, y\} \subset Y$. Pruebe que la relación es de equivalencia y encuentre todas sus clases.

15. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$ y $E = \{3, 5\}$. Indicar cuáles de estos conjuntos pueden ser X , si X satisface una de las siguientes condiciones.

- (a) X y B son disjuntos.
- (b) $X \subseteq D$ y $X \not\subseteq B$.
- (c) $X \subseteq A$ y $X \not\subseteq C$.
- (d) $X \subseteq C$ y $X \not\subseteq A$.

16. Teniendo en cuenta que $B \setminus C = B \cap C^c$, demostrar que

- (a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
- (b) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
- (c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

17. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función, $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar:

1. $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y se verifica la igualdad cuando f es sobreyectiva.
2. $f^{-1}(f(A)) \supset A$ y se verifica la igualdad cuando f es inyectiva.

18 (Construcción de los números racionales). Consideremos en el producto cartesiano $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ la relación $(a, s) \mathcal{R} (b, t)$ si $at - bs = 0$.

1. Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Notaremos por $[a, s] = [a, s]$, la clase de equivalencia de $(a, s) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ y $\tilde{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) / \mathcal{R}$.
2. Probar que las expresiones $([a, s], [b, s]) \mapsto [a, s] \cdot [b, s] = [ab, st]$ y $([a, s], [b, s]) \mapsto [a, s] + [b, s] = [as + bt, st]$ definen funciones $\cdot : \tilde{\mathbb{Z}} \times \tilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}$ y $+: \tilde{\mathbb{Z}} \times \tilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}$ tales que para todo $[a, s], [b, t], [c, r] \in \tilde{\mathbb{Z}}$ se tiene que
 - a) $[a, s] \cdot [b, t] = [b, t] \cdot [a, s]$, $([a, s] \cdot [b, t]) \cdot [c, r] = [a, s] \cdot ([b, t] \cdot [c, r])$.
 - b) $[a, s] + [b, t] = [b, t] + [a, s]$, $([a, s] + [b, t]) + [c, r] = [a, s] + ([b, t] + [c, r])$.
 - c) $[a, s] \cdot [1, 1] = [1, 1] \cdot [a, s] = [a, s]$

- d) $[a, s] + [0, 1] = [0, 1] + [a, s] = [a, s]$
 - e) $[a, s] + [-a, s] = [0, 1]$
 - f) SI $a \neq 0$, entonces $[a, s] \cdot [s, a] = [1, 1]$
 - g) $([a, s] + [b, t]) \cdot [c, r] = ([a, s] \cdot [c, r]) + ([b, t] \cdot [c, r])$.
3. Probar que la función $\iota : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ dada por $\iota(a) = [a, 1]$ es inyectiva, y tal que $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$ y $\iota(ab) = \iota(a) \cdot \iota(b)$.

Observar que de este modo, $\tilde{\mathbb{Z}}$ es un cuerpo que cumple las mismas propiedades del cuerpo de los racionales – de hecho, este ejercicio muestra cómo se contruyen permitiendo *definir* al cuerpo de los racionales como $\tilde{\mathbb{Z}}$.

19. En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la relación $\mathcal{Q}$ de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2) \mathcal{Q}(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 = y_1 .$$

Probar que $\mathcal{Q}$ es una relación de equivalencia y determinar la clase asociada al par $(1, -1)$.

20. Probar los resultados enunciados en la Observación 1.20.

Capítulo 2

Espacios vectoriales

1. Definiciones básicas

En lo que sigue $\mathbb{k}$ denotará un cuerpo arbitrario: e.g. el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$, el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$, etc.

Recordamos que en un cuerpo siempre existen dos operaciones, la suma y el producto, dos elementos distinguidos, $0, 1 \in \mathbb{k}$, que son el neutro de la suma y del producto respectivamente — o sea si $a \in \mathbb{k}$ entonces $a + 0 = 0 + a = a$ y $a1 = 1a = a$ — y que existen también opuestos e inversos (inverso siempre que el elemento dado no sea nulo).

DEFINICIÓN 2.1. Un $\mathbb{k}$ -*espacio vectorial* V , o un espacio vectorial V sobre $\mathbb{k}$, es un conjunto no vacío munido de dos operaciones, una operación *suma*, que es una función

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

y una operación *producto por un escalar*, que es una función

$$\cdot : \mathbb{k} \times V \rightarrow V,$$

sujetas a ciertas restricciones que detallaremos a continuación, luego de fijar notaciones.

Los elementos de V , que se designarán en general con las letras $u, v, w \in V$, se llaman *vectores*; los elementos de $\mathbb{k}$ se llaman *escalares*, y se designarán en general con las letras $a, b, c \in \mathbb{k}$. La operación de suma asocia a un par de vectores (v, w) el vector $v + w \in V$ y la operación de producto por un escalar asocia a un par (a, v) formado por un escalar $a \in \mathbb{k}$ y un vector $v \in V$ el vector $av \in V$.

Esas operaciones están regidas por las siguientes leyes:

1. *Propiedad asociativa de la suma.* Si $u, v, w \in V$, entonces $u + (v + w) = (u + v) + w$.
2. *Existencia de un neutro para la suma.* Existe un vector $0_V \in V$ que cumple $u + 0_V = 0_V + u = u$ para todo $u \in V$.
3. *Existencia del opuesto.* Para todo $v \in V$ existe $w \in V$ tal que $v + w = w + v = 0_V$. El elemento w (más tarde probaremos que es único, ver Observación 2.2) se llama el *opuesto* de v .
4. *Propiedad conmutativa de la suma.* Para todo $v, w \in V$, $v + w = w + v$.
5. *Propiedad distributiva de la suma con respecto al producto por un escalar.* Si $a \in \mathbb{k}$ y $v, w \in V$, entonces $a(v + w) = av + aw$.
6. *Propiedad distributiva de la suma de escalares multiplicados por un vector.* Si $a, b \in \mathbb{k}$ y $v \in V$, entonces $(a + b)v = av + bv$.
7. *Propiedad asociativa del producto por un escalar.* Si $a, b \in \mathbb{k}$ y $v \in V$, entonces $a(bv) = (ab)v$.
8. *Propiedad del neutro.* Si $v \in V$, entonces $1v = v$, donde $1 \in \mathbb{k}$ es el neutro del producto en $\mathbb{k}$.

OBSERVACIÓN 2.2. (1) Destacamos que el elemento neutro $0_V \in V$ es único y lo mismo sucede con el opuesto de un vector cualquiera $v \in V$. El opuesto de v se denota $-v$ y se puede probar fácilmente que $-v = (-1)v$. Es importante no confundir el elemento $0_V \in V$ con el elemento $0 \in \mathbb{k}$. Por ese motivo se le pone a veces un subíndice al primero. Sin embargo, este subíndice se omite casi siempre porque no hay lugar a confusiones, y $0v = 0_V$ para todo $v \in V$, ver Ejercicio 2.3.

Probemos, por ejemplo, que el neutro es único: sea $v \in V$ otro elemento tal que $v + w = w$ para todo $w \in V$. Entonces $v = v + 0_V = 0_V$; la primera igualdad es válida por ser 0_V el neutro, y la segunda por definición de v . Dejamos la prueba de la unicidad del opuesto como ejercicio (ver Ejercicio 2.3).

(2) Como en general se trabaja con un cuerpo fijo $\mathbb{k}$, en lugar de decir $\mathbb{k}$ -espacios vectoriales o espacios vectoriales sobre $\mathbb{k}$, diremos simplemente espacios vectoriales.

(3) Los axiomas 1–4 de la definición anterior nos dicen que $(V, +, 0_V)$ es un grupo abeliano.

Veamos algunas propiedades elementales que se deducen a partir de los axiomas que aparecen en la definición anterior, llamados *axiomas de espacio vectorial*.

LEMA 2.3. *Sea V un espacio vectorial.*

- (1) Si $u + v = u + w$, entonces $v = w$.
- (2) $0v = 0_V$ y $a0_V = 0_V$ para todo $a \in \mathbb{k}$, $v \in V$.
- (3) Si $av = 0_V$, entonces $a = 0$ ó $v = 0_V$.
- (4) $-v = (-1)v$ para todo $v \in V$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Sumar $-u$ de ambos lados de la ecuación.

(2) $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$, por lo que $0v = 0_V$. Análogamente $a0_V = a(0_V + 0_V) = a0_V + a0_V$, de donde $a0_V = 0_V$.

(3) Si $a \neq 0$, multiplicar la ecuación por a^{-1} .

(4) $v + (-1)v = (1 - 1)v = 0v = 0_V$. □

OBSERVACIÓN 2.4. Se puede definir la resta de vectores de la siguiente forma, si $u, v \in V$ entonces, $u - v = u + (-v)$, y se cumple que $w = u - v$ si y sólo si $u = w + v$.

OBSERVACIÓN 2.5. Nótese que los axiomas de espacio vectorial no son independientes, es decir algunos se pueden probar a partir de los otros. Por ejemplo la propiedad conmutativa de la suma se demuestra desarrollando $(1 + 1)(u + v)$ de las dos maneras posibles y aplicando luego existencia del opuesto.

Además, los axiomas pueden sustituirse por otros: por ejemplo, si asumimos que $0v = 0_V$ para todo $v \in V$, tenemos que $v + (-1)v = (1 - 1)v = 0v = 0_V$, por lo que el axioma de existencia del opuesto se puede sustituir por la mencionada propiedad del 0.

Veamos diferentes ejemplos de espacios vectoriales.

EJEMPLO 2.6. El conjunto $\mathbb{k}^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{k}, i = 1, 2, \dots, n\}$, con las operaciones definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ a \cdot (a_1, \dots, a_n) &= (aa_1, \dots, aa_n)\end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{k}$. En particular, tomando $n = 1$, obtenemos el cuerpo de base que se puede pensar como un espacio vectorial sobre sí mismo.

Es importante destacar que los vectores de $\mathbb{k}^n$ se representan ya sea como filas, en la forma de arriba o como columnas en la forma: $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2.7. El conjunto $\mathbb{k}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, \dots, a_n, \dots) : a_i \in \mathbb{k}, i = 1, 2, \dots\}$, con las operaciones definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots) \\ a \cdot (a_1, a_2, \dots) &= (aa_1, aa_2, \dots) \end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{k}$. Observar que $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ puede pensarse como el conjunto de las sucesiones con valores en $\mathbb{k}$.

EJEMPLO 2.8. El conjunto $\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$; es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales entre funciones.

EJEMPLO 2.9. Si $\mathbb{k}' \subset \mathbb{k}$ es un subcuerpo de $\mathbb{k}$, entonces el cuerpo mayor es un espacio vectorial sobre el menor. Por ejemplo, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, así $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial.

EJEMPLO 2.10. Si V es un $\mathbb{k}$ -espacio vectorial cualquiera y X un conjunto arbitrario, entonces V^X es un espacio vectorial de la siguiente forma: si $f, g \in V^X$ y $a \in \mathbb{k}$ se definen $f + g \in V^X$ y $af \in V^X$ como sigue: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(af)(x) = af(x)$. Usualmente, este tipo de operaciones definidas en V^X se dicen realizadas *punto a punto*.

EJEMPLO 2.11. Un caso particular de lo anterior es cuando $V = \mathbb{k}$ y el espacio es $\mathbb{k}^X$.

El espacio $\mathbb{k}^n$ se identifica entonces a $\mathbb{k}^{[n]}$, donde $(a_1, \dots, a_n)$ se corresponde con la función $f : [n] \rightarrow \mathbb{k}$, $f(i) = a_i$.

El espacio de las sucesiones se identifica entonces a $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$, donde $(a_1, a_2, \dots)$ se identifica con la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{k}$, $f(i) = a_i$.

Antes de ver el siguiente ejemplo recordemos la definición de polinomio con coeficientes en $\mathbb{k}$

DEFINICIÓN 2.12. Un polinomio con coeficientes en $\mathbb{k}$ es una expresión $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, donde t es una variable, $a_i \in \mathbb{k}$ para todo $i = 0, 1, \dots$, y la cantidad de i tales que $a_i \neq 0$ es finita. Notaremos $\mathbb{k}[t]$ al conjunto de los polinomios. El conjunto $\mathbb{k}[t]$ con las operaciones habituales entre polinomios

$$\begin{aligned} \sum_i a_i t^i + \sum_j b_j t^j &= \sum_i (a_i + b_i) t^i \\ \left(\sum_i a_i t^i\right) \left(\sum_j b_j t^j\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) t^n = \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) t + \dots (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) t^n + \dots \end{aligned}$$

donde $\sum_i a_i t^i, \sum_i b_i t^i \in \mathbb{k}[t]$, es un anillo.

Llamaremos *grado* de un polinomio $f \in \mathbb{k}[t] \setminus \{0\}$ al mayor i tal que $a_i \neq 0$, y notaremos $\text{gr}(f)$ a ese número.

Dado un polinomio $f \in \mathbb{k}[t]$, lo notaremos de diversas maneras, cuando quede claro por el contexto:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i = \sum_i a_i t^i = \sum_{i=0}^n a_i t^i,$$

donde $n = \text{gr}(f)$.

EJEMPLO 2.13. El anillo de los polinomios $\mathbb{k}[t]$ con las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} \sum_i a_i t^i + \sum_i b_i t^i &= \sum_i (a_i + b_i) t^i & \sum_i a_i t^i, \sum_i b_i t^i &\in \mathbb{k}[t] \\ a \cdot (\sum_i a_i t^i) &= \sum_i (aa_i) t^i & a \in \mathbb{k}, \sum_i a_i t^i &\in \mathbb{k}[t] \end{aligned}$$

es un $\mathbb{k}$ -espacio vectorial.

EJEMPLO 2.14. Un caso particular de espacios de tipo $\mathbb{k}^n$ es el siguiente:

Sean p, q dos números naturales positivos y definimos

$$M_{p \times q}(\mathbb{k}) = \{f : [p] \times [q] \rightarrow \mathbb{k} : f \text{ función}\}.$$

En el caso que $p = q$ escribimos simplemente

$$M_{p \times p}(\mathbb{k}) = M_p(\mathbb{k}).$$

Podemos identificar los elementos (funciones) de $M_{p \times q}(\mathbb{k})$ con las *matrices con p filas y q columnas*, pues a una función $f \in M_{p \times q}(\mathbb{k})$ le hacemos corresponder la matriz

$$\begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \cdots & f(1,q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(p,1) & f(p,2) & \cdots & f(p,q) \end{pmatrix}.$$

Es conveniente que el lector observe que una matriz como la anterior no es otra cosa que un elemento de $\mathbb{k}^{pq}$ organizado de otra forma. Su organización en un bloque rectangular se debe a motivos de conveniencia que quedarán más claros a lo largo del curso, por ejemplo al definir el producto entre dos matrices (ver Apéndice B).

Por ejemplo, el elemento $(1, 2, 3, 4) \in \mathbb{Q}^4$ lo podemos pensar como una matriz de $M_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ o como perteneciente a $M_{4 \times 1}(\mathbb{Q})$ como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Q}), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 1}(\mathbb{Q}).$$

2. Subespacios vectoriales

DEFINICIÓN 2.15. Si V es un espacio vectorial y $W \subset V$ es un subconjunto, se dice que W es un *subespacio vectorial*, o simplemente subespacio, de V si se verifica:

1. $0 \in W$.
2. Si $v, w \in W$ entonces $v + w \in W$.
3. Si $a \in \mathbb{k}$ y $v \in W$, entonces $av \in W$.

OBSERVACIÓN 2.16. (1) Sea W un subespacio vectorial de V . Es claro que si restringimos las operaciones de V al subconjunto W (lo que se puede hacer gracias a las condiciones 2 y 3 de la definición) obtenemos un espacio vectorial. Salvo mención explícita, un subespacio se considera siempre con esta estructura, llamada *estructura inducida*.

(2) Si W es un subespacio de V , es claro que si $v_1, \dots, v_n \in W$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ entonces $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = \sum_{i=1}^n a_iv_i \in W$.

(3) Las condiciones (1) y (2) de la definición 2.15 dicen que $(W, +, 0_V)$ es un subgrupo del grupo abeliano $(V, +, 0_V)$.

OBSERVACIÓN 2.17. La condición (1) de la definición de subespacio vectorial puede sustituirse por

(1') $W \neq \emptyset$.

En efecto, es claro que (1),(2),(3) implican (1'),(2),(3). Recíprocamente, si $w \in W$ es un elemento de W (que existe por ser $W \neq \emptyset$, entonces por la propiedad (3) tenemos que $0_V = 0w \in W$).

EJEMPLOS 2.18. A continuación presentamos diversos ejemplos de subespacios vectoriales.

(1) Si V es un espacio vectorial, entonces $\{0\}$ y V son subespacios. Son llamados los *subespacios triviales*.

(2) Si $V = \mathbb{k}^n$ entonces $W = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n : a_1 = 0\}$ es un subespacio.

(3) Si $V = \mathbb{k}^n$ entonces $W = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n : a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0\}$. En general, si $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{k}$, entonces

$$W = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n : \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n = 0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{k}^n$.

(4) (a) Como caso particular del ejemplo anterior, consideremos un sistema de coordenadas en el plano euclídeo. De este modo, podemos identificar un punto p del plano con un elemento $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. Es fácil ver que los subespacios no triviales de $\mathbb{R}^2$ se identifican con las rectas del plano que pasan por el origen del sistema coordenado.

En efecto, es claro que las rectas por el origen son subespacios. Consideremos $W \subset \mathbb{R}^2$ un subespacio tal que $W \neq \{(0, 0)\}$. Sea $w \in W \setminus \{(0, 0)\}$ un elemento. Entonces la recta $\overline{0w} = \{aw : a \in \mathbb{R}\}$ está contenida en W . Si $W \neq \overline{0w}$ existe $v \in W \setminus \overline{0w}$ por lo que la recta $\overline{0v}$ está también contenida en W . Es fácil ver que todo vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se escribe como suma de dos vectores pertenecientes a las rectas $\overline{0w}$ y $\overline{0v}$, por lo que $W = \mathbb{R}^2$.

(b) Del mismo modo, es posible identificar un punto de $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ con un punto del espacio euclídeo. Bajo esta identificación, los subespacios vectoriales no triviales de $\mathbb{R}^3$ consisten de las rectas y planos que pasan por el origen del sistema coordenado.

(5) (a) Si $V = \mathbb{k}^2$, entonces $W = \{(a_1, a_2) \in V : a_1 a_2 = 0\}$ no es un subespacio. Sin embargo, se verifica que si $v \in W$ y $a \in \mathbb{k}$, entonces $av \in W$.

(b) Complementariamente, si $V = \mathbb{R}^2$, entonces $W = \{(a_1, a_2) \in V : a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$ verifica la condición que la suma de dos elementos de W está en W , pero W no es un subespacio.

(6) Si $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es el espacio de las sucesiones reales, entonces

$$W = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} : \text{la sucesión } (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ tiene límite finito}\}$$

$$W_0 = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} : \text{la sucesión } (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ tiene límite cero}\}$$

son subespacios. Mas aún, $W_0 \subset W \subset V$; decimos en este caso que tenemos una *cadena de subespacios*.

(7) Si $V = \mathbb{R}^{(a,b)}$, el espacio de todas las funciones de (a, b) en $\mathbb{R}$, los subconjuntos

$$\mathcal{C}(a, b) = \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$$

y

$$\mathcal{D}(a, b) = \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es derivable}\}$$

son subespacios. Nuevamente tenemos una cadena de subespacios $\mathcal{D}(a, b) \subset \mathcal{C}(a, b) \subset V$.

(8) Si V es un espacio vectorial y $v \in V$, definimos $\langle v \rangle = \{av : a \in \mathbb{k}\}$, o más en general, si $v, w \in V$ son dos vectores de V , definimos $\langle v, w \rangle = \{av + bw : a, b \in \mathbb{k}\}$. Se verifica fácilmente que $\langle v, w \rangle$ es un subespacio de V . Ver Definición 2.20.

Además si $v = cw$ entonces $\langle v, w \rangle = \langle w \rangle$.

(9) Si V es un espacio vectorial y $W_1, W_2 \subset V$ son subespacios, es fácil ver que $W_1 \cap W_2$ es también un subespacio de V . Más en general, si $\{W_i : i \in I\}$ es una familia de subespacios de V entonces $\bigcap_i W_i \subset V$ es un subespacio de V . En otras palabras, la intersección de una familia cualquiera de subespacios es siempre un subespacio. Es importante observar que la intersección de dos subespacios (y también de una familia arbitraria de subespacios) nunca es el conjunto vacío, ya que siempre contiene al vector nulo. Por ejemplo, si tomamos en $\mathbb{k}^2$ los subespacios $\langle (1, 0) \rangle$ y $\langle (0, 1) \rangle$, su intersección es el subespacio cero; ésta es la menor intersección posible.

(10) El subconjunto $\mathbb{k}_n[t] \subset \mathbb{k}[t]$ de los polinomios de grado menor o igual a n es claramente un subespacio. Algunas veces se nota este subespacio como $\mathbb{k}[t]_n$.

OBSERVACIÓN 2.19. En general, la unión de subespacios vectoriales no es un subespacio vectorial. De hecho, si V es un espacio vectorial y $W_1, W_2 \subset V$ son subespacios, entonces $W_1 \cup W_2$ es un subespacio si y sólo si se verifica una inclusión entre ellos, es decir $W_1 \cap W_2 = W_i$ para algún i .

En efecto, si $W_1 \subset W_2$, entonces $W_1 \cup W_2 = W_2$ y si $W_2 \subset W_1$, entonces $W_1 \cup W_2 = W_1$, por lo que una de las implicaciones es inmediata. Supongamos ahora que existe $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ y $w_2 \in W_2 \setminus W_1$. Entonces, $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$, por lo que o bien $w_1 + w_2 \in W_1$ o bien $w_1 + w_2 \in W_2$. Si $w_1 + w_2 \in W_1$ deducimos que $w_2 = (w_1 + w_2) - w_1 \in W_1$, absurdo. Del mismo modo, si $w_1 + w_2 \in W_2$ se deduce que $w_1 \in W_2$, con lo que queda probada la afirmación.

DEFINICIÓN 2.20. Sea V un espacio vectorial y $X \subset V$ un conjunto cualquiera. Se considera la siguiente familia de subespacios de V :

$$\mathcal{F}_X = \{W : X \subset W \subset V\}.$$

Es decir, $\mathcal{F}$ es la familia de todos los subespacios de V que contienen a X . Se define el *subespacio generado* por X y se denota $\langle X \rangle$, como

$$\langle X \rangle = \bigcap_{W \in \mathcal{F}_X} W.$$

OBSERVACIÓN 2.21. (1) Si $X = V$, la familia $\mathcal{F}_X$ consta sólo de un elemento — el espacio V —, luego $\langle V \rangle = V$.

(2) Es claro que el menor subespacio que contiene al conjunto vacío es el subespacio trivial $\{0\}$, por lo que $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

(3) Es claro que la Definición 2.20 generaliza las situaciones consideradas en el Ejemplo 2.18 (8) poniendo $X = \{v\}$ y $X = \{v, w\}$ respectivamente, ver Observación 2.26 y Ejercicio 2.11.

(4) Puede suceder que $X \neq Y$ pero que $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$. Eso sucede, por ejemplo, en el caso de $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \langle (1, 1), (0, -1) \rangle = \mathbb{K}^2$.

OBSERVACIÓN 2.22. Surge de la construcción dada en la Definición 2.20 que si $X \subset V$ es un conjunto, entonces $\langle X \rangle$ es el menor subespacio vectorial que contiene a X . En efecto, $\langle X \rangle$ es un subespacio, contiene a X , y está contenido en todo subespacio $W \in \mathcal{F}$.

Observemos que en particular, tenemos que $\langle X \rangle \in \mathcal{F}_X$.

EJEMPLO 2.23. Si $W, U \subset V$ son subespacios de V , entonces la *suma*

$$W + U = \langle W \cup U \rangle$$

es un subespacio. Además $W + U = \{w + u : w \in W, u \in U\}$. Omitimos la prueba de este resultado, que es un caso particular del Lema 2.25.

DEFINICIÓN 2.24. Si V es un espacio vectorial y $\{W_i : i \in I\}$ es una familia de subespacios de V , se define

$$\sum_{i \in I} W_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} W_i \right\rangle.$$

LEMA 2.25. Si V es un espacio vectorial y $\{W_i : i \in I\}$ es una familia de subespacios de V , entonces

$$\sum_{i \in I} W_i = \left\{ \sum_{i \in I} w_i : w_i \in W_i, \text{ donde } w_i = 0 \text{ excepto para un número finito de } i \in I \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $U = \{\sum_i w_i : w_i \in W_i, \text{ donde } \#\{i : w_i \neq 0\} < \infty\}$. Se verifica que U es un subespacio de V que contiene a W_i para todo $i \in I$. En efecto, $0 = \sum_i 0 \in U$, y si $v = \sum_i v_i, w = \sum_i w_i$, con $v_i, w_i \in W_i$, todos nulos salvo una cantidad finita, y $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tenemos que

$$av + w = a\left(\sum_i v_i\right) + \sum_i w_i = \sum_i (av_i + w_i),$$

en donde, usando que la cantidad de vectores v_i, w_i no nulos es finita, usamos repetidas veces la propiedad distributiva, conmutativa de la suma y asociativa de la suma. Si para $i_0 \in I$ tenemos que el vector $av_{i_0} + w_{i_0} \in W_{i_0}$ es no nulo, entonces o bien v_{i_0} o bien w_{i_0} tiene que ser no nulo. Luego $i_0 \in \{i \in I : v_i \neq 0\} \cup \{i \in I : w_i \neq 0\}$, conjunto con una

cantidad finita de elementos. Para probar que $U \supset \bigcup_{i \in I} W_i$ alcanza con observar que si $w_j \in W_j$, entonces $w_j = \sum_i v_i$, con $v_i = 0$ si $i \neq j$ y $v_j = w_j$.

Si $W \subset V$ es un subespacio que contiene a W_i para todo i , cualquier elemento de la forma $\sum_i w_i$ con $w_i \in W_i$ y con $w_i = 0$ excepto para un número finito de i , está en W . Entonces $U \subset W$ y luego es el menor subespacio vectorial que contiene a $\bigcup_{i \in I} W_i$, es decir $U = \langle \bigcup_{i \in I} W_i \rangle$. $\square$

OBSERVACIÓN 2.26. En particular, si $v_1, \dots, v_n \in V$, entonces

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : a_i \in \mathbb{k} \right\}.$$

DEFINICIÓN 2.27. (1) Una familia finita $\{W_i : i = 1, \dots, n\}$ de subespacios de un espacio vectorial V se dice que es *linealmente disjunta* si para cualquier igualdad de la forma $w_1 + \dots + w_n = 0$ con $w_i \in W_i$ se deduce que $w_i = 0$.

(2) Una familia $\{W_i : i \in I\}$ de subespacios de un espacio vectorial V se dice *linealmente disjunta* si todas sus subfamilias finitas son linealmente disjuntas.

OBSERVACIÓN 2.28. Sea $\mathcal{F} = \{W_i : i = 1, \dots, n\}$ una familia finita de subespacios de un espacio vectorial V y $\{i_1, \dots, i_s\} \subset [n]$. Si existen $w_{i_1} \in W_{i_1}, \dots, w_{i_s} \in W_{i_s}$ no nulos tales que $\sum_h w_{i_h} = 0$, es claro que entonces la familia $\mathcal{F}$ no es linealmente disjunta. Deducimos entonces que si $\mathcal{F}$ es linealmente disjunta, toda subfamilia (necesariamente finita) $\{W_{i_1}, \dots, W_{i_s}\} \subset \mathcal{F}$ es linealmente disjunta. Esto muestra que toda familia finita linealmente disjunta en el sentido de la Definición 2.27 (1), lo es también en el sentido de la Definición 2.27 (2). De este modo, en el caso finito ambas definiciones coinciden.

EJEMPLO 2.29. (1) En $\mathbb{k}^3$ los subespacios $W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{k}\}$ y $W_2 = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{k}\}$ no son linealmente disjuntos, porque $(0, 1, 0) + (0, -1, 0) = (0, 0, 0)$, con $(0, 1, 0) \in W_1$ y $(0, -1, 0) \in W_2$.

(2) En $\mathbb{k}^3$ los subespacios $W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{k}\}$ y $W_2 = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{k}\}$ son linealmente disjuntos. En efecto, si tomamos $(a, b, 0) \in W_1$ y $(0, 0, c) \in W_2$ y suponemos que $(a, b, 0) + (0, 0, c) = (0, 0, 0)$ deducimos que $a = b = c = 0$.

DEFINICIÓN 2.30. Dada una familia linealmente disjunta $\{W_i : i \in I\}$ de subespacios de un espacio vectorial V , decimos que el subespacio $\sum_{i \in I} W_i$ es la *suma directa* de los subespacios de la familia y escribimos: $\bigoplus_{i \in I} W_i$.

OBSERVACIÓN 2.31. Cuando escribimos una igualdad entre subespacios $U = \bigoplus_{i \in I} W_i$ estamos queriendo decir dos cosas de características diferentes. Por un lado que $U = \sum_{i \in I} W_i$, igualdad que se refiere a la relación entre U y la familia $\{W_i : i \in I\}$; por otro que la familia $\{W_i : i \in I\}$ es linealmente disjunta, propiedad que se refiere tan sólo a la familia $\{W_i : i \in I\}$ sin involucrar a U .

LEMA 2.32. Sea V un espacio vectorial y $U \supset W_i, i \in I$, subespacios de V . Entonces son equivalentes:

(1) $U = \bigoplus_{i \in I} W_i$;

(2) Para todo $u \in U$ existe una única familia $w_i \in W_i$ con las siguientes propiedades:
(a) los elementos w_i son nulos excepto para un número finito de índices y (b) $u = \sum_i w_i$.

DEMOSTRACIÓN. Si vale la condición (2) es claro que $U = \sum_i W_i$. Para probar que los W_i , $i \in I$, son linealmente disjuntos, usamos la unicidad garantizada en (2): si $\sum_i w_i = 0$ para alguna familia de elementos, como también tenemos que $\sum_i w_i = \sum_i 0$ y la unicidad implica que $w_i = 0$ para todo $i \in I$.

Que la condición (1) implica la condición (2) se prueba de forma semejante. Que $U = \sum_{i \in I} W_i$, o sea la existencia de una descomposición de la forma $u = \sum_i w_i$, sigue directamente de la definición de suma directa. Con respecto a la unicidad razonamos como sigue: sea $w \in U$ y supongamos que admite dos descomposiciones $w = \sum_i w_i = \sum_i v_i$, $v_i, w_i \in W_i$. Entonces $0 = w - w = \sum_i w_i - \sum_i v_i = \sum_i (w_i - v_i)$, y como los espacios W_i son linealmente disjuntos deducimos que $w_i = v_i$ para todo $i \in I$, i.e., la descomposición es única. $\square$

OBSERVACIÓN 2.33. La condición (2) del Lema 2.32 puede reescribirse como sigue:
(2') $U = \sum_{i \in I} W_i$ y si $u \in U$, entonces la descomposición $u = \sum_{i \in I} w_i$, $w_i \in W_i$ es única.

LEMA 2.34. Supongamos que V es un espacio vectorial y $\{W_i : i \in I\}$ es una familia de subespacios. Los subespacios son linealmente disjuntos si y sólo si para todo $j \in I$ tenemos que $W_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} W_i = \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $j \in I$ y sea $w \in W_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} W_i$. Entonces existen $i_1, \dots, i_n \in I \setminus \{j\}$ y vectores $w_{i_h} \in W_{i_h}$, $h = 1, \dots, n$, tales que $w = w_{i_1} + \dots + w_{i_n}$. Luego, $w_{i_1} + \dots + w_{i_n} - w = 0$ es una representación del cero por vectores de subespacios diferentes, por lo que $w = 0$ y $W_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} W_i = \{0\}$.

El recíproco se prueba de forma similar y es dejado como ejercicio, ver Ejercicio 2.21. $\square$

OBSERVACIÓN 2.35. En el caso que tengamos sólo dos subespacios, la afirmación anterior significa que W_1 y W_2 son linealmente disjuntos si y sólo si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

En el caso de tres subespacios W_1, W_2, W_3 , observar que no basta con que $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_3 = W_1 \cap W_3 = \{0\}$ para que *los tres* subespacios sean linealmente disjuntos. Eso lo muestra el siguiente ejemplo: sean $V = \mathbb{k}^3$, $W_1 = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{k}\}$, $W_2 = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{k}\}$, $W_3 = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{k}\}$ y el vector $(1, 0, 0) + (-1, -1, 0) = (0, -1, 0) \in W_1 \cap (W_2 + W_3)$.

DEFINICIÓN 2.36. Si $M \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ definimos su *matriz transpuesta*, que denotamos por M^t , como la matriz obtenida a partir de la matriz M intercambiando las filas por las columnas: si $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, entonces $M^t = (b_{hk})_{\substack{1 \leq h \leq n \\ 1 \leq k \leq m}}$, con $b_{hk} = a_{kh}$.

EJEMPLO 2.37. Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, entonces $M^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.

EJEMPLO 2.38. Consideremos el espacio de las matrices cuadradas $M_n(\mathbb{k})$. El subconjunto

$$\mathcal{S} = \{M \in M_n(\mathbb{k}) : M^t = M\}$$

es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{k})$, llamado el *subespacio de las matrices simétricas*.

El subconjunto

$$\mathcal{A} = \{M \in M_n(\mathbb{k}) : M^t = -M\}$$

es también un subespacio de $M_n(\mathbb{k})$, que llamamos el *subespacio de las matrices anti-simétricas*.

Si $\mathbb{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se cumple que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = M_n(\mathbb{k})$. Efectivamente, la igualdad

$$M = \frac{1}{2}(M + M^t) + \frac{1}{2}(M - M^t)$$

garantiza que $\mathcal{S} + \mathcal{A} = M_n(\mathbb{k})$. Se prueba que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}$ son linealmente disjuntos de la siguiente forma: sea $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, entonces, $-M = M^t = M$ y concluimos que $M = 0$.

Más en general, esta propiedad se cumple siempre y cuando el cuerpo $\mathbb{k}$ no tenga *característica* 2, es decir, siempre y cuando $1 + 1 \neq 0$ en $\mathbb{k}$. En este caso 2 es invertible, es decir existe $\frac{1}{2}$.

3. Transformaciones lineales

En matemática, cada vez que se define un tipo de objetos — e.g. conjuntos, espacios vectoriales, grupos, espacios topológicos — es necesario definir también los *morfismos* entre esos objetos. En el caso de los conjuntos los correspondientes morfismos son las funciones, para grupos son los homomorfismos de grupos, para espacios topológicos son las funciones continuas. En el caso de los espacios vectoriales los morfismos serán las funciones que “respetan” la suma y el producto por un escalar, en el sentido que describimos a continuación; dichas funciones serán llamadas *transformaciones lineales*.

DEFINICIÓN 2.39. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{k}$.

(1) Se dice que una función $T : V \rightarrow W$ es una *transformación lineal* si para todo $u, v \in V$ y $a, b \in \mathbb{k}$ se verifica que $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$.

Se dice que una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ es un *isomorfismo lineal* si T es biyectiva como *función*. Un isomorfismo lineal también se llama simplemente un *isomorfismo* y se dice que T es *invertible*. En ese caso (o sea en el caso que exista un isomorfismo entre V y W) se dice que estos espacios son *isomorfos*. En general si V y W son isomorfos escribimos que $V \cong W$.

(2) El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W se denota como $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$, y frecuentemente se abrevia como $\text{Hom}(V, W)$.

(3) Si $V = W$ y $T : V \rightarrow V$ es una transformación lineal decimos que T es un *endomorfismo* de V . Al conjunto de todos los endomorfismos de V se lo denota como $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ o $\text{End}(V)$.

(4) En el caso en que el codominio de una transformación lineal sea el cuerpo de base, o sea si $T : V \rightarrow \mathbb{k}$, decimos que T es una *funcional lineal*. En ese caso $\text{Hom}(V, \mathbb{k})$ se abrevia como V^* y se llama el *espacio vectorial dual* de V , o el *espacio dual* de V .

EJEMPLOS 2.40. (1) Si V, W son dos $\mathbb{k}$ -espacios, entonces la transformación lineal nula $\theta : V \rightarrow W$, $\theta(v) = 0$, es claramente una transformación lineal.

(2) Si V es un espacio vectorial, la identidad $\text{id} : V \rightarrow V$ es una transformación lineal.

(3) Consideremos $T_{\alpha, \beta} : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}$, $T(a, b) = \alpha a + \beta b$. Entonces $T_{\alpha, \beta}$ es una funcional lineal.

(4) La función $T : \mathbb{k}^3 \rightarrow \mathbb{k}^3$, $T(a, b, c) = (a + b, b + c, 0)$ es una transformación lineal.

OBSERVACIÓN 2.41. Sean V, W dos $\mathbb{k}$ -espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una función entonces son equivalentes:

- (1) T es una transformación lineal.
- (2) $T(av + w) = aT(v) + T(w)$ para todo $v, w \in V, a \in \mathbb{k}$.
- (3) (i) $T(av) = aT(v)$ para todo $v \in V, a \in \mathbb{k}$. (ii) $T(v + w) = T(v) + T(w)$ para todo $v, w \in V$.

En efecto, tomando en (1) $b = 1$ tenemos que (1) implica (2). Si consideramos $w = 0$ en (2) tenemos que (3) (i) es cierto, y considerando $a = 1$ en (2) tenemos que (3) (ii) es cierto. Finalmente si (3) es cierto tenemos que $T(av + bw) = T(av) + T(bw) = aT(v) + bT(w)$.

OBSERVACIÓN 2.42. Si una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ es invertible, entonces su función inversa $T^{-1} : W \rightarrow V$ es también una transformación lineal. Efectivamente, si $w_1, w_2 \in W$ y $a, b \in \mathbb{k}$, $T^{-1}(aw_1 + bw_2)$ y $aT^{-1}(w_1) + bT^{-1}(w_2)$ son iguales. Esto se deduce porque si le aplicamos T a ambas expresiones obtenemos el mismo elemento $aw_1 + bw_2$. Como T es biyectiva es inyectiva, de donde $T^{-1}(aw_1 + bw_2) = aT^{-1}(w_1) + bT^{-1}(w_2)$.

LEMA 2.43. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

- (1) Si $v \in V$, entonces $T(-v) = -T(v)$, y además $T(0_V) = 0_W$.
- (2) Si $U \subset V$ es un subespacio de V entonces, $T|_U : U \rightarrow W$ es una transformación lineal.
- (3) Si $U \subset V$ es un subespacio de V , entonces el conjunto $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ es un subespacio de W . En particular $T(V) = \text{Im}(T)$ es un subespacio de W .
- (4) Si $L \subset W$ es un subespacio de W , entonces $T^{-1}(L) \subset V$ es un subespacio de V .

DEMOSTRACIÓN. (1) Si $v \in V$, entonces $T(-v) = T((-1)v) = (-1)T(v) = -T(v)$. Por otro lado, $T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V)$, de donde se deduce sumando $-T(0_V)$ en ambos lados de la igualdad que $T(0_V) = 0_W$.

(2) Si $u, u' \in U$ y $a, b \in \mathbb{k}$ tenemos que $T|_U(au + bu') = T(au + bu') = aT(u) + bT(u') = aT|_U(u) + bT|_U(u')$.

(3) La propiedad (1) nos garantiza que $0_W \in T(U)$. Si $w, w' \in T(U)$, existen $u, u' \in U$ tales que $T(u) = w$ y $T(u') = w'$. Luego si $a, b \in \mathbb{k}$ tenemos que $aw + bw' = aT(u) + bT(u') = T(au + bu') \in T(U)$.

(4) La propiedad (1) nos garantiza que $0_V \in T^{-1}(L)$. Si $v, v' \in T^{-1}(L)$, entonces $T(v), T(v') \in L$, de donde se deduce que si $a, b \in \mathbb{k}$, $aT(v) + bT(v') \in L$, dado que L es un subespacio. Luego, $T(av + bv') = aT(v) + bT(v') \in L$, lo que significa que $av + bv' \in T^{-1}(L)$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco de las propiedades (3) y (4) del Lema anterior no es válido.

EJEMPLO 2.44. Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}^2$ dada por $T(a, b) = (a, 0)$.

El subconjunto $U = \{(0, 1)\} \subset \mathbb{k}^2$ no es un subespacio vectorial, pero $T(U) = \{(0, 0)\} \subset \mathbb{k}^2$ sí lo es.

Por otra parte, el subconjunto $L = \{(a, a^3) : a \in \mathbb{k}\}$ no es un subespacio vectorial, pero $T^{-1}(L) = \{(0, b) : b \in \mathbb{k}\}$ sí lo es.

DEFINICIÓN 2.45. Si V y W son espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, se define el *núcleo* de T como

$$N(T) = \{v \in V : T(v) = 0\} = T^{-1}(\{0\}).$$

EJEMPLOS 2.46. (1) El núcleo de la transformación lineal nula $\Theta : V \rightarrow W$ es todo el dominio $N(\Theta) = V$.

(2) Calculemos el núcleo de la transformación lineal $T : \mathbb{k}^3 \rightarrow \mathbb{k}^3$, $T(a, b, c) = (a + b, b + c, 0)$. Un vector (a, b, c) pertenece a $N(T)$ si y sólo si $T(a, b, c) = (0, 0, 0)$, es decir si y sólo si $(a + b, b + c, 0) = (0, 0, 0)$. Luego

$$(a, b, c) \in N(T) \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales anterior tenemos que

$$N(T) = \{(a, -a, a) : a \in \mathbb{k}\} = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

OBSERVACIÓN 2.47. (1) V y W son dos espacios vectoriales, del Ejemplo 2.10 deducimos que el conjunto W^V de las funciones de V en W es un espacio vectorial. Veamos que $\text{Hom}(V, W)$ es un subespacio de W^V :

Ya vimos que la función $\Theta : V \rightarrow W$ constantemente igual a 0_W , i.e. $0(v) = 0_W$ para todo $v \in V$, es una transformación lineal. Si $T, S : V \rightarrow W$ son transformaciones lineales, entonces

$$\begin{aligned} (aT + bS)(\alpha u + \beta v) &= a(T(\alpha u + \beta v)) + b(S(\alpha u + \beta v)) = \\ &= a\alpha T(u) + a\beta T(v) + b\alpha S(u) + b\beta S(v) = \\ &= \alpha((aT + bS)(u)) + \beta((aT + bS)(v)). \end{aligned}$$

De esta forma verificamos que $aT + bS$ es una transformación lineal.

(2) Es muy simple verificar que si $T : V \rightarrow W$ y $S : W \rightarrow U$ son transformaciones lineales entre espacios vectoriales, entonces $S \circ T : V \rightarrow U$ es también una transformación lineal. En otras palabras la composición de transformaciones lineales es siempre una transformación lineal. Es también evidente que $\text{id} : V \rightarrow V$ es una transformación lineal, o sea un endomorfismo de V .

(3) En el caso que $V = W$ además de la estructura de espacio vectorial, $\text{End}(V)$ está equipado con la operación de composición. En ese caso estamos frente a lo que se llama un álgebra¹.

En el caso de $\text{End}(V)$ el elemento unitario es el endomorfismo $\text{id} : V \rightarrow V$.

¹Un álgebra es un espacio vectorial A equipado además con una operación de producto $\times : A \times A \rightarrow A$ y un elemento unitario $1 \in A$ tal que — denotando el producto $\alpha \times \beta$ como $\alpha\beta$ para abreviar: para todo $\alpha, \beta, \gamma \in A$ (a) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$; (b) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, $\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$; (c) $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$; (d) Si $a \in \mathbb{k}$ entonces $a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta = \alpha(a\beta)$.

(4) Se deduce inmediatamente del Lema 2.43 que el núcleo de una transformación lineal es siempre un subespacio del dominio.

En la literatura, muchas veces el núcleo de una transformación lineal T se nota como $\text{Ker}(T)$ (del alemán *Kernel* = núcleo).

EJEMPLOS 2.48. (1) Si V es un espacio vectorial y $a \in \mathbb{k}$ es un elemento fijo del cuerpo, entonces la función $v \mapsto av : V \rightarrow V$ es una transformación lineal.

(2) Si V es un espacio vectorial, $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ una funcional lineal y $v \in V$ un vector de V , se define la transformación lineal $f|v : V \rightarrow V$ de la siguiente forma: $(f|v)(u) = f(u)v$. Es claro que de esta forma tenemos una transformación lineal y que si $f \neq 0$ entonces $\text{Im}(f|v) = \langle v \rangle$. Se puede probar (ver Ejercicio 4.12) que si V es un espacio vectorial un generador con un número finito de elementos y T es una transformación lineal de V en sí mismo, entonces T es la suma de un número finito de transformaciones de la forma $f|v$, ver también Lema 5.20.

(3) Si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, la función $\varphi : \mathbb{k} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$, $\varphi(a) = aT$, es una transformación lineal.

(4) Un elemento $A \in M_{m \times n}$ define una transformación lineal $L_A : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$ mediante la siguiente fórmula:

$$L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

La transformación lineal L_A puede pensarse como $L_A(x) = Ax$, donde x es un vector columna, ver Apéndice B.

(5) El mapa $\varphi : M_{m \times n} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^m)$, $\varphi(A) = L_A$, define una transformación lineal. Probaremos más tarde que es un isomorfismo.

(6) La función $D : \mathcal{D}(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{(a, b)}$, $D(f) = f'$, es una transformación lineal. En ese caso $N(D) \subset \mathcal{D}(a, b)$ es el subespacio de las funciones constantes, i.e., el subespacio generado por la función constantemente igual a 1.

(7) Si V es un espacio vectorial arbitrario, entonces $\text{Hom}(\mathbb{k}, V) \cong V$. Para probar esta afirmación se define la transformación lineal $\Gamma : \text{Hom}(\mathbb{k}, V) \rightarrow V$, $\Gamma(T) = T(1)$ si $T \in \text{Hom}(\mathbb{k}, V)$. Definimos también $\Delta : V \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{k}, V)$ $\Delta(v) : \mathbb{k} \rightarrow V$, $\Delta(v)(a) = av$ si $a \in \mathbb{k}$. Es fácil ver que $\Delta = \Gamma^{-1}$.

OBSERVACIÓN 2.49. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Por definición, T es sobreyectiva si $\text{Im}(T) = W$.

Veremos a continuación un criterio para detectar cuándo una transformación lineal es inyectiva.

LEMA 2.50. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces T es inyectiva (pensada como función entre los conjuntos V y W) si y sólo si $N(T) = \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que T es inyectiva; en ese caso si $T(v) = 0_W$, como $0_W = T(0_V)$ tenemos la igualdad $T(v) = T(0_V)$ de la cual deducimos que $v = 0_V$. Hemos probado que si un vector $v \in V$ verifica que $T(v) = 0_W$, entonces $v = 0_V$, en definitiva $N(T) = \{0_V\}$.

Recíprocamente, si $T(v) = T(v')$, entonces $T(v - v') = 0_W$ y si la transformación lineal tiene núcleo cero concluimos que $v - v' = 0_V$, i.e., $v = v'$. Hemos probado que si dos vectores $v, v' \in V$ tienen la misma imagen por T entonces son iguales. Eso quiere decir que T es inyectiva como función. $\square$

4. Ejercicios

1. Averiguar si las siguientes estructuras $(V, +, \cdot)$ son $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales.

- (a) $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall f, g \in V$,
 $(\lambda \cdot f)(x) = f(\lambda x)$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in V$.
- (b) $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall f, g \in V$,
 $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda + f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in V$.
- (c) $V = \{(a_n)_{n \geq 1} \text{ sucesiones en } \mathbb{R}\}$, $(a_n)_{n \geq 1} + (b_n)_{n \geq 1} = (a_n^2 + b_n^2)_{n \geq 1}$,
 $\lambda \cdot (a_n)_{n \geq 1} = (\lambda a_n)_{n \geq 1}$.

2. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones punto a punto. Averiguar si los siguientes subconjuntos $W \subseteq V$ son subespacios de $(V, +, \cdot)$.

- (a) $W = \{f \in V : f(1) = 1\}$.
- (b) $W = \{f \in V : f(1) = 0\}$.
- (c) $W = \{f \in V : \exists f''(0)\}$.
- (d) $W = \{f \in V : \exists f''(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$.

3. Sea V un espacio vectorial. Probar que el opuesto de un elemento es único.

4. Sea V el espacio vectorial de las sucesiones que toman valores reales. Averiguar si los siguientes subconjuntos $W \subseteq V$ son subespacios de $(V, +, \cdot)$.

- (a) $W = \{(a_n) \in V : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$.
- (b) $W = \{(a_n) \in V : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1\}$.
- (c) $W = \{(a_n) \in V : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}\}$.
- (d) $W = \{(a_n) \in V : \#\{n : a_n \neq 0\} < \infty\}$.

5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}[x]$?

- (a) $W_1 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(0) = 0\}$;
- (b) $W_2 = \{f \in \mathbb{R}[x] : 2f(0) = f(1)\}$;
- (c) $W_3 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(t) = f(1-t) \forall t \in \mathbb{R}\}$;
- (d) $W_4 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f = \sum_{i=0}^n a_i x^{2i}\}$.

6. Averiguar si las siguientes estructuras $(V, +, \cdot)$ son espacios vectoriales.

- (a) $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 - y_2)$,
 $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$.
- (b) $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,
 $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, 0)$.

7. Si V y W son $\mathbb{k}$ -espacios vectoriales, probar que $V \times W$ es un espacio vectorial con la siguiente estructura:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

$$\lambda \cdot (v_1, w_1) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot w_1).$$

8. Averiguar si las siguientes estructuras $(V, +, \cdot)$ son espacios vectoriales.

- (a) $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 - y_2)$,
 $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$.

- (b) $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
 $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, 0)$.

9. En $V = \mathbb{R}^2$ se definen las siguientes operaciones:

- (i) $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$,
(ii) $\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

¿Es V con estas operaciones un espacio vectorial real?

10. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones punto a punto. Averiguar si los siguientes subconjuntos $W \subseteq V$ son subespacios de $(V, +, \cdot)$.

- (a) $W = \{f \in V : f(1) = 1\}$.
(b) $W = \{f \in V : f(1) = 0\}$.
(c) $W = \{f \in V : \exists f''(0)\}$.
(d) $W = \{f \in V : \exists f''(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$.

11. Probar que si V es un espacio vectorial y $X \subset V$ es un subconjunto, entonces

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : a_i \in \mathbb{k}, v_i \in X, n \geq 0 \right\}.$$

Ver observaciones 2.21 (3) y 2.26.

12. Probar que el conjunto $B_n(\mathbb{k}) = \{M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{k}) : m_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ de las matrices triangulares superiores es un subespacio de $M_n(\mathbb{k})$.

13. Se define la *traza* de una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$ como $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Sea $V = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \text{tr}(A) = 0\}$. Probar que V es un subespacio de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

14. Si V y W son $\mathbb{k}$ -espacios vectoriales, probar que $V \times W$ es un espacio vectorial con la siguiente estructura:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

$$\lambda \cdot (v_1, w_1) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot w_1).$$

15. Calcular la suma de los siguientes subespacios y decir si es directa:

- (a) $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x, 0, z, 0) \in \mathbb{R}^4\}$, $W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$.
(b) $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^4$, $W_1 = \langle (2, 0, 2, 0) \rangle$, $W_2 = \langle (1, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle$, $W_3 = \langle (0, 1, 2, 1) \rangle$.

16. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Recordamos que $V^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow V\}$ es un espacio vectorial, con operaciones “punto a punto”:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad f, g \in V^{\mathbb{R}}, \lambda, x \in \mathbb{R}.$$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x))$$

Probar que si $W \subset V$ es un subespacio de V entonces el subconjunto

$$W^{\mathbb{R}} = \{f \in V^{\mathbb{R}} : f(x) \in W \forall x \in \mathbb{R}\} \subset V^{\mathbb{R}}$$

es un subespacio de $V^{\mathbb{R}}$.

17. Sean V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y $v, w \in V$. Demuestre que $\langle v, w \rangle = \langle v + w, v - w \rangle$.
18. Hallar $S + T$ y determinar si la suma es directa, siendo S y T los subespacios de $\mathbb{R}^3$ siguientes:

- (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.
 (b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.
 (c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$.

19. Calcular la suma de los siguientes subespacios y decir si es directa:

- (a) $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x, 0, z, 0) \in \mathbb{R}^4\}$, $W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$.
 (b) $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^4$, $W_1 = \langle (2, 0, 2, 0) \rangle$, $W_2 = \langle (1, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle$, $W_3 = \langle (0, 1, 2, 1) \rangle$.

20. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}, \\ V &= \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}, \\ W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}. \end{aligned}$$

1. Probar que $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.
 2. Probar que $\mathbb{R}^3 = U + W$ y que esta suma no es directa.

21. Completar la prueba del Lema 2.34:

Sea V un espacio vectorial y $\{W_i : i \in I\}$ una familia de subespacios. Los subespacios son linealmente disjuntos si y sólo si para todo $j \in I$ tenemos que $W_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} W_i = \{0\}$.

22. (a) Sea V el espacio de las funciones de $[-a, a]$ en $\mathbb{R}$. Consideremos las funciones pares y las impares:

$$\begin{aligned} P &= \{f \in V : f(x) = f(-x) \forall x \in [-a, a]\} \\ I &= \{f \in V : f(x) = -f(-x) \forall x \in [-a, a]\} \end{aligned}$$

Probar que P e I son subespacios y que $V = P \oplus I$.

- (b) Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio y $j : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $j \circ j = \text{id}_V$. Sean

$$\begin{aligned} S &= \{v \in V : j(v) = v\} \\ A &= \{v \in V : j(v) = -v\} \end{aligned}$$

Probar que S y A son subespacios y que $V = S \oplus A$.

- (c) Deducir la parte (a) y la descomposición de las matrices en suma directa de las simétricas y las antisimétricas de la parte (b).

23. En los siguientes casos determinar si la transformación T es lineal:

- (a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (y - x, z + y)$.
 (b) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x, x)$.
 (c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x^2, x, z - x)$.
 (d) $T : \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $T(f) = f(a)$.
 (e) $T : V \rightarrow \mathbb{R}$, $T(\{a_n\}) = \lim a_n$, donde $V = \{(a_n) : \exists \lim a_n\}$.
 (f) $\text{tr} : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, la traza.
 (g) $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $T(f) = f^2$.

- (h) $T : \mathbb{k}[X]_n \rightarrow \mathbb{k}[X]_{n+1}$, $T(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = a_0X + (a_1/2)X^2 + \cdots + (a_n/n + 1)X^{n+1}$.
24. Hallar el núcleo y la imagen de las transformaciones lineales del ejercicio 23.
25. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(p) = (p(0), p(1), p(2))$.
1. Probar que es una transformación lineal.
 2. Hallar el núcleo y la imagen de T .
 3. Estudiar inyectividad y sobreyectividad de T .
26. Se considera la función $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $D(p) = p'$.
- (a) Probar que D es lineal y sobreyectiva.
 - (b) Hallar $N(D)$.
27. Sean $D : \mathbb{R}[X]_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}[X]_n$, $D(p) = p'$ y $T : \mathbb{R}[X]_n \rightarrow \mathbb{R}[X]_{n+1}$ la transformación del ejercicio 23(h). Probar que $D \circ T = \text{id}$ pero que $T \circ D \neq \text{id}$.
28. Definimos en el conjunto $\mathbb{k}[x] \times \mathbb{k}[x]^*$ la siguiente relación : $(f, g) \mathcal{R} (f', g')$ si $fg' - gf' = 0$ (se recuerda que $\mathbb{k}[x]^* = \mathbb{k}[x] \setminus \{0\}$).
- (a) Probar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia. Notaremos $\mathbb{R}(x) = (\mathbb{k}[x] \times \mathbb{k}[x]^*)/\mathcal{R}$, y $f/g = \mathcal{R}[(f, g)]$.
 - (b) Probar que $\mathbb{R}(x)$ es un cuerpo con las siguientes operaciones:

$$f(x)/g(x) + f'(x)/g'(x) = (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))/g(x)g'(x)$$

$$f(x)/g(x) \cdot f'(x)/g'(x) = f(x)f'(x)/g(x)g'(x).$$
 - (c) Probar que $\iota : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}(x)$, $\iota(p) = \frac{p}{1}$, es una transformación lineal tal que $\iota(pq) = \iota(p)\iota(q)$. En otras palabras, ι es un *morfismo de álgebras*. Observar que ι es inyectiva.
 - d Probar que $\mathbb{R}[x]$ es un subespacio de $\mathbb{R}(x)$ como $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, en donde identificamos $\mathbb{R}[x]$ con $\iota(\mathbb{R}[x])$.
 - (d) ¿Es $\mathbb{R}[x]$ un $\mathbb{R}(x)$ -espacio vectorial?
29. (a) Sea $D_n(\mathbb{k}) = \{A \in M_n(\mathbb{k}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$. Probar que $D_n(\mathbb{k}) \cong \mathbb{k}^n$.
- (b) Probar que $\mathbb{k}[X]_n \cong \mathbb{k}^{n+1}$.
- (c) Probar que $\mathbb{k}^{\{x\}} \cong \mathbb{k}$.
30. Sean V y W espacios vectoriales, $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal y $B \subset \text{Im}(T)$ un subespacio.
- (a) Probar que $A = T^{-1}(B)$ es el único subespacio de V tal que $N(T) \subseteq A$ y $T(A) = B$.
 - (b) Sea $C \subseteq V$ un subespacio. Probar que $A = N(T) \oplus C$ si y sólo si $T(C) = B$ y $T|_C$ es inyectiva.
31. Si existe, dar un ejemplo de una transformación lineal T tal que su núcleo sea $N(T) = \langle (4, -7, 5) \rangle$ y su imagen sea $\text{Im}(T) = \langle (2, -1, 1), (-1, 3, 2) \rangle$.
32. (a) Hallar $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineal, tal que

$$N(T) = \langle (1, -1, 2, 1), (0, -1, 2, 2) \rangle$$

$$\text{Im}(T) = \langle (1, 2, -1), (2, 1, -2) \rangle.$$

(b) Hallar $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ lineal, tal que

$$N(T) = \langle 1 + x^2 \rangle, \quad \text{Im}(T) = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a = b, c = d \right\rangle$$

33. Sea $T : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}$ transformación lineal dada por

$$T(at^2 + bt + c) = \int_0^1 (at^2 + bt + c) dt$$

1. Hallar $N(T)$.
2. Hallar $\text{Im}(T)$.

34. Sean V y W espacios vectoriales, $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal y $B \subset \text{Im}(T)$ un subespacio.

- (a) Probar que $A = T^{-1}(B)$ es el único subespacio de V tal que $N(T) \subseteq A$ y $T(A) = B$.
- (b) Sea $C \subseteq V$ un subespacio. Probar que $A = N(T) \oplus C$ si y sólo si $T(C) = B$ y $T|_C$ es inyectiva.

35. Sean X un conjunto y V un $\mathbb{k}$ -espacio vectorial.

- (a) Sea $Y \subseteq X$. Probar que $Y^0 = \{f \in V^X : f|_Y = 0\}$ es un subespacio de V^X . (Nota: si $Y = \emptyset$ se define $Y^0 = V^X$).
- (b) Probar que $Y^0 = V^X$ si y sólo si $Y = \emptyset$ y que $Y^0 = \{0\}$ si y sólo si $Y = X$.
- (c) Sean $Y, Z \subseteq X$. Probar que $(Y \cup Z)^0 = Y^0 \cap Z^0$ y que $(Y \cap Z)^0 = Y^0 + Z^0$.
- (d) Deducir que $V^X = Y^0 \oplus Z^0$ si y sólo si $X = Y \cup Z$ y $Y \cap Z = \emptyset$.

36. Definimos $+: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ como $a + b = ab$ (el producto usual de los reales) y $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ como $\lambda \cdot a = a^\lambda$. Probar que $(\mathbb{R}^*, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}$.

37. Sean V, W dos espacios vectoriales. Consideremos las funciones $T : V \rightarrow V \times W$, $T(v) = (v, 0_W)$, y $S : W \rightarrow V \times W$, $S(w) = (0_V, w)$.

- (a) Probar que T y S son transformaciones lineales inyectivas. Hallar sus imágenes.
- (b) Probar que $V \times W = \text{Im}(T) \oplus \text{Im}(S)$.
- (c) Sea U un espacio vectorial y $f : V \rightarrow U$, $g : W \rightarrow U$ dos transformaciones lineales. Probar que existe una única transformación lineal $R : V \times W \rightarrow U$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{T} & V \times W & \xleftarrow{S} & W \\ & \searrow f & \downarrow R & \swarrow g & \\ & & U & & \end{array}$$

es conmutativo.

- (c) Sea U un espacio vectorial y $f' : U \rightarrow V$, $g' : U \rightarrow W$ dos transformaciones lineales. Probar que existe una única transformación lineal $Q : U \rightarrow V \times W$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V & \xleftarrow{p} & V \times W & \xrightarrow{q} & W \\ & \nwarrow f' & \uparrow Q & \nearrow g' & \\ & & U & & \end{array}$$

es conmutativo, donde p, q son las proyecciones de $V \times W$ en V y W respectivamente — observar que p y q son transformaciones lineales.

38. Sea V un espacio vectorial y $W, U \subset V$ subespacios tales que $W \subset U$. Probar que si $K \subset V$ es un subespacio tal que $W \oplus K = V$, entonces $W \oplus (U \cap K) = U$.

Capítulo 3

Dependencia e independencia lineal

En este capítulo estudiaremos tres conceptos de gran importancia para el desarrollo del álgebra lineal: el concepto de conjunto generador, el concepto de conjunto linealmente independiente y el de base de un espacio vectorial.

En el Capítulo 2, dado un espacio vectorial V y un subconjunto arbitrario $X \subset V$, definimos el *subespacio de V generado por X* , que denotamos $\langle X \rangle$. Este subespacio $\langle X \rangle$ es el menor subespacio que contiene a X y se puede describir explícitamente como el conjunto de los vectores $v \in V$ de la forma $v = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ donde $x_1, \dots, x_n \in X$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$; i.e., v es una *combinación lineal* finita de elementos de X .

En esa situación decimos que $\langle X \rangle$ está generado por X o que X genera $\langle X \rangle$.

Observemos que si $X \subset Y$ entonces $\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$ y si X es un *subespacio* de V entonces $\langle X \rangle = X$.

DEFINICIÓN 3.1. Sea V un espacio vectorial cualquiera, decimos que $G \subset V$ genera V o que G es un conjunto *generador* de V si $\langle G \rangle = V$. Si está claro el espacio al que nos referimos diremos simplemente que G es un generador.

EJEMPLO 3.2. (1) Recordemos que en $\mathbb{k}$ visto como espacio vectorial sobre sí mismo, los únicos subespacios son los triviales, $\{0\}$ y $\mathbb{k}$. Luego, todo conjunto que contenga un elemento no nulo es un generador de $\mathbb{k}$, ver Observación 2.21.

(2) Vimos que los subespacios no triviales de $\mathbb{R}^2$ son las rectas que pasan por el origen. Si ℓ es una tal recta y $X = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \ell$, entonces X genera a ℓ siempre y cuando exista i tal que $v_i \neq 0$.

Un conjunto que contenga dos vectores que no sean colineales con el origen genera todo el plano $\mathbb{R}^2$.

(3) Consideremos ahora el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. Si ℓ es una recta que pasa por el origen, nuevamente un generador de ℓ está dado por un subconjunto $X = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \ell$, tal que existe i con $v_i \neq 0$. Observemos que alcanza con $v \in \ell \setminus \{0\}$ para generar el subespacio ℓ : $\langle v \rangle = \ell$.

El subespacio generado por dos vectores no colineales con el origen es el plano por el origen que los contiene.

Finalmente, si tomamos dos vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ no colineales con el origen y v_3 que no pertenezca al plano determinado por v_1, v_2 y el origen, entonces $\mathbb{R}^3$ está generado por $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(4) En el espacio $\mathbb{R}^n$, el conjunto $G = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$ genera $\mathbb{R}^n$.

El conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$, donde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, con el 1 en la posición i , genera $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 3.3. (1) El conjunto formado por los monomios $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\} \subset \mathbb{k}[t]$ genera $\mathbb{k}[t]$. El conjunto $X = \{t, t^2, \dots, t^n, \dots\} \subset \mathbb{k}[t]$ no genera $\mathbb{k}[t]$. En efecto, el subespacio generado por X es el formado por los polinomios que se anulan en 0, y entonces $\langle X \rangle \subsetneq \mathbb{k}[t]$.

(2) Consideremos el subespacio $\mathbb{k}_n[t] = \{p \in \mathbb{k}[t] : \text{gr}(p) \leq n\}$, donde $\text{gr}(p)$ indica el grado del polinomio p . En ese caso los polinomios $\{1, t, \dots, t^n\}$ forman un conjunto que genera $\mathbb{k}_n[t]$.

(3) El conjunto $G' = \{1 - t, 2 + t, t\}$ es generador de $\mathbb{k}_1[t]$. También el conjunto $G = \{1 - t, t\}$ es generador de $\mathbb{k}_1[t]$.

En efecto, $\langle G' \rangle = \mathbb{k}_1[t]$ si y solo si dado $a + bt \in \mathbb{k}_1[t]$, existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$ tales que

$$a + bt = \alpha(1 - t) + \beta(2 + t) + \gamma t = (\alpha + 2\beta) + (-\alpha + \beta + \gamma)t,$$

lo que equivale a que (α, β, γ) sean solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = a \\ -\alpha + \beta + \gamma = b \end{cases} \quad (3.0.1)$$

Este sistema de ecuaciones es compatible indeterminado, con solución $(a - 2\beta, \beta, a + b - 3\beta)$.

Análogamente, G es generador de $\mathbb{k}_1[t]$ si para todo $a, b \in \mathbb{k}$, existen $\alpha, \gamma \in \mathbb{k}$ tales que

$$a + bt = \alpha(1 - t) + \gamma t = \alpha + (-\alpha + \gamma)t,$$

lo que equivale a que (α, γ) sean solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha = a \\ -\alpha + \gamma = b \end{cases} \quad (3.0.2)$$

Este sistema de ecuaciones es compatible determinado, con solución $(a, 0, a + b)$.

Observemos que el sistema de ecuaciones (3.0.2) se obtiene del sistema (3.0.1) evaluando en $\beta = 0$.

EJEMPLO 3.4. Si G es un generador de V y $G \subset G'$, entonces G' es también un generador de V (ver el ejemplo anterior). El caso límite es cuando $G = V$, que es siempre un conjunto generador de V . Es evidente que si un *subespacio* G genera V , entonces $G = V$.

Como se verifica en los ejemplos 3.2, (3) y (4), un conjunto generador puede contener subconjuntos generadores más pequeños. Los conjuntos generadores minimales — es decir aquellos para los que ningún subconjunto propio también genera V — juegan un rol muy importante en la teoría. En esa dirección, tenemos el siguiente resultado.

LEMA 3.5. *Sea V un $\mathbb{k}$ -espacio, $X \subset V$ un subconjunto y $x_0 \in X$. Entonces, se cumple que $\langle X \setminus \{x_0\} \rangle = \langle X \rangle$ si y sólo si $x_0 \in \langle X \setminus \{x_0\} \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\langle X \setminus \{x_0\} \rangle = \langle X \rangle$, como $X \subset \langle X \rangle$, todo vector de X puede ponerse como combinación lineal de elementos de $X \setminus \{x_0\}$; en particular $x_0 \in \langle X \setminus \{x_0\} \rangle$.

Recíprocamente, si $x_0 \in \langle X \setminus \{x_0\} \rangle$, existen vectores $x_1, \dots, x_n \in X \setminus \{x_0\}$ y escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$, tales que $x_0 = \sum a_i x_i$. Si v es un vector arbitrario de $\langle X \rangle$, entonces

$v = ax_0 + \sum_1^m b_j y_j$, donde $y_1, \dots, y_m \in X$ son vectores de X , ninguno de los cuales coincide con x_0 (observar que $a, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{k}$ pueden ser cero). Si sustituimos x_0 por $x_0 = \sum a_i x_i$ en la expresión de v tenemos que $v = \sum_1^n aa_i x_i + \sum_1^m b_j y_j$. Como, por la forma que fueron definidos, ninguno de los vectores $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X$ coincide con x_0 , concluimos que $X \setminus \{x_0\}$ genera V . $\square$

OBSERVACIÓN 3.6. Un análisis más detallado de la prueba anterior (que es correcta) nos permite detectar un fenómeno que más adelante, cuando tratemos de probar otro tipo de resultados, sí deberemos tener en cuenta:

Nótese que en la prueba anterior lo único que se sabe acerca de $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ es su pertenencia a $X \setminus \{x_0\}$. Si bien puede suponerse que $x_i \neq x_j$ toda vez que $i \neq j$ y que $y_h \neq y_k$ toda vez que $h \neq k$, en principio pueden existir $i_0 \in [n]$ y $h_0 \in [m]$ tales que $x_{i_0} = y_{h_0}$. Como dijéramos al inicio de la Observación, esto no afecta la prueba del Lema 3.5, ya que lo único que se necesita es saber que todos los vectores x_i, y_h pertenecen a X .

DEFINICIÓN 3.7. (1) Un conjunto finito de vectores $\{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ se dice *linealmente independiente* si la única combinación lineal que da cero es aquella para la cual todos los a_i son cero; en otras palabras: de una igualdad del tipo $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, se deduce que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

(2) Sea ahora $X \subset V$ un subconjunto cualquiera. Decimos que X es *linealmente independiente* si todo subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ es linealmente independiente. En el Lema 3.11 (ver también Observación 3.12) probaremos que si X es un conjunto finito linealmente independiente, entonces todo subconjunto de X es linealmente independiente, por lo que esta definición coincide en el caso finito con la dada anteriormente.

(3) Un conjunto de vectores $X \subset V$ se dice que es *linealmente dependiente* si no es linealmente independiente. En otras palabras si se verifica una igualdad de la forma $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$, donde $\{v_1, \dots, v_n\} \subset X$ y existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_{i_0} \neq 0$. Observemos que estamos suponiendo que los vectores v_i son dos a dos distintos, es decir $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$.

Claramente un conjunto es linealmente dependiente si contiene un subconjunto finito linealmente dependiente.

(4) Al conjunto vacío $\emptyset$ lo consideramos como linealmente independiente.

OBSERVACIÓN 3.8. Sean $x_1, \dots, x_n \in V$ vectores de V dos a dos distintos, y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ escalares, tales que se verifica la igualdad

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0. \quad (3.0.3)$$

Si existe i_0 tal que $a_{i_0} \neq 0$, diremos que la igualdad 3.0.3 es una *relación de dependencia no trivial*.

Obsérvese que si $a_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, entonces se verifica la igualdad: $0x_1 + \dots + 0x_n = 0$.

Un conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_n\}$ es linealmente independiente si no presenta relaciones de dependencia no triviales y es linealmente dependiente si presenta alguna relación de dependencia no trivial.

EJEMPLO 3.9. (1) El conjunto $I = \{(1, 2, 3), (1, -1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ es linealmente independiente.

finito) de I es también linealmente independiente. Esta observación es necesaria para que la Definición 3.7 de independencia lineal tenga sentido.

LEMA 3.13. *Sea $X \subset V$ un subconjunto de un espacio vectorial. Entonces son equivalentes:*

- (1) *El conjunto X es linealmente dependiente.*
- (2) *Existe $x \in X$ de modo que $x \in \langle X \setminus \{x\} \rangle$.*
- (3) *Existe $x \in X$ tal que $\langle X \rangle = \langle X \setminus \{x\} \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) $\implies$ (2) Si X es linealmente dependiente, existe una relación de dependencia no trivial $\sum_i b_i x_i = 0$. Si la relación es del tipo $ax = 0$, deducimos que $x = 0$, por lo que $x \in \langle X \setminus \{x\} \rangle$. En otro caso, cambiando eventualmente el orden de la suma, podemos suponer que $b_1 \neq 0$ y escribir $x_1 = \sum_{i=2}^n (-b_i/b_1)x_i$. Luego, $x_1 \in \langle X \setminus \{x_1\} \rangle$.

(2) $\implies$ (1) Si podemos escribir $x = \sum a_i x_i$ con $x_i \in X \setminus \{x\}$, restando x en la igualdad anterior encontramos una relación de dependencia no trivial entre los elementos de D .

(2) $\iff$ (3) es el contenido del Lema 3.5. $\square$

Es claro que el Lema 3.13 puede reformularse como sigue.

LEMA 3.14. *Sea $X \subset V$ un subconjunto de un espacio vectorial. Entonces son equivalentes:*

- (1') *El conjunto X es linealmente independiente.*
- (2') *No existe ningún $x \in X$ tal que $x \in \langle X \setminus \{x\} \rangle$. Equivalentemente: para todo $x \in X$ se cumple que $x \notin \langle X \setminus \{x\} \rangle$.*
- (3') *No existe ningún $x \in X$ tal que $\langle X \rangle = \langle X \setminus \{x\} \rangle$. Equivalentemente: para todo $x \in X$ se cumple que $\langle X \setminus \{x\} \rangle \subsetneq \langle X \rangle$.* $\square$

EJEMPLO 3.15. En $\mathbb{C}^3$, $\{(1, i, 0), (i, 1, 2), (1 + 2i, 2 + i, 4)\}$ es un conjunto linealmente dependiente, ya que $(2 + 2i, 2 + 2i, 4) = (1, i, 0) + 2(i, 1, 2)$.

COROLARIO 3.16. *Supongamos que I es un subconjunto de V que es linealmente independiente; sea $v \in V \setminus I$ un vector fijo.*

- (1) *El conjunto $I \cup \{v\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $v \in \langle I \rangle$.*
- (2) *El conjunto $I \cup \{v\}$ es linealmente independiente si y sólo si $v \notin \langle I \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Se deduce del Lema 3.13 que si $v \in \langle I \rangle$ entonces $I \cup \{v\}$ es linealmente dependiente. En efecto, como $v \notin I$, tenemos que $(I \cup \{v\}) \setminus \{v\} = I$, por lo que se verifica (2) de dicho lema, tomando $X = I \cup \{v\}$ y $x = v$.

Recíprocamente, si $I \cup \{v\}$ es linealmente dependiente existe una relación de dependencia no trivial $av + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, para ciertos $a, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$, con $x_i \in I$. Si $a \neq 0$, entonces $v = \sum_{i=1}^n \frac{-a_i}{a} x_i$, por lo que $v \in \langle I \rangle$. Si $a = 0$, tenemos que $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, por lo que $a_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$ — recordemos que I es linealmente independiente —, lo que contradice que la relación de dependencia $av + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ es no trivial.

(2) Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la propiedad (1) — de hecho es el contra-recíproco de (1). $\square$

TEOREMA 3.17. *Sea $B \subset V$ un subconjunto de un espacio vectorial. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

- (1) *El conjunto B es linealmente independiente y genera V .*
- (2) *El conjunto B no contiene al 0, y si $v \in V$ es no nulo, existen vectores $x_1, \dots, x_k \in B$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, y escalares $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ no nulos tales que $v = \sum_1^k a_i x_i$, además los vectores y los escalares que verifican lo anterior son únicos.*
- (3) *El conjunto B es generador minimal de V , i.e., B genera V y si $I \subsetneq B$ entonces I no genera V .*
- (4) *El conjunto B es linealmente independiente maximal en V , i.e., B es linealmente independiente y si $B \subsetneq G$ entonces G no es linealmente independiente.*

DEMOSTRACIÓN. (1) $\implies$ (2) Claramente $0 \notin B$, ya que de lo contrario B sería linealmente dependiente. Sea $v \in V$ con $v \neq 0$; como B genera V , existen elementos $x_1, \dots, x_k \in B$ y escalares no nulos $a_1, \dots, a_k$ tales que $v = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k$. Afirmamos que estos vectores y escalares son únicos. En efecto, si hubiera otros $y_1, \dots, y_\ell \in B$ y escalares $b_1, \dots, b_\ell$ de modo que $v = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = b_1 y_1 + \dots + b_\ell y_\ell$ queremos probar que los vectores x 's y los y 's coinciden y que lo mismo sucede con los escalares. Consideremos el conjunto — que puede ser vacío — $\{z_1, \dots, z_t\} = \{x_1, \dots, x_k\} \cap \{y_1, \dots, y_\ell\}$. Reordenando los subíndices, podemos suponer que

$$a_1 z_1 + \dots + a_t z_t + a_{t+1} x_{t+1} + \dots + a_k x_k = b_1 z_1 + \dots + b_t z_t + b_{t+1} y_{t+1} + \dots + b_\ell y_\ell.$$

Luego,

$$(a_1 - b_1) z_1 + \dots + (a_t - b_t) z_t + a_{t+1} x_{t+1} + \dots + a_k x_k - b_{t+1} y_{t+1} - \dots - b_\ell y_\ell = 0,$$

y de la independencia lineal de los elementos de B deducimos que $a_i = b_i$ para $i = 1, \dots, t$ y además que $t = k = \ell$. Esto sucede pues en caso contrario tendríamos que $a_{t+1} = \dots = a_k = b_{t+1} = \dots = b_\ell = 0$ lo que es imposible ya que $a_i \neq 0$ y $b_i \neq 0$ por construcción.

(2) $\implies$ (1) La existencia de una representación de la forma $v = \sum a_i x_i$ para un vector cualquiera de V significa que $\langle B \rangle$ genera V . Veremos ahora que B es un conjunto linealmente independiente. Supongamos que existe alguna relación de dependencia no trivial $0 = a_1 x_1 + \dots + a_r x_r$ entre vectores de B donde suponemos que todos los escalares son no nulos y los vectores son diferentes. Si $k = 1$, la relación de dependencia es del tipo $a_1 x_1 = 0$, y como $a_1 \neq 0$, tenemos que $x_1 = 0$, absurdo. Luego $k \geq 2$, y tenemos que $-a_1 x_1 = a_2 x_2 + \dots + a_r x_r$, $a_2 \neq 0$. Eso viola nuestra hipótesis sobre la unicidad de la expresión en (2).

(1) $\implies$ (3) Supongamos que existe $I \subsetneq B$ que es también generador. Tomando $x \in B \setminus I$ y usando el Corolario 3.16, como $x \in \langle I \rangle$ concluimos que $I \cup \{x\} \subset B$ es linealmente dependiente y esto no es posible pues B es linealmente independiente.

(3) $\implies$ (4) Si B es generador minimal tiene que ser linealmente independiente. Si no lo fuera, habría un vector $x \in B$ tal que $\langle B \rangle = \langle B \setminus \{x\} \rangle$ y eso contradice el hecho de que B es generador minimal. Queremos probar ahora que B es linealmente independiente maximal. Supongamos sea $B \subsetneq G$ y tomemos $z \in G \setminus B$. Como B genera V sabemos que existen elementos $\{x_1, \dots, x_n\}$ en B y escalares $\{a_1, \dots, a_n\}$ tales que $z = \sum a_i x_i$. Esto implica que el subconjunto finito $\{z, x_1, \dots, x_n\} \subset G$ no es linealmente independiente, luego G no puede ser linealmente independiente.

(4) $\implies$ (1) Queremos probar que si B es linealmente independiente maximal, entonces genera V . Si existiera algún vector $v \in V$ no generado por B , tendríamos (ver Corolario 3.16) que $B \cup \{v\}$ sería también linealmente independiente y como contiene estrictamente a B obtenemos una contradicción. $\square$

DEFINICIÓN 3.18. Si V es un espacio vectorial un subconjunto $B \subset V$ que verifique las condiciones del Teorema 3.17 se dice que es una *base* de V .

OBSERVACIÓN 3.19. Por razones mnemotécnicas, si V es un espacio vectorial en general las bases serán representadas por las letras $B, B', C, \dots$, los subconjuntos generadores por las letras $G, G', F, \dots$, los subconjuntos linealmente independientes $I, I', J, \dots$ y los subconjuntos linealmente dependientes $D, D', E, \dots$.

DEFINICIÓN 3.20. Un espacio vectorial V se dice que es *finitamente generado* si existe algún subconjunto finito $G = \{x_1, \dots, x_k\} \subset V$ que es generador de V .

TEOREMA 3.21. Si $V \neq \{0\}$ es un espacio vectorial finitamente generado y G es un conjunto generador con una cantidad finita de elementos, existe una base B de V contenida en G . En particular, V admite una base con una cantidad finita de elementos.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis V admite un conjunto generador G con una cantidad finita de elementos, luego, si la primera parte del teorema es verdadera, podemos encontrar una base contenida en G que obviamente tendrá una cantidad finita de elementos.

Probaremos entonces la primera parte. Si G es linealmente independiente, es también una base, por el Teorema 3.17. Si G no es linealmente independiente, existe algún vector $x \in G$ con la propiedad que $\langle G \setminus \{x\} \rangle = \langle G \rangle$. Luego, el conjunto $G' = G \setminus \{x\}$ es un conjunto generador con menos elementos que el original. Si este conjunto es linealmente independiente, la demostración está terminada; si no, iteramos el procedimiento. En el peor de los casos llegamos a encontrar un conjunto con *un* elemento que es generador. Un conjunto con *un* elemento v es siempre linealmente independiente a menos que $v = 0$. En ese caso el espacio vectorial entero sería $\{0\}$ contra la hipótesis. $\square$

OBSERVACIÓN 3.22. (1) El teorema anterior se puede expresar así: de todo conjunto finito de generadores se puede extraer una base. O sea, a un conjunto finito de generadores se le pueden quitar algunos vectores de modo de que los restantes — que son tan sólo *algunos* de los vectores del conjunto original — sigan siendo generadores y sean además linealmente independientes.

(2) El Teorema 3.21 es válido aún cuando el espacio no sea finitamente generado, o sea aún cuando V no admita ningún conjunto generador con una cantidad finita de elementos. Se prueba así que todo conjunto generador contiene una base. El razonamiento necesario para demostrar esta afirmación es similar al anteriormente realizado, pero necesitamos recurrir a métodos de “inducción transfinita”.

EJEMPLO 3.23. (1) El conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$, donde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ es la n -upla con todos sus coeficientes cero salvo en el lugar i , donde tiene un 1, es una base de $\mathbb{K}^n$, llamada *base canónica*.

(2) En el espacio $M_{n \times m}(\mathbb{K})$ definimos las matrices E_{ij} , $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. La matriz E_{ij} tiene todas las entradas iguales a cero excepto la entrada correspondiente a

la fila i y a la columna j ; esta entrada suponemos que vale uno. Explícitamente,

$$E_{i,j} = \begin{matrix} & & & j \\ & & & \downarrow \\ i \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Es obvio que el conjunto $\{E_{i,j} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ es una base de $M_{n \times m}(\mathbb{k})$.

En la identificación de $M_{n \times m}(\mathbb{k})$ con $\mathbb{R}^{nm}$ (ver el Ejemplo 2.14), la base $E_{i,j}$ es la base canónica (eventualmente descrita en otro orden).

(3) El conjunto $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ es una base de $\mathbb{k}[t]$. El conjunto $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ es una base de $\mathbb{k}_n[t]$.

(4) El espacio vectorial $V = \{0\}$ tiene por base el conjunto vacío. Esta afirmación debe interpretarse como una convención. En ese caso, el Teorema 3.21 es verdadero para el espacio $V = \{0\}$ tomando $B = \emptyset$.

(5) En el Ejemplo 3.2, (5) la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ se puede “extraer” del conjunto generador G , aunque éste no sea finito. Recordar que el Teorema 3.21 es verdadero aunque G no sea finito (ver Observación 3.22).

(6) En $\mathbb{k}_1[t]$ los polinomios $\{1-t, 2-t, t\}$ son generadores y el subconjunto $\{1-t, t\} \subset \{1-t, 2-t, t\}$ es una base.

TEOREMA 3.24. *Sea V un espacio vectorial finitamente generado e $I \neq \emptyset$ un conjunto linealmente independiente, entonces I es finito. Más aún, si I es un conjunto linealmente independiente y G un conjunto generador finito, existe otro conjunto generador G' con el mismo número de elementos que G de modo que $I \subset G'$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que la primera afirmación se deduce directamente de la segunda, probaremos solamente ésta. Primeramente, observemos que como V es finitamente generado, podemos suponer que G es finito. En efecto, si G no es finito consideramos G'' generador finito; si el resultado está probado para generadores finitos existe un generador G' con la misma cantidad de elementos que G'' que contiene a I . Completamos entonces G' hasta tener un generador con la misma cantidad de G'' (agregando elementos cualesquiera) y el resultado está probado.

Sea $x_1 \in I$ y $G = \{z_1, \dots, z_m\}$. Escribimos $x_1 = a_1 z_1 + \cdots + a_m z_m$. Alguno de los coeficientes a_i , con $i = 1, \dots, m$, es no nulo, pues los elementos de un conjunto linealmente independiente no pueden ser nulos, ver Ejemplo 3.9(4). Si suponemos que es el primero, podemos escribir:

$$z_1 = (1/a_1)x_1 - (a_2/a_1)z_2 + \cdots - (a_m/a_1)z_m,$$

lo que implica que $\{x_1, z_2, \dots, z_m\}$ es generador de V . En efecto, como $\{z_1, \dots, z_m\} \subset \langle x_1, z_2, \dots, z_m \rangle$, tenemos que

$$V = \langle z_1, \dots, z_m \rangle \subset \langle x_1, z_2, \dots, z_m \rangle \subset V.$$

De esa forma sustituimos en G el vector z_1 por el vector x_1 . Supongamos ahora que este proceso de sustitución se ha realizado hasta la etapa $k \leq n$, o sea que tenemos $\{x_1, \dots, x_k\} \subset I$ y hemos obtenido $G_k = \{x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_m\}$ que sigue siendo un conjunto generador de V con el mismo número de elementos que G . Si $I = \{x_1, \dots, x_k\}$ el resultado está probado. Si existe $x_{k+1} \in I \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$, escribimos

$$x_{k+1} = b_1 x_1 + \dots + b_k x_k + b_{k+1} z_{k+1} + \dots + b_m z_m.$$

Si $b_{k+1} = b_{k+2} = \dots = b_m = 0$, tendríamos una relación de dependencia lineal entre los vectores $\{x_{k+1}, x_1, \dots, x_k\}$ y esto es imposible pues estos vectores son linealmente independientes. Luego, algún coeficiente no es cero; por lo que podemos suponer que $b_{k+1} \neq 0$. En ese caso, procediendo como antes, sustituimos en $G_k = \{x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_m\}$ el vector z_{k+1} por el vector x_{k+1} y obtenemos $G_{k+1} = \{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_m\}$, que es también generador y tiene m elementos. Si agotáramos los z 's antes que los x 's o sea si $\#(I) > m$, tendríamos en la etapa m dos conjuntos, el inicial $I \supsetneq \{x_1, \dots, x_m\}$ y $G_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ que es generador, además de (al menos) un vector $x_{m+1} \in I \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$. Esto es imposible dado que por ser G_m generador podríamos escribir al vector x_{m+1} como combinación lineal de los vectores de $G_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ y eso produciría una relación de dependencia lineal no trivial entre vectores de I . $\square$

COROLARIO 3.25. *Sea V es un espacio vectorial finitamente generado, I un conjunto linealmente independiente y G un conjunto generador finito. Entonces $\#(I) \leq \#(G)$.*

DEMOSTRACIÓN. Se deduce inmediatamente del Teorema 3.24. En efecto, dicho teorema nos garantiza que existe un generador G' con las misma cantidad de elementos de G , que contiene a I . $\square$

TEOREMA 3.26. *Sea V es un espacio vectorial finitamente generado y B, B' dos bases de V . Entonces B y B' tienen el mismo número de elementos.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Corolario 3.25 una vez a $B = I, B' = G$ y otra a $B' = I, B = G$ se deduce el resultado. $\square$

El teorema anterior, que afirma que todas las bases tienen el mismo número de elementos, justifica la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.27. Si V es un espacio vectorial finitamente generado sobre $\mathbb{k}$, se define la *dimensión* de V sobre $\mathbb{k}$ como el número de elementos de una base cualquiera. Se usa el símbolo $\dim_{\mathbb{k}}(V)$, o simplemente $\dim(V)$, para representar la dimensión de V . En el futuro, y teniendo en cuenta los resultados anteriores, en lugar de decir que un espacio vectorial es finitamente generado diremos que tiene dimensión finita.

Si V no es finitamente generado, diremos que tiene dimensión *infinita*, y notamos $\dim_{\mathbb{k}}(V) = \infty$ –ver Observación 3.28–.

OBSERVACIÓN 3.28. (1) Es importante destacar que la dimensión de un espacio vectorial depende del cuerpo elegido. Por ejemplo, si consideramos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, el propio $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ tiene dimensión 2 y sobre $\mathbb{C}$ tiene dimensión 1. Si consideramos $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$. para probar este último hecho alcanza con observar que π no es raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales. Luego, $I = \{\pi, \pi^2, \dots, \pi^n, \dots\}$ es un conjunto linealmente independiente con cardinal infinito, de

donde aplicando el Teorema 3.24 deducimos por absurdo que $\mathbb{R}$ no puede ser finitamente generado sobre $\mathbb{Q}$ (si lo fuera, I debería ser finito).

(2) El Teorema 3.26 vale para espacios vectoriales no necesariamente finitamente generados (observar que para definir base no se necesita que el espacio sea finitamente generado). Eso da lugar a la existencia de bases infinitas en ciertos espacios. Usando métodos de teoría de conjuntos se puede probar que todo espacio vectorial admite una base y que todas las bases tienen el mismo cardinal – donde el concepto de cardinal usado generaliza el concepto de “número de elementos”, para conjuntos no necesariamente finitos.

(3) En el espacio vectorial $\mathbb{k}[t]$ tenemos la base infinita numerable $\{1, t, t^2, \dots\}$.

EJEMPLO 3.29. (1) Si $V = \{0\}$, entonces $\dim(V) = 0$.

(2) Como la base canónica de $\mathbb{k}^n$ tiene n elementos, $\dim_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n) = n$.

(3) Por las mismas razones que antes, $\dim_{\mathbb{k}}(M_{n \times m}(\mathbb{k})) = nm$.

COROLARIO 3.30. *Sea V es un espacio vectorial de dimensión finita n . Si G es un conjunto generador finito, entonces $\#(G) \geq n$, y si I es un conjunto linealmente independiente, entonces $\#(I) \leq n$.*

DEMOSTRACIÓN. Si G es generador y B es una base de V , sabemos que $\#(G) \geq \#(B) = n$. Si I es linealmente independiente, entonces $\#(I) \leq \#(B) = n$. $\square$

COROLARIO 3.31. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n . Si G es un subconjunto generador de V con n elementos, entonces es una base.*

DEMOSTRACIÓN. Si G genera V , podemos encontrar en G una base — ver Teorema 3.26. Pero esa base debe tener el mismo número de elementos que G luego debe ser igual a G . $\square$

COROLARIO 3.32. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita e $I \subset V$ es un conjunto linealmente independiente, entonces existe una base de V que contiene a I .*

DEMOSTRACIÓN. Si B es una base cualquiera, al ser B un conjunto generador, podemos aplicar el Teorema 3.24, de modo de asegurar que hay otro generador B' , con el mismo cardinal que B , tal que $I \subset B'$. Usando el Corolario 3.31, deducimos que B' es también una base de V . $\square$

COROLARIO 3.33. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n . Si I es un conjunto linealmente independiente con n elementos, entonces I es una base de V .*

DEMOSTRACIÓN. Como I es linealmente independiente, lo podemos completar a una base B que tiene n elementos — ver Teorema 3.24 o Corolario 3.32. Como por hipótesis I también tiene n elementos, concluimos que $I = B$. $\square$

COROLARIO 3.34. *Sea V un espacio vectorial finitamente generado y $W \subset V$ un subespacio. Entonces W es finitamente generado y $\dim W \leq \dim V$. Más aún, $\dim W = \dim V$ si y sólo si $W = V$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $I \subset W$ un conjunto linealmente independiente en W . Entonces I es linealmente independiente como subconjunto de V , por lo que existe una base B de

V tal que $I \subset B$. Luego $\#I \leq \#B = \dim V$. De lo anterior se deduce que un subconjunto linealmente independiente de W tiene a lo sumo $\dim V$ elementos, y por lo tanto W es finitamente generado, con $\dim W \leq \dim V$.

Finalmente, si $\dim W = \dim V$ entonces una base de W es un subconjunto de V linealmente independiente con $\dim V$ elementos; luego el Corolario 3.33 nos garantiza que es una base de V , y $W = V$. $\square$

El Corolario 3.32 nos permite probar la existencia de *complementos directos* para un subespacio.

DEFINICIÓN 3.35. Sea V un $\mathbb{k}$ -espacio y $W \subset V$ un subespacio. Decimos que un subespacio $N \subset V$ es un *complemento directo* para W si $V = W \oplus N$.

Antes de probar la existencia de complementos directos, veamos cómo obtener bases de un espacio a partir de sus sumandos directos.

LEMA 3.36. Sea V un espacio vectorial y $V = W_1 \oplus W_2$ una descomposición en suma directa. Consideremos $\mathcal{B}_1 \subset W_1$ y $\mathcal{B}_2 \subset W_2$ bases de W_1 y W_2 respectivamente. Entonces $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V .

Recíprocamente, si $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V , con $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, entonces $V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

En particular, $\dim V < \infty$ si y solamente si $\dim W_2 < \infty$ para $i = 1, 2$, y en ese caso $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$.

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que de la inclusión $\langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \rangle \supset \langle \mathcal{B}_1 \rangle \cup \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ se deduce que $V = \langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \rangle$. Por otro lado, como $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, tenemos que $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$. Luego, una relación de dependencia en $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ se obtiene considerando $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{B}_1$ e $y_1, \dots, y_l \in \mathcal{B}_2$ distintos dos a dos, y escalares $a_i, b_j \in \mathbb{k}$ tales que $\sum a_i x_i + \sum b_j y_j = 0$. De $V = W_1 \oplus W_2$, deducimos que $0 = \sum a_i x_i \in W_1$ y $0 = \sum b_j y_j \in W_2$, y de la independencia lineal de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ deducimos entonces que $a_1 = \dots = a_n = 0$ y $b_1 = \dots = b_l = 0$.

Sean ahora $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ (unión disjunta) una base de V . Entonces

$$\langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle = \langle \langle \mathcal{B}_1 \rangle \cup \langle \mathcal{B}_2 \rangle \rangle \supset \langle \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \rangle = V$$

Luego, $\langle \mathcal{B}_1 \rangle + \langle \mathcal{B}_2 \rangle = V$. Si $0 = w_1 + w_2$, $w_i \in \langle \mathcal{B}_i \rangle$, entonces $0 = \sum a_i x_i + \sum b_j y_j$, con $x_i \in \mathcal{B}_1$ y $y_j \in \mathcal{B}_2$. Como $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, estamos en presencia de una relación de dependencia en $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, que debe ser trivial por ser $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ linealmente independiente. Deducimos entonces que $w_1 = w_2 = 0$.

La prueba de la afirmación sobre las dimensiones es inmediata, y queda a cargo del lector. $\square$

El lema anterior se generaliza a una suma directa de una familia arbitraria de subespacios:

TEOREMA 3.37. Sea V un espacio vectorial y $V = \bigoplus_{i \in I} W_i$ una descomposición en suma directa. Consideremos bases $\mathcal{B}_i \subset W_i$, $i \in I$. Entonces $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ es una base de V .

Recíprocamente, si $\mathcal{B}_i$ $i \in I$ es una familia de conjuntos linealmente independientes dos a dos disjuntos tales que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ es una base de V , entonces $V = \bigoplus_{i \in I} \langle \mathcal{B}_i \rangle$.

En particular, si $\#I < \infty$, entonces $\dim V < \infty$ si y solamente si $\dim W_i < \infty$ para todo $i \in I$, y en ese caso $\dim V = \sum \dim W_i$.

DEMOSTRACIÓN. Probemos la primera afirmación. Consideremos un vector $v \in V$. Entonces existen $i_1, \dots, i_n \in I$ y $w_{i_j} \in W_{i_j}$ tales que $v = w_{i_1} + \dots + w_{i_n}$. Como B_{i_j} es base de W_{i_j} , $j = 1, \dots, n$, tenemos que existen vectores $v_1^j, \dots, v_{k_j}^j \in B_{i_j}$ y escalares $a_1^j, \dots, a_{k_j}^j \in \mathbb{k}$ tales que $w_{i_j} = \sum_{h=1}^{k_j} a_h^j v_h^j$. Luego,

$$v = \sum_{i=1}^n w_{i_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^{k_j} a_h^j v_h^j \in \langle \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i \rangle.$$

Hemos probado que $V = \langle \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i \rangle$. Consideremos ahora una relación de dependencia

$$\sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^{k_j} a_h^j v_h^j = 0,$$

donde $v_1^j, \dots, v_{k_j}^j \in B_{i_j}$ y $a_1^j, \dots, a_{k_j}^j \in \mathbb{k}$ para todo $j = 1, \dots, n$. Entonces, como $\sum_{h=1}^{k_j} a_h^j v_h^j$ para todo $j = 1, \dots, n$, y la familia $\{E_i : i \in I\}$ es linealmente disjunta, tenemos que $\sum_{h=1}^{k_j} a_h^j v_h^j = 0$ para todo $j \in [n]$. Como $\mathcal{B}_{i_j}$ es una base, deducimos que $a_h^j = 0$ para todo $j \in [n]$, $h \in [k_j]$.

Dejamos la prueba de las restantes afirmaciones como ejercicio (ver Ejercicio 28). $\square$

COROLARIO 3.38. *Sea V un $\mathbb{k}$ -espacio de dimensión finita y $W \subset V$ un subespacio. Entonces W admite un complemento directo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_l\}$ una base de W . Por construcción, $\mathcal{B}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en V . Usando el Corolario 3.32, podemos completar $\mathcal{B}$ a una base de V , que notamos $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_l, v_{l+1}, \dots, v_n\}$. Si definimos $N = \langle v_{l+1}, \dots, v_n \rangle$ el Lema 3.36 nos garantiza que $W \oplus N = V$. $\square$

OBSERVACIÓN 3.39. Nótese que en la prueba anterior el hecho que $\dim V < \infty$ se usó para poder completar la base de W en una de V . Como ya fuera comentado, éste resultado de completación es válido aunque $\dim V = \infty$ por lo que en realidad el complemento directo existe aunque el espacio sea de dimensión infinita.

1. Ejercicios

Recordemos que $\text{char } \mathbb{k} = 0$ si toda vez que sumamos n veces 1, el resultado es distinto de 0: $1 + \cdots + 1 \neq 0$.

1. En los siguientes casos determinar si $A \subseteq \mathbb{R}^3$ es linealmente independiente; en caso de que no lo sea escribir un vector de A como combinación lineal de los restantes:

- (a) $A = \{(1, -3, 2), (2, -4, 1), (5, 3, 2), (1, -5, 5)\}$;
- (b) $A = \{(1, 2, 1), (1, 0, -4), (4, 3, -1)\}$;
- (c) $A = \{(2, 3, 4), (2, 1, -4), (12, 11, -4)\}$;
- (d) $A = \{(1, -2, m), (3, 0, 2), (2, 1, -5)\}$ (discutiendo según el valor de m).

2. En los siguientes casos determinar si el conjunto $A \subseteq V$ es l.i.

- (a) $V = C[a, b]$, $A = \{e^t, e^{-t}, \cosh t\}$.
- (b) $V = C[a, b]$, $A = \{f, g\}$ siendo $f(x) = |x - a|$ y $g(x) = |x - b|$.
- (c) $V = \mathbb{k}[x]_2$, $A = \{x, x^2 + 1, 2x^2 + bx + a\}$, donde $\text{char } \mathbb{k} = 0$ — discutir según a y b .
- (d) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $A = \{\sin x, \cos x\}$.

3. Sea $V = \mathbb{k}[x]$, donde $\text{char } \mathbb{k} = 0$. Determinar si $A = \{2, t + 1, t^2 + 1, (t + 1)^2\}$ es linealmente independiente.

4. Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{k}$ -espacio vectorial, con $\text{char } \mathbb{k} = 0$, y $u, v, x \in V$ tales que $\{u, v\}$ es linealmente independiente y $\{u, x\}$ es linealmente dependiente. En los siguientes casos, determinar si $A \subseteq V$ es linealmente independiente:

- (a) $A = \{u\}$;
- (b) $A = \{u, 5v\}$;
- (c) $A = \{u - v, u + 3v\}$;
- (d) $A = \{2u - v, -4u + 2v\}$;
- (e) $A = \{u + v, x\}$;
- (f) $A = \{u + x, v + x\}$.

5. Sean $A = \{u_1, u_2\}$ y $B = \{v_1, v_2\}$ dos subconjuntos de un espacio vectorial V tales que $A \cup B$ es l.i.. Hallar $z \in V$, sabiendo que z es combinación lineal de los elementos de A y los elementos de B simultáneamente.

6. Averiguar si los siguientes conjuntos A son generadores del espacio V :

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\}$;
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 2), (0, 1, 3), (-2, 1, 1)\}$;
- (c) $V = \mathbb{k}[x]_3$, con $\text{char } \mathbb{k} = 0$, $A = \{1, 1 + x^2, 1 - x + x^2 + x^3, 4 - x + 2x^2 + x^3\}$;
- (d) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 6x - 2y - 2z = 0\}$, $A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 3)\}$.

7. En los siguientes casos hallar un subconjunto linealmente independiente maximal del conjunto A ,

- (a) $A = \{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (2, 0, -1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;
- (b) $A = \{x^2, x^2 - x + 1, 2x - 2, 3\} \subseteq \mathbb{Q}[x]$;

(c) $A = \{M_1, M_2, M_3\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$ siendo $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$.

8. Sea V un espacio vectorial y W_1, W_2 subespacios de V .

1. Probar que si $\langle G_1 \rangle = W_1$ y $\langle G_2 \rangle = W_2$, entonces $\langle G_1 \cup G_2 \rangle = W_1 + W_2$.
2. Si además pedimos que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Probar que si $I_1 \subset W_1, I_2 \subset W_2$ son conjuntos linealmente independientes, entonces $I_1 \cup I_2$ es linealmente independiente.
Sugerencia: Si W_1 y W_2 son linealmente disjuntos entonces $v_1 + v_2 = 0$ implica que $v_1 = 0$ o $v_2 = 0$.

9. Sean $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal inyectiva y A un subconjunto de V . Probar que A es linealmente independiente si y solamente si $T(A)$ lo es.

10. Sea $U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p'(1) = 0\}$, donde $p'(x)$ es la derivada del polinomio $p(x)$.

1. Demostrar que U es subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Probar que $\{2x^3 - 3x^2, 2x - x^2, 2\}$ es un conjunto linealmente independiente.
3. Decida si $U = \langle \{2x^3 - 3x^2, 2x - x^2, 2\} \rangle$.

11. Sean V un espacio vectorial y $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ subconjuntos de V tales que $\langle A \rangle$ coincide con $\langle B \rangle$. Demostrar que A es linealmente independiente si y sólo si B lo es.

12. Sean V un espacio vectorial y $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ subconjuntos de V tales que $\langle A \rangle$ coincide con $\langle B \rangle$. Demostrar que A es linealmente independiente si y sólo si B lo es.

13. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\det A \neq 0$. SUGERENCIA: Hallar un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado cuya matriz asociada sea A . Veremos más adelante en el curso que la condición $\det A \neq 0$ es equivalente a que la matriz A sea invertible para el producto de matrices.

14. Determinar si el conjunto de vectores dado es una base para el espacio vectorial correspondiente.

- (a) En $\mathbb{R}_2[x]$, $\{1 - x^2, x\}$.
- (b) En $\mathbb{R}_2[x]$, $\{x^2 - 1, x^2 - 2, x^2 - 3\}$.
- (c) En $\mathbb{R}_2[x]$, $\{-3x, 1 + x^2, x^2 - 5\}$.
- (d) En $\mathbb{R}_3[x]$, $\{1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3\}$.
- (e) En $\mathbb{R}_3[x]$, $\{3, x^3 - 4x + 6, x^2\}$.
- (f) En $M_2(\mathbb{R})$, $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \text{ donde } abcd \neq 0 \right\}$.
- (g) En $M_2(\mathbb{R})$, $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \right\}$.
- (h) En $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$, $\{(1, -1), (-3, 3)\}$.

15. Encuentre una base para cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

- (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\}$.
- (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 6 = 0\}$.
- (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x/2 = y/3 = z/4\}$.

16. Sea $A \subseteq \mathcal{C}^1[a, b]$. Notamos $A' = \{f' : f \in A\} \subset \mathcal{C}[a, b]$. Probar que $A \cup \{1\}$ es l.i. si y sólo si A' es l.i., donde 1 denota la función constante igual a 1.

17. Sea $A \subseteq C^1[a, b]$. Notamos $A' = \{f' : f \in A\} \subset C[a, b]$. Probar que $A \cup \{1\}$ es l.i. si y sólo si A' es l.i., donde 1 denota la función constante igual a 1.

18. En $\mathbb{R}^4$ consideremos los vectores $(1 + a, 1, 1, 1)$, $(1, 1 + a, 1, 1)$, $(1, 1, 1 + a, 1)$, $(1, 1, 1, 1 + a)$. Determinar según el parámetro a la dimensión y una base del subespacio vectorial que generan.

19. Sean U, W subespacios de V tal que $U \cap W = \{0\}$. Si $y_1, \dots, y_r$ son elementos linealmente independientes de U y $z_1, \dots, z_s$ son elementos linealmente independientes de W , entonces $y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s$ son linealmente independientes. Deducir que si B y C son bases de U y W respectivamente, entonces $B \cup C$ es una base de $U \oplus W$.

20. Sean $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ y $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}$. Probar que W_1 y W_2 son subespacios de $\mathbb{R}^3$. Hallar $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ y dar bases de los mismos.

21. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Dados n números reales diferentes $a_1, \dots, a_n$ se definen:

$$\begin{aligned} f_1 &= (x - a_2) \cdots (x - a_n) \\ f_2 &= (x - a_1)(x - a_3) \cdots (x - a_n) \\ &\vdots \\ f_n &= (x - a_1) \cdots (x - a_{n-1}) \end{aligned}$$

Demostrar que $\{f_1, \dots, f_n\}$ es una base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

22. Mostrar que el espacio vectorial de las funciones reales continuas en el intervalo $[0, 1]$ no tiene dimensión finita.

23. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $U, W \subset V$ dos subespacios.

- (a) Probar que para toda base B de $U \cap W$ existen bases C y C' de U y W respectivamente tales que $B \subset C$, $B \subset C'$.
- (b) Deducir que $\dim U + W = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$.

24. Sean V, W $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales de dimensión finita con bases $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, \dots, w_n\}$ respectivamente. Consideremos el conjunto

$$B = \{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_n)\} \subset V \times W.$$

Probar que B es base de $V \times W$ y concluir que $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$.

25. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los conjuntos $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = z, y = t\}$ y $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / t = 0, z + y = x\}$.

- (a) Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^4$ y calcular sus dimensiones.
- (b) Encontrar una base de $S \cap T$ y una base de $S + T$.

26. Dado el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se consideran los subespacios

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : c = 0, d = 2a \right\}$$

y

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1. Hallar una base y la dimensión de W_1 .

2. Hallar una base y la dimensión de W_2 .

3. Probar que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.

27. Sea $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{k}^3 : y + z = x\}$ y $T : V \rightarrow V$ definida por $T(x, y, z) = (y - x, x - y, 2y - 2x)$, con $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, es decir $2 = 1 + 1 \neq 0$.

(a) Hallar bases de $N(T)$ e $\text{Im}(T)$.

(b) Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{k}^3 : x = y = 0\}$. Probar que $\mathbb{k}^3 = V \oplus W$.

28. Terminar la prueba del Teorema 3.37.

Capítulo 4

Transformaciones lineales

En este capítulo estudiamos las propiedades básicas de las transformaciones lineales entre espacios vectoriales.

1. Construcciones de transformaciones lineales

LEMA 4.1. Sean V y W espacios vectoriales y sea $X \subset V$ un subconjunto arbitrario.

(1) Si $T, S : V \rightarrow W$ son transformaciones lineales, tales que $T|_X = S|_X$, entonces $T_{\langle X \rangle} = S_{\langle X \rangle}$.

(2) Si X es un conjunto linealmente independiente, dada una función arbitraria $f : X \rightarrow W$, existe una y una sola transformación lineal $T_f : \langle X \rangle \rightarrow W$ tal que $T_f|_X = f$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Si $v \in \langle X \rangle$ es un vector cualquiera, existen escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ y vectores $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que $v = \sum_i a_i x_i$. Luego,

$$T(v) = T\left(\sum_i a_i x_i\right) = \sum_i a_i T(x_i) = \sum_i a_i S(x_i) = S\left(\sum_i a_i x_i\right) = S(v).$$

(2) Primero recordamos que si $0 \neq v \in \langle X \rangle$ existe una única descomposición de v en una combinación lineal $v = \sum_i a_i x_i$, con $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ y $\{a_1, \dots, a_n\}$ escalares no nulos.

Definimos T_f dando su valor para cada vector $v \in V$, mediante la fórmula $T_f(v) = \sum a_i f(x_i)$, con $v = \sum_i a_i x_i$. Observemos que esta definición tiene sentido por la unicidad de la descomposición de v en combinación lineal de elementos de X . Dado otro vector $v' \in V$ lo representamos como $v' = \sum_{i=1}^m a'_i x'_i$, con $a'_i \in \mathbb{k}$ y $x'_i \in X$. Es claro que podemos suponer, eventualmente agregando escalares nulos, que $\{x_1, \dots, x_n\} = \{x'_1, \dots, x'_m\}$. Si $a, b \in \mathbb{k}$ son escalares arbitrarios, tenemos que $av + bv' = \sum_i (aa_i + ba'_i)x_i$, de donde

$$\begin{aligned} T_f(av + bv') &= \sum_i (aa_i + ba'_i)f(x_i) = \sum_i (aa_i f(x_i) + ba'_i f(x_i)) = \\ &= a \sum_i a_i f(x_i) + b \sum_i a'_i f(x_i) = aT_f(v) + bT_f(v'). \end{aligned}$$

Luego, la función $T_f : \langle X \rangle \rightarrow W$ es una transformación lineal. Es claro que si $x \in X$, entonces $T_f(x) = f(x)$ por la propia definición de T_f . Además $T_f : \langle X \rangle \rightarrow W$ es única como consecuencia de la primera parte de este teorema. $\square$

OBSERVACIÓN 4.2. (1) La relación entre $f : X \rightarrow W$ y $T_f : \langle X \rangle \rightarrow W$ se puede visualizar en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow \iota & \nearrow T_f \\ & \langle X \rangle & \end{array}$$

donde $\iota : X \hookrightarrow \langle X \rangle$ es simplemente la función inclusión.

(2) Las propiedades anteriores se pueden entender de la siguiente manera: la propiedad (1) dice que una transformación lineal queda determinada por los valores que toma sobre un conjunto generador; la propiedad (2) dice que si además ese conjunto generador es linealmente independiente, para definir la transformación lineal basta hacerlo sobre los generadores.

(3) Obsérvese que si B es una base de V , del Lema 4.1 se deduce que dada una función $f : B \rightarrow W$, entonces existe una única transformación lineal $T_f : V \rightarrow W$ tal que $T_f|_B = f$.

EJEMPLOS 4.3. (1) Consideramos $\mathbb{k}[X]$, el espacio vectorial de los polinomios de una variable y definimos la función $f : \{1, X, X^2, \dots\} \rightarrow \mathbb{k}[X]$, dada por $f(X^n) = nX^{n-1}$. La transformación lineal asociada $T_f : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ es la derivada D , ver Ejemplo 2.48 (6).

(2) El espacio $\mathbb{R}^3$ está generado por el conjunto linealmente dependiente

$$\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 2), (1, 1, 1)\}.$$

En este caso no podemos definir arbitrariamente una transformación lineal dando sus valores en los generadores. Por ejemplo, si tratamos de definir $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por $T(1, 0, 0) = T(1, 1, 0) = T(0, 1, 2) = T(1, 1, 1) = 1$, tenemos por un lado que $T(2, 2, 2) = 2T(1, 1, 1) = 2$ y por otro que $T(2, 2, 2) = T((1, 0, 0) + (1, 1, 0) + (0, 1, 2)) = 3$.

En otras palabras, la relación de dependencia no trivial

$$(1, 0, 0) + (1, 1, 0) + (0, 1, 2) - 2(1, 1, 1) = 0$$

impone la relación entre los valores de T en los generadores:

$$T(1, 0, 0) + T(1, 1, 0) + T(0, 1, 2) - 2T(1, 1, 1) = 0.$$

DEFINICIÓN 4.4. Sea V un espacio vectorial que admite una descomposición en suma directa $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, donde $\{V_i : i \in I\}$ es una familia de subespacios de V . Se definen las familias de transformaciones lineales $\{\iota_i : V_i \rightarrow V : i \in I\}$ y $\{\pi_i : V \rightarrow V_i : i \in I\}$ como sigue: $\iota_i(v_i) = v_i$; y $\pi_i(\sum_j v_j) = v_i$. Esas familias se llaman respectivamente las *inclusiones* y las *proyecciones canónicas* en la suma directa.

LEMA 4.5. (1) Si $V = V_1 \oplus V_2$, entonces las inclusiones y proyecciones canónicas verifican:

$$\pi_1 \circ \iota_1 = \text{id}_{V_1}, \quad \pi_2 \circ \iota_2 = \text{id}_{V_2}, \quad \pi_1 \circ \iota_2 = 0, \quad \pi_2 \circ \iota_1 = 0, \quad \iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 = \text{id}_V.$$

(2) En la situación anterior, si W es un espacio vectorial cualquiera y $T_1 : W \rightarrow V_1$ y $T_2 : W \rightarrow V_2$ son transformaciones lineales, existe una única transformación lineal

$T : W \rightarrow V$ que verifica $\pi_1 \circ T = T_1$ y $\pi_2 \circ T = T_2$. Esa situación es ilustrada en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & \swarrow T_1 & \downarrow T & \searrow T_2 & \\ V_1 & \xleftarrow{\pi_1} & V_1 \oplus V_2 & \xrightarrow{\pi_2} & V_2 \end{array}$$

(3) Si $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ para una familia arbitraria de subespacios, W es un espacio vectorial cualquiera y $\{T_i : V_i \rightarrow W : i \in I\}$ es una familia de transformaciones lineales entonces existe una única transformación lineal $T : V \rightarrow W$ de modo que $T \circ \iota_i = T_i$ para todo $i \in I$. Esta situación es ilustrada en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ & \uparrow T & \\ \bigoplus_{i \in I} V_i & \xleftarrow{\iota_i} & V_i \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. (1) La verificación de esta propiedad es inmediata.

(2) Definimos $T : W \rightarrow V$ como $T(w) = T_1(w) + T_2(w)$. Como T es la suma de transformaciones lineales es una transformación lineal y la unicidad es consecuencia del hecho de que $V = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$ (Lema 4.1).

(3) Se define $T(\sum_i v_i) = \sum T_i(v_i)$. Esta definición tiene sentido pues en la expresión $\sum_i v_i$ están involucrados tan sólo un número finito de vectores no nulos. La verificación de las restantes propiedades es inmediata. Por ejemplo, la unicidad de T sale nuevamente aplicando el Lema 4.1, ya que $\bigcup_i \iota_i(V_i)$ genera $\bigoplus_i V_i$. $\square$

DEFINICIÓN 4.6. Si V es un espacio vectorial cualquiera, una transformación lineal $p : V \rightarrow V$ se dice que es una *proyección* si $p^2 = p$, donde $p^2 = p \circ p : V \rightarrow V$. Un endomorfismo $S : V \rightarrow V$ que verifica que $S^2 = \text{Id}_V$ se dice que es una *involución*.

EJEMPLOS 4.7. (1) La transformación lineal nula $\theta : V \rightarrow V$, $\theta(v) = 0$ para todo $v \in V$, es una proyección. La identidad $\text{id}_V : V \rightarrow V$ también lo es.

(2) Si $V = \mathbb{k}^n$, las transformaciones lineales

$$q_j : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n, \quad c_i(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_j, 0, \dots, 0), \quad j = 1, \dots, n,$$

son proyecciones.

LEMA 4.8. Supongamos que V es un espacio vectorial cualquiera y que $p : V \rightarrow V$ es una proyección. Entonces $V = N(p) \oplus \text{Im}(p)$. Recíprocamente, si $V = N \oplus I$ es una descomposición de V como suma directa de dos subespacios, existe una proyección $p : V \rightarrow V$ tal que $N = N(p)$ e $I = \text{Im}(p)$.

DEMOSTRACIÓN. Primero observamos que $N(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\}$. Si $v \in N(p) \cap \text{Im}(p)$ entonces, $p(v) = 0$ y además existe $w \in V$ tal que $v = p(w)$. En ese caso $0 = p(v) = p^2(w) = p(w) = v$. En definitiva hemos probado que $N(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\}$. Por otro lado, si escribimos $v = v - p(v) + p(v)$ es claro que $v - p(v) \in N(p)$ y es evidente que $p(v) \in \text{Im}(p)$. En efecto, $p(v - p(v)) = p(v) - p^2(v) = p(v) - p(v) = 0$.

En cuanto al recíproco, si aplicamos el Lema 4.5 al caso en que $V = N \oplus I$, para las transformaciones lineales $0 : N \rightarrow V$ y $\iota : I \rightarrow V$, construimos una transformación lineal $T : V \rightarrow V$ que simplemente es $T(n + i) = i$. De ahí se deduce inmediatamente que $T^2 = T$ y las restantes propiedades requeridas. $\square$

COROLARIO 4.9. *Supongamos que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. Existe una familia finita de proyecciones $p_i : V \rightarrow V$, $i = 1, \dots, n$ tales que: (1) $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$, (2) $\sum_i p_i = \text{id}_V$, (3) $\text{Im}(p_i) = V_i$.*

Recíprocamente, si existen proyecciones $p_i : V \rightarrow V$, $i = 1, \dots, n$, que verifican las condiciones (1), (2), (3) de arriba, entonces $V = \bigoplus_i \text{Im}(p_i)$.

DEMOSTRACIÓN. Ver Ejercicio 4. $\square$

2. Transformaciones lineales y dimensión

La existencia de cierto tipo de funciones entre conjuntos establece restricciones entre sus cardinales; por ejemplo, si existe una función inyectiva $f : X \rightarrow [n]$, el conjunto X no puede tener más de n elementos. Situaciones análogas suceden en la categoría de los espacios vectoriales, donde la existencia de transformaciones lineales inyectivas implica restricciones sobre la dimensión de los espacios – por ejemplo, veremos enseguida que no puede haber una transformación lineal inyectiva $f : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^n$.

LEMA 4.10. *Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.*

(1) Si T es inyectiva e I es un subconjunto linealmente independiente en V , entonces $T(I)$ es un subconjunto linealmente independiente de W .

(2) Si T es sobreyectiva y G es un conjunto generador de V , entonces $T(G)$ es un conjunto generador de W .

(3) Si T es un isomorfismo y B es una base de V , entonces $T(B)$ es una base de W .

DEMOSTRACIÓN. (1) Supongamos que nos damos una relación de dependencia en $T(I)$, o sea que existen escalares $\{a_1, \dots, a_n\}$ y vectores $\{x_1, \dots, x_n\} \subset I$ de modo que $\sum a_i T(x_i) = 0$. Como T es lineal, tenemos que $T(\sum a_i x_i) = 0$ y como T es inyectiva deducimos que $\sum a_i x_i = 0$. Como los elementos $x_i \in I$, y el conjunto I es linealmente independiente, concluimos que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

(2) Sea $w \in W$ un vector arbitrario de W . Como T es sobreyectiva existe un vector $v \in V$ tal que $w = T(v)$. Como G genera V existen escalares $\{a_1, \dots, a_n\}$ y vectores de G , $\{x_1, \dots, x_n\}$ tales que $v = \sum a_i x_i$. Luego, $w = T(v) = T(\sum a_i x_i) = \sum a_i T(x_i)$, y el vector w se escribe como combinación lineal de elementos de $T(G)$.

(3) Esta propiedad se deduce inmediatamente de las anteriores. $\square$

COROLARIO 4.11. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, y sean B y C bases de V y W respectivamente. Entonces existe un isomorfismo entre V y W si y sólo si existe una función biyectiva entre B y C . En particular, existe un isomorfismo entre V y W si y sólo si V y W tienen la misma dimensión.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con el Lema 4.1, si $f : B \rightarrow C \subset W$ es una función, existe una y sólo una transformación lineal $T_f : V \rightarrow W$ que restringida a B nos da

exactamente la función f . Si la función original f es sobreyectiva, i.e. si $f(B) = C$ entonces $T_f(B) = C$ lo que evidentemente implica que $T_f(V) = W$. Sea ahora $v \in N(T_f)$; existen $x_1, \dots, x_l \in B$ y escalares $a_i \in \mathbb{k}$ tales que $v = \sum a_i x_i$. Luego,

$$0 = T_f(v) = T_f\left(\sum a_i x_i\right) = \sum a_i T_f(x_i).$$

Los elementos $T_f(x_i) = f(x_i) \in C$, $i = 1, \dots, l$ son dos a dos distintos ya que f es inyectiva. Como C es linealmente independiente, deducimos que $a_i = 0$, $i = 1, \dots, l$, es decir $v = 0$.

Consideremos ahora V y W dos espacios vectoriales isomorfos y de dimensión finita. Sólo debemos probar que V y W tienen la misma dimensión. Si B es una base de V entonces $T(B)$ es linealmente independiente y genera W – ver el lema anterior partes (1) y (2) –, luego $T(B)$ es una base de W , y como B y $T(B)$ tienen el mismo número de elementos (por ser T biyectiva), V y W tienen la misma dimensión. $\square$

OBSERVACIÓN 4.12. El corolario anterior sigue siendo válido aunque los espacios vectoriales V y W no sean necesariamente finitamente generados. Omitimos la prueba, ya que ésta en el caso general usa teoría de cardinales infinitos.

EJEMPLO 4.13. Sea V un $\mathbb{k}$ -espacio vectorial de dimensión finita, y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Sea $\mathcal{C} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{k}^n$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, con el 1 en la posición i . El corolario 4.11 nos dice que la función $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, $f(v_i) = e_i$, induce la transformación lineal *coordenadas en la base* $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{k}^n$:

$$\mathbf{c}_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{k}^n, \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}}\left(\sum_i a_i v_i\right) = (a_1, \dots, a_n)$$

y que $\mathbf{c}_{\mathcal{B}}$ es un isomorfismo.

DEFINICIÓN 4.14. Si $\{V_i : i \in I\}$ es una familia de espacios vectoriales, se define la *suma directa externa* de la familia y se denota como $\bigoplus_{i \in I} V_i$, de la siguiente manera:

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = \{(v_i)_{i \in I} : v_i = 0 \text{ excepto para un número finito de índices}\}.$$

La suma y el producto por un escalar que le dan a $\bigoplus_{i \in I} V_i$ una estructura de espacio vectorial se definen punto a punto, i.e. $(v_i)_{i \in I} + (v'_i)_{i \in I} = (v_i + v'_i)_{i \in I}$, y si $a \in \mathbb{k}$ entonces $a(v_i)_{i \in I} = (av_i)_{i \in I}$. En el caso particular que todos los V_i son iguales (a un cierto espacio vectorial que llamamos V), escribimos $\bigoplus_{i \in I} V$.

LEMA 4.15. (1) Sea $\{V_i : i \in I\}$ una familia de espacios vectoriales y llamemos $V = \bigoplus_i V_i$. Dado $j \in I$, consideramos el subconjunto $W_j = \{(v_i)_i : v_i = 0 \text{ si } i \neq j\} \subset V$. Entonces los conjuntos W_j , $j \in I$, son subespacios de V isomorfos al correspondiente V_j , y tales que su suma es directa (en el sentido del Capítulo 2) es igual a V , es decir $V = \bigoplus_{i \in I} W_i$ (suma directa de subespacios).

(2) Si V es un espacio vectorial e I un conjunto de índices finito entonces $\bigoplus_{i \in I} V$ es isomorfo con V^I , ver Ejemplo 2.10.

DEMOSTRACIÓN. (1) Es claro que W_i es un subespacio de V y también que cada uno de los W_i es isomorfo con el V_i correspondiente. Además, cada elemento de V se escribe como suma de elementos de los W_i y claramente los subespacios W_i son linealmente disjuntos.

(2) Definimos una transformación lineal $\Theta : \bigoplus_{i \in I} V \rightarrow V^I$ de la siguiente forma: $\Theta((v_i)_{i \in I})$ es la función de I en V que manda i en v_i , en otras palabras $\Theta((v_i)_{i \in I})(i) = v_i$. Para producir la función inversa de Θ procedemos como sigue $\Gamma : V^I \rightarrow \bigoplus_{i \in I} V$ está dada de la siguiente manera: si $f : I \rightarrow V$, se define $\Gamma(f) = (f(i))_{i \in I}$. Es inmediato verificar que Γ es una transformación lineal y que Γ y Θ son inversas una de la otra. $\square$

OBSERVACIÓN 4.16. (1) En virtud de lema anterior, hablaremos de suma directa de espacios vectoriales (omitiedo la palabra externa).

(2) Combinando el Lema 4.15 con el Lema 4.5 tenemos que la suma directa externa cumple la llamada *propiedad universal de la suma directa*:

Sea $W_i, i \in I$, una familia de espacios vectoriales, W un espacio vectorial cualquiera y $\{T_i : W_i \rightarrow W : i \in I\}$ una familia de transformaciones lineales. Entonces existe una única transformación lineal $T : \bigoplus_{i \in I} W_i \rightarrow W$ de modo que $T \circ \iota_i = T_i$ para todo $i \in I$. Esta situación es ilustrada en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ & \uparrow & \\ & T & \\ & \vdots & \\ \bigoplus_{i \in I} W_i & \xleftarrow{\iota_i} & W_i \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow T_i \\ \nwarrow \end{array}$$

COROLARIO 4.17. Si V es un espacio vectorial de dimensión d e I es un conjunto finito cualquiera entonces $\dim(V^I) = |I|d$. $\square$

OBSERVACIÓN 4.18. (1) La propiedad de que una transformación lineal de un espacio V en otro espacio W queda determinada por los valores que toma sobre una base, se puede expresar de la siguiente forma. Si B es una base de V , la función $\Theta : W^B \rightarrow \text{Hom}(V, W)$, $\Theta(f) = T_f$ (ver la prueba del Lema 4.1) es biyectiva. Por otro lado W^B tiene, de acuerdo a lo observado en el Capítulo 3, una estructura de espacio vectorial y con respecto a esa estructura Θ es una transformación lineal como se observa inmediatamente. Luego Θ es un isomorfismo y ambos espacios tendrán la misma dimensión, en caso de ser finita. Si V y W tienen dimensión finita, del Corolario 4.17 se deduce que

$$\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W).$$

En efecto, sabemos que $\text{Hom}(V, W) \cong W^B$ si B es una base de V y este espacio de acuerdo a lo demostrado antes tiene dimensión $|B| \dim(W)$.

LEMA 4.19. La transformación lineal $M_{n \times m} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ dada por $A \mapsto L_A$ es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con la discusión anterior podemos identificar al espacio vectorial $\text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ con el espacio vectorial de las funciones $(\mathbb{K}^m)^{[n]}$, que de acuerdo con lo observado tiene dimensión nm . Por otro lado una función de $(\mathbb{K}^m)^{[n]}$ se puede pensar como una función $k^{[n \times m]}$ como se puede verificar directamente. De esta forma construimos la inversa del mapa $A \mapsto L_A$. $\square$

3. Funcionales lineales, espacio dual

Como dijimos anteriormente las transformaciones lineales $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ se llaman funcionales lineales. En el siguiente lema hacemos una lista de las propiedades de las funcionales lineales.

LEMA 4.20. *Sea V un espacio vectorial y $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ una funcional lineal.*

- (1) *Si $f \neq 0$ entonces f es sobreyectiva.*
- (2) *Si $f \neq 0$ entonces para todo vector $v \in V$ tal que $f(v) \neq 0$ se verifica que $V = N(f) \oplus \langle v \rangle$.*
- (3) *Si $V = W \oplus \langle v \rangle$ para W subespacio y $0 \neq v \in V$, entonces existe una funcional lineal y una sola $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ tal que $W = N(f)$ y $f(v) = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) La imagen de f es un subespacio de $\mathbb{k}$, por lo que o bien $\text{Im}(f) = 0$ o bien $\text{Im}(f) = \mathbb{k}$.¹

(2) Sea $f \neq 0$ y v tal que $f(v) = a \neq 0$. En ese caso si tomamos un vector $w \in V$ arbitrario, la igualdad $w = (w - \frac{f(w)}{a}v) + \frac{f(w)}{a}v$ nos da una descomposición de un vector arbitrario de V como suma de un múltiplo de v y un vector que está en el núcleo de f . Por otro lado si un vector $w \in N(f) \cap \langle v \rangle$, tendríamos que $w = bv$ para algún $b \in \mathbb{k}$. Luego $0 = f(w) = bf(v) = ba$. Como $a \neq 0$ concluimos que $b = 0$. Luego $w = 0$ y la suma es directa.

(3) Consideremos la transformación lineal que está definida de acuerdo con la propiedad universal de la suma directa (Lema 4.5), tomando $0 : W \rightarrow \mathbb{k}$ y $g : \langle v \rangle \rightarrow \mathbb{k}$, $g(bv) = b$. En ese caso $f(w + bv) = b$ y eso garantiza que f verifica las propiedades requeridas. $\square$

OBSERVACIÓN 4.21. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de V , usando la propiedad que asegura que una transformación lineal queda determinada por los valores que toma en una base, definimos una familia de transformaciones lineales $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ mediante la siguiente regla, $e_j^*(e_i) = 1$ si $i = j$ y $e_j^*(e_i) = 0$ si $i \neq j$.

LEMA 4.22. *En la situación anterior, $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ es una base de V^* .*

DEMOSTRACIÓN. Como la dimensión de V^* es la misma que la de V y los vectores $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ son tantos como la dimensión de V basta probar que ellos son linealmente independientes. En efecto, si $0 = a_1 e_1^* + \dots + a_n e_n^*$ evaluando la expresión de arriba en e_j obtenemos $0 = 0(e_j) = a_1 e_1^*(e_j) + \dots + a_j e_j^*(e_j) + \dots + a_n e_n^*(e_j) = a_j$. Como la igualdad anterior vale para todo $j = 1, \dots, n$ deducimos que las funcionales $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ son linealmente independientes. $\square$

DEFINICIÓN 4.23. Si $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base del espacio V , la base $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ se denota como B^* y se llama la *base dual* de B .

LEMA 4.24. *La base $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ tiene las siguientes propiedades.*

- (1) *Si $v \in V$ entonces $v = \sum_{i=1}^n e_i^*(v) e_i$.*
- (2) *Si $f \in V^*$ entonces $f = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i^*$.*

¹Se puede también hacer una prueba directa: si existe $v \in V$ tal que $f(v) = a \neq 0$, entonces si $b \in \mathbb{k}$ entonces $f(\frac{b}{a}v) = b$ lo que implica que f es sobreyectiva.

DEMOSTRACIÓN. (1) Si escribimos $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ y evaluamos e_j^* en ambos miembros de la igualdad obtenemos $e_j^*(v) = \sum_i a_i e_j^*(e_i) = a_j$.

(2) La demostración de esta parte es semejante a la anterior. □

4. Ejercicios

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

(a) Probar que

$$\dim(V) = \dim N(T) + \dim \text{Im}(T)$$

Esta igualdad se conoce usualmente como el *Teorema de las dimensiones*, daremos una prueba más conceptual en el Capítulo 6 (Corolario 6.15).

(b) Sea $U \subset V$ un subespacio. Demostrar que $\dim T(U) = \dim U$ si y sólo si $U \cap N(T) = \{0\}$. Observar que esta igualdad sigue siendo válida en el caso $\dim V = \infty$ y $\dim U < \infty$.

2. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que T es una proyección si y sólo si $\text{Id} - T$ es una proyección. Calcular $N(\text{Id} - T)$ e $\text{Im}(\text{Id} - T)$.

3. Sean T_1, T_2 dos proyecciones. Probar que

(a) $T_1 + T_2$ es una proyección si y sólo si $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = 0$.

(b) $T_1 - T_2$ es una proyección si y sólo si $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = T_2$.

4. Probar el Corolario 4.9.

5. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal.

(a) Demostrar que si $T^2 = 0$ entonces $T - \text{Id}$ es invertible.

(b) Demostrar que si $T^n = 0$ para algún $n \geq 1$ entonces $T - \text{Id}$ es invertible.

6. Sean $S : V \rightarrow V$ y $T : V \rightarrow V$ transformaciones lineales que verifican $T^2 = S^2 = 0$, $T \circ S + S \circ T = \text{Id}$.

(a) Demostrar que $V = N(S) \oplus N(T)$.

(b) Demostrar que $N(S) = S(N(T))$ y $N(T) = T(N(S))$.

(c) Demostrar que $\text{Im}(T) = N(T)$ y $\text{Im}(S) = N(S)$.

(d) Deducir de lo probado anteriormente que $\dim N(S) = \dim N(T)$.

7. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal inyectiva.

(a) Definir $S : W \rightarrow V$ transformación lineal que verifique $S \circ T = \text{Id}_V$.

(b) Probar que si S es como en la parte anterior y $w \in W$, entonces $w = w - (T \circ S)(w) + (T \circ S)(w)$. Deducir que $W = \text{Im}(T) \oplus N(S)$.

(c) Si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal sobreyectiva, hallar una transformación lineal $R : W \rightarrow V$ tal que $T \circ R = \text{Id}_W$.

(d) Demuestre que en este caso $V = \text{Im}(R) \oplus N(T)$.

8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Demostrar que T tiene inversa si y sólo si para toda descomposición de V en suma directa $V = U \oplus W$ vale $T(V) = T(U) \oplus T(W)$.

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Definimos $\gamma : V \rightarrow V^{**}$ como $\gamma(v) = \hat{v}$ donde $\hat{v}(\varphi) = \varphi(v)$ para toda $\varphi \in V^*$. Probar que γ es un isomorfismo lineal.

10. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V . Si $\varphi \in W^*$, probar que es posible encontrar un $\widehat{\varphi} \in V^*$ tal que $\widehat{\varphi}|_W = \varphi$. Extender el resultado a una transformación lineal $T : V \rightarrow L$, donde L es un espacio vectorial arbitrario.

11. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V . Si $\varphi \in W^*$, probar que es posible encontrar un $\widehat{\varphi} \in V^*$ tal que $\widehat{\varphi}|_W = \varphi$. Extender el resultado a una transformación lineal $T : V \rightarrow L$, donde L es un espacio vectorial arbitrario.

12. Sea V es un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que si $T \in \text{End}(V)$, entonces existen $f_1, \dots, f_m \in V^*$ y $v_1, \dots, v_m$ tales que $T = \sum f_i|v_i$.

13. Dado un subconjunto W de un espacio vectorial V , decimos que $\phi \in V^*$ *anula* a W si $\phi(w) = 0$ para todo $w \in W$. Al conjunto $A(W) = \{\phi \in V^* : \phi \text{ anula a } W\}$ se lo llama *anulador* de W .

(a) Probar que $A(W)$ es un subespacio de V^* , y que si $W' \subset W$, entonces $A(W) \subset A(W')$.

(b) Sean U y W subespacios de un espacio vectorial V (no necesariamente de dimensión finita). Probar que $A(U + W) = A(U) \cap A(W)$. Si V es de dimensión finita, probar que $A(U \cap W) = A(U) + A(W)$.

Transformaciones lineales y matrices

1. Matriz asociada a una transformación lineal

Supongamos que V y W son espacios vectoriales de dimensión finita y que $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal. Si fijamos bases en V y en W , podemos identificar estos espacios con $\mathbb{k}^n$ y $\mathbb{k}^m$ respectivamente, donde $n = \dim(V)$ y $m = \dim(W)$. De esa forma, la transformación lineal T se identifica con un elemento de $\text{Hom}(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^m)$, que a su vez de acuerdo con los resultados del Capítulo 4, se identifica con una matriz de n columnas y m filas, o sea con un elemento de $M_{m \times n}(\mathbb{k})$.

A continuación describiremos explícitamente dicha matriz.

Supongamos que $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ y $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\} \subset W$ son bases de V y W respectivamente.

Sean $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{k}^n$, $v_i \mapsto e_i$, y $\mathbf{c}_{\mathcal{C}} : W \rightarrow \mathbb{k}^m$, $w_i \mapsto e_i$, las identificaciones entre V y $\mathbb{k}^n$ y W y $\mathbb{k}^m$ respectivamente determinadas por las bases dadas — notar que a los efectos que siguen nos interesa escribir los elementos de $\mathbb{k}^n$ y $\mathbb{k}^m$ como columnas.

DEFINICIÓN 5.1. En la situación anterior definimos la matriz ${}_c[T]_{\mathcal{B}} \in M_{m \times n}$, llamada *matriz asociada* a la transformación lineal T en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, como

$${}_c[T]_{\mathcal{B}} = [{}_c(T(v_1)), \dots, {}_c(T(v_n))].$$

OBSERVACIÓN 5.2. (1) En términos más explícitos, si escribimos $T(v_i) = a_{1i}w_1 + \dots + a_{mi}w_m$, $1 \leq i \leq n$, entonces la matriz ${}_c[T]_{\mathcal{B}}$ se escribe como:

$${}_c[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) Más formalmente, podemos decir que la matriz asociada ${}_c[T]_{\mathcal{B}}$ es la única matriz que hace el diagrama de abajo conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \mathbf{c}_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow \mathbf{c}_{\mathcal{C}} \\ \mathbb{k}^n & \xrightarrow{L_{{}_c[T]_{\mathcal{B}}}} & \mathbb{k}^m \end{array} \quad (5.1.1)$$

La transformación lineal $L_{{}_c[T]_{\mathcal{B}}}$ considerada arriba es un caso particular de la siguiente construcción, ya efectuada en el Capítulo 4. A una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ le asociamos una transformación lineal $L_A : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$ dada por la siguiente fórmula:

De las ecuaciones $T(1) = 0$, $T(1 + X) = 1/2(1 + X) + 1/2(1 - X)$, $T(1 + X + X^2) = 3/2(1 + X) - 1/2(1 - X)$, deducimos que la matriz asociada a T en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tiene la siguiente forma

$${}_c[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 5.5. Sean $A \in M_{m \times n}$ entonces si $\mathcal{B} \subset \mathbb{K}^n$ y $\mathcal{C} \subset \mathbb{K}^m$ son las bases canónicas de $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$ respectivamente, entonces dada $L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, tenemos que ${}_c[L_A]_{\mathcal{B}} = A$.

2. Operaciones con transformaciones lineales y matrices asociadas

En esta sección completamos las propiedades básicas de la correspondencia entre transformaciones lineales y matrices mostrando que las operaciones entre unas y otras se corresponden.

TEOREMA 5.6. Sean V, W, U espacios vectoriales de dimensión, n, m, l respectivamente y equipados con bases $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{C} \subset W$, $\mathcal{D} \subset U$, y sean $T, T' : V \rightarrow W$ y $S : W \rightarrow U$. Valen las siguientes fórmulas:

- (1) ${}_c[T + T']_{\mathcal{B}} = {}_c[T]_{\mathcal{B}} + {}_c[T']_{\mathcal{B}}$.
- (2) ${}_c[aT]_{\mathcal{B}} = a {}_c[T]_{\mathcal{B}}$ para todo $a \in \mathbb{K}$.
- (3) ${}_D[ST]_{\mathcal{B}} = {}_D[S]_{\mathcal{C}} {}_c[T]_{\mathcal{B}}$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos solamente la tercera propiedad. Las otras se pueden verificar por el mismo método o directamente a partir de la definición de matriz asociada, ver Ejercicio 6.

(3) La conmutatividad de los diagramas de abajo caracterizan las matrices asociadas a T y S respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \downarrow c_{\mathcal{B}} & & \downarrow c_{\mathcal{C}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{{}_c[T]_{\mathcal{B}}} & \mathbb{K}^m \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{S} & U \\ \downarrow c_{\mathcal{C}} & & \downarrow c_{\mathcal{D}} \\ \mathbb{K}^m & \xrightarrow{{}_D[T]_{\mathcal{C}}} & \mathbb{K}^l \end{array}$$

Combinando ambos diagramas tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & S \circ T & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\ V & \xrightarrow{T} & W & \xrightarrow{S} & U \\ \downarrow c_{\mathcal{B}} & & \downarrow c_{\mathcal{C}} & & \downarrow c_{\mathcal{D}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{{}_c[T]_{\mathcal{B}}} & \mathbb{K}^m & \xrightarrow{{}_D[T]_{\mathcal{C}}} & \mathbb{K}^l \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\ & L_{\mathcal{D}[S]_{\mathcal{C}}} \circ L_{\mathcal{C}[T]_{\mathcal{B}}} & & & \end{array}$$

Luego el diagrama “exterior” también es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{S \circ T} & U \\
\mathbf{c}_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow \mathbf{c}_{\mathcal{D}} \\
\mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_{\mathcal{D}[S]_{\mathcal{C}}} \circ L_{\mathcal{C}[T]_{\mathcal{B}}}} & \mathbb{K}^l
\end{array}$$

Como $L_{\mathcal{D}[S]_{\mathcal{C}}} \circ L_{\mathcal{C}[T]_{\mathcal{B}}} = L_{\mathcal{D}[S]_{\mathcal{C}\mathcal{C}[T]_{\mathcal{B}}}}$ deducimos que $L_{\mathcal{D}[ST]_{\mathcal{B}}} = L_{\mathcal{D}[S]_{\mathcal{C}\mathcal{C}[T]_{\mathcal{B}}}}$. Finalmente, como la transformación lineal $L : M_{l \times m}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l)$ es biyectiva, deducimos que ${}_{\mathcal{D}}[ST]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{D}}[S]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$. $\square$

EJEMPLO 5.7. Se consideran en el espacio $\mathbb{R}^3$ la base canónica $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y las transformaciones lineales S y T definidas de la siguiente forma: S es la rotación con ángulo $\pi/2$ de eje e_1 y en la dirección anti-horaria para un observador orientado en la dirección de e_1 y T es la rotación con ángulo $\pi/2$ de eje e_3 y en la dirección anti-horaria para un observador orientado en la dirección de e_3 . Las matrices asociadas a S y T en la base $\mathcal{B}$, que denotamos con las letras A y B respectivamente, son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De lo anterior deducimos que la matriz asociada a ST en la base $\mathcal{B}$ es

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 5.8. Sean V, W espacios vectoriales, con $\dim V = n$, $\dim W = m$, y $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{C} \subset W$, bases. Entonces el mapa $\varphi : \text{Hom}(V, W) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\varphi(T) = {}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}}$, es un isomorfismo de espacios vectoriales.

DEMOSTRACIÓN. El teorema 5.6 afirma en particular que φ es una transformación lineal. Para probar la biyectividad de φ , recordemos que $\varphi(T)$ verifica el siguiente diagrama conmutativo (ver Observación 5.2):

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{T} & W \\
\mathbf{c}_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow \mathbf{c}_{\mathcal{C}} \\
\mathbb{K}^n & \xrightarrow{L_{\varphi(T)}} & \mathbb{K}^m
\end{array}$$

La Observación B.7 nos dice que si $V = \mathbb{K}^n$ y $W = \mathbb{K}^m$, el mapa $\tilde{\varphi}$ asociado a las bases canónicas es un isomorfismo. Luego alcanza con probar que el mapa $\psi : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $\psi(T) = L_{\varphi(T)}$ es biyectivo. En efecto, $\varphi = L \circ \tilde{\varphi}$. Para probar la afirmación restante, alcanza con observar que $\psi^{-1}(L_A) = \mathbf{c}_{\mathcal{C}} \circ T \circ \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^{-1}$. $\square$

3. Cambio de base

Hemos visto que la correspondencia — biyectiva — que a las transformaciones lineales les asocia matrices — fijadas bases en el dominio y en el codominio — es una herramienta de gran utilidad para trabajar con transformaciones lineales. En esta sección estudiaremos más a fondo esa correspondencia, describiendo la forma en que la matriz asociada cambia al cambiar las bases.

DEFINICIÓN 5.9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n . Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de V definimos la *matriz de cambio de base* de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ como ${}_{\mathcal{B}'}[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}}$.

LEMA 5.10. *Las matrices de cambio de base verifican las siguientes propiedades.*

- (1) ${}_{\mathcal{B}''}[\text{Id}]_{\mathcal{B}'} {}_{\mathcal{B}'}[\text{Id}]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}''}[\text{Id}]_{\mathcal{B}}$.
- (2) ${}_{\mathcal{B}}[\text{Id}]_{\mathcal{B}} = \text{Id}_n \in M_n$.
- (3) La matriz de cambio de base ${}_{\mathcal{B}'}[\text{Id}]_{\mathcal{B}}$ es invertible y su inversa es ${}_{\mathcal{B}}[\text{Id}]_{\mathcal{B}'}$.

DEMOSTRACIÓN. (1) La demostración se deduce inmediatamente del Teorema 5.6, parte (3).

(2) La demostración se deduce inmediatamente de la definición de matriz asociada.

(3) Es inmediato aplicando las partes anteriores. $\square$

Sean V y W espacios vectoriales, sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset V$ bases de V y $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset W$ bases de W . Si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, queremos relacionar las matrices ${}_{\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{B}'}$ y ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$.

TEOREMA 5.11. *Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset V$ y $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset W$ bases respectivamente de dos espacios vectoriales de dimensión finita V y W . Si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces ${}_{\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{B}'} = C_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}} D^{-1}$ donde C es la matriz de cambio de base en el espacio W de la base $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{C}'$ y D es la matriz de cambio de base en el espacio V de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$.*

DEMOSTRACIÓN. De la fórmula que nos da la matriz asociada a una composición de transformaciones lineales tenemos que ${}_{\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{C}'}[\text{Id}_W]_{\mathcal{C}} {}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}'}$. Como ${}_{\mathcal{B}}[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}'} = ({}_{\mathcal{B}'}[\text{Id}_V]_{\mathcal{B}})^{-1}$, deducimos el teorema. $\square$

El teorema anterior justifica la siguiente definición.

DEFINICIÓN 5.12. Sean $A, A' \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ dos matrices. Decimos que A y A' son *semejantes*, y denotamos esa relación como $A \sim A'$ si existen dos matrices invertibles, $C \in M_m$ y $D \in M_n$ tales que $A' = CAD^{-1}$.

OBSERVACIÓN 5.13. Queda como ejercicio para que el lector verifique que la relación $A' \sim A$ es una relación de equivalencia en el espacio vectorial $M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

OBSERVACIÓN 5.14. Observar que el Teorema 5.11 se puede enunciar de la siguiente forma:

Las matrices asociadas a una transformación lineal en diferentes bases son semejantes.

Sabemos además que las matrices que realizan la semejanza son las matrices de cambio de base.

El Teorema 5.11 admite un recíproco. Si dos matrices son semejantes existe una transformación lineal y bases del dominio y codominio de modo que cada una de las matrices es la asociada a dicha transformación lineal en las bases dadas.

LEMA 5.15. *Sean $A, A' \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ dos matrices semejantes. Entonces existen espacios vectoriales V y W , bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset V$ y $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset W$ y una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ tal que $A' = {}_{\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{B}'}$ y $A = {}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $C \in M_m(\mathbb{k})$ y $D \in M_n(\mathbb{k})$ tales que $A' = CAD^{-1}$. Sea $V = \mathbb{k}^n$ y $W = \mathbb{k}^m$ y consideremos $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $\mathcal{C} = \{f_1, \dots, f_m\}$, las bases canónicas de V y W respectivamente. Sean las bases $\mathcal{B}' = \{D^{-1}e_1, \dots, D^{-1}e_n\} \subset \mathbb{k}^n$ y $\mathcal{C}' = \{C^{-1}f_1, \dots, C^{-1}f_m\} \subset \mathbb{k}^m$. Ya probamos que $A = {}_C[L_A]_{\mathcal{B}}$. Afirmamos que $C = {}_{\mathcal{C}'}[\text{Id}_{\mathbb{k}^m}]_{\mathcal{C}}$ y $D = {}_{\mathcal{D}'}[\text{Id}_{\mathbb{k}^n}]_{\mathcal{D}}$, por lo que aplicando el Teorema 5.11 se deduce que $A' = {}_{\mathcal{C}'}[L_A]_{\mathcal{B}'}$. Probaremos solamente la primera afirmación, ya que la otra se prueba de modo similar.

El Lema 5.10 (2) nos garantiza que alcanza con probar que $C^{-1} = {}_C[\text{Id}_{\mathbb{k}^m}]_{\mathcal{C}'}$. De acuerdo con la definición de matriz asociada (ver Definición 5.1), si $C^{-1} = (a_{ij})$ tenemos que

$${}_C[\text{Id}_{\mathbb{k}^m}]_{\mathcal{C}'} = [{}_C(C^{-1}f_1), \dots, {}_C(C^{-1}f_m)] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = C^{-1}.$$

□

OBSERVACIÓN 5.16. Consideremos el caso particular de transformaciones lineales de un espacio de dimensión finita en sí mismo, $T : V \rightarrow V$ y supongamos que tomamos siempre matrices asociadas con respecto a la misma base en el dominio y en el codominio.

(1) Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de V , entonces ${}_{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}'} = C_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}C^{-1}$ donde C es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ en el espacio V . Diremos en este caso que las matrices son *conjugadas*; una relación como ésta es también de equivalencia.

(2) Recíprocamente, ya hemos probado que si $A, A' \in M_n(\mathbb{k})$ son dos matrices cuadradas conjugadas, con $A' = CAC^{-1}$, con $C \in M_n(\mathbb{k})$ una matriz invertible, entonces existe una transformación lineal T de $\mathbb{k}^n$ y una base de $\mathbb{k}^n$ que llamamos $\mathcal{B}'$ tal que ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = A$ y ${}_{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}'} = A'$.

4. Rango de una transformación lineal

En esta sección definiremos el rango de una transformación lineal, que es un invariante numérico que mide el “tamaño” de la imagen, y lo relacionaremos con propiedades de la matriz asociada a la transformación lineal.

DEFINICIÓN 5.17. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Si $T(V) = \text{Im}(T) \subset W$ tiene dimensión finita, se dice que T tiene *rango finito* y $\dim(T(V))$ se llama el *rango de T* . Notaremos $r(T) = \dim T(V)$.

En lo que sigue, nos será de utilidad considerar determinadas transformaciones lineales construidas a partir de funcionales lineales, como sigue.

DEFINICIÓN 5.18. Sean V y W espacios vectoriales, $\alpha \in V^*$ y $w \in W$. Se define la transformación lineal $\alpha|w : V \rightarrow W$ de la siguiente forma: $(\alpha|w)(v) = \alpha(v)w$ – ver Ejemplo 2.48 parte (2).

OBSERVACIÓN 5.19. (1) En caso de que la dimensión de V o la de W sean finitas, se deduce que $\dim T(V)$ es también finita y consecuentemente tiene sentido hablar del rango de T . La demostración de la finitud en los casos mencionados más arriba se deja como ejercicio. Puede suceder que $\dim T(V)$ sea finita aunque la dimensión de V y de W sean infinitas como lo muestra el siguiente ejemplo. $T : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[X]$, $T(p) = p'(0)(1 + X + X^2)$.

(2) Si $\alpha \neq 0 \in V^*$ y $w \in W$ es un vector no nulo, es claro que la transformación lineal $\alpha|w : V \rightarrow W$ tiene rango uno. El lema que sigue generaliza ese resultado.

LEMA 5.20. *Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal de rango r y $\{w_1, \dots, w_r\}$ una base de $T(V)$. Entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V^*$ tales que $T = \alpha_1|w_1 + \dots + \alpha_r|w_r$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $v \in V$, escribimos $T(v) = \alpha_1(v)w_1 + \dots + \alpha_r(v)w_r$ para ciertos escalares $\alpha_1(v), \dots, \alpha_r(v)$. Estos escalares definen funciones $\alpha_i : V \rightarrow \mathbb{k}$ que son de hecho transformaciones lineales. De ahí se deduce inmediatamente el resultado.

Probemos que $\alpha_i : V \rightarrow \mathbb{k}$, $i = 1, \dots, r$, es un funcional lineal. Si $v, v' \in V$ y $a \in \mathbb{k}$, entonces

$$T(av + v') = \alpha_1(av + v')w_1 + \dots + \alpha_r(av + v')w_r$$

Por otro lado, como T es una transformación lineal, tenemos que

$$\begin{aligned} T(av + v') &= aT(v) + T(v') = a(\alpha_1(v)w_1 + \dots + \alpha_r(v)w_r) + \alpha_1(v')w_1 + \dots + \alpha_r(v')w_r = \\ &= (a\alpha_1(v) + \alpha_1(v'))w_1 + \dots + (a\alpha_r(v) + \alpha_r(v'))w_r, \end{aligned}$$

por lo que, como $\{w_1, \dots, w_r\}$ es una base de $\text{Im } T$, se cumple $\alpha_i(av + v') = a\alpha_i(v) + \alpha_i(v')$ para todo $i = 1, \dots, r$. $\square$

A continuación daremos un método para calcular el rango de una transformación lineal en términos de la matriz asociada en bases convenientes.

LEMA 5.21. *Sean $S : V' \rightarrow V$, $T : V \rightarrow W$ y $R : W \rightarrow W'$ transformaciones lineales. Si S y R son invertibles, entonces si el rango de T es finito también lo es el rango de RTS y además $r(T) = r(RTS)$.*

DEMOSTRACIÓN. $r(RTS) = \dim(RTS(V')) = \dim(RT(V)) = \dim(T(V)) = r(T)$. La penúltima igualdad es consecuencia de que R es un isomorfismo de donde se deduce que $R|_{T(V)} : T(V) \rightarrow R(T(V))$ es también un isomorfismo. $\square$

COROLARIO 5.22. *Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal entre espacios de dimensión finita. Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases de V y W respectivamente, entonces $r(T) = r(L_{\mathcal{C}[T]\mathcal{B}})$ — recordar que $L_{\mathcal{C}[T]\mathcal{B}} : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$, donde n y m son las dimensiones de V y W respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Este resultado se deduce inmediatamente del lema anterior y del hecho de que $L_{\mathcal{C}[T]\mathcal{B}} = \mathbf{c}_{\mathcal{C}}T\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^{-1}$, donde $\mathbf{c}_{\mathcal{C}}$ y $\mathbf{c}_{\mathcal{B}}$ representan los mapas coordenados. $\square$

Hemos reducido el problema de calcular el rango de una transformación lineal T al de calcular el rango de una transformación lineal de la forma L_A . Este último rango se calcula de la siguiente forma.

DEFINICIÓN 5.23. (1) Sea $A \in M_{m \times n}$ y llamemos $c_j(A)$, $j = 1, \dots, n$ a los vectores de $\mathbb{k}^m$ definidos por las columnas de A . En forma similar se definen $f_i(A)$, $i = 1, \dots, m$ a los vectores de $\mathbb{k}^n$ definidos por las filas de A . Por razones mnemotécnicas representamos a los $c_j(A)$ como vectores columna y a los $f_i(A)$ como vectores fila.

(2) Se define el *rango por columnas* de la matriz A , y se denota como $\text{rc}(A)$, como la dimensión del subespacio de $\mathbb{k}^m$ generado por los vectores $c_j(A)$, $j = 1, \dots, n$. En forma parecida se define el *rango por filas* de la matriz A , y se denota como $\text{rf}(A)$, como la dimensión del subespacio de $\mathbb{k}^n$ generado por los vectores $f_i(A)$, $i = 1, \dots, m$.

OBSERVACIÓN 5.24. Se puede probar (lo haremos más adelante, ver Corolario 7.14), que si A es una matriz arbitraria el rango por filas de A coincide con el rango por columnas de A .

LEMA 5.25. Sea $A \in M_{m \times n}$ y $L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ la correspondiente transformación lineal. Entonces $L_A(\mathbb{K}^n) = \langle c_1(A), \dots, c_n(A) \rangle$ y $r(L_A) = \text{rc}(A)$.

DEMOSTRACIÓN. El resultado se deduce directamente del siguiente hecho: si $j = 1, \dots, n$ entonces $L_A(e_j) = c_j(A)$. $\square$

OBSERVACIÓN 5.26. (1) Se deduce del Lema 5.21 que si C y D son matrices invertibles, entonces el rango por columnas de la matriz CAD coincide con el rango por columnas de A . Teniendo en cuenta la igualdad del rango por filas y por columnas de una matriz, vale un resultado análogo para los rangos por filas.

(2) En definitiva, hemos probado que si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal entre espacios de dimensión finita, entonces el rango de T coincide con el rango por columnas de cualquier matriz asociada a T en cualesquiera bases que elijamos. Teniendo en cuenta lo anterior vale un resultado análogo para el rango por filas.

El estudio del rango de la matriz asociada a una transformación lineal nos permite obtener entonces información sobre la transformación lineal.

LEMA 5.27. Sean V, W dos espacios vectoriales, $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\mathcal{B}$ una base de V , $\mathcal{C}$ una base de W , y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

(1) T es sobreyectiva si y solamente si $r({}_\mathcal{C}[T]_\mathcal{B}) = m$.

(2) T es inyectiva si y solamente si $r({}_\mathcal{C}[T]_\mathcal{B}) = n$.

DEMOSTRACIÓN. La afirmación (1) es consecuencia de lo visto anteriormente, ya que T es sobreyectiva si y solamente si $\dim T(V) = m$.

Para probar (2) observamos que por el teorema de las dimensiones (ver Ejercicio 4.1 y Corolario 6.15), T es inyectiva si y solamente si su imagen tiene dimensión $\dim T(V) = n$. $\square$

EJEMPLO 5.28. Consideremos la transformación lineal $D : \mathbb{K}_3[X] \rightarrow \mathbb{K}_3[X]$ definida por $D(p) = p'$. Queremos calcular el rango de D . Si $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ es la base estándar de $\mathbb{K}_3[X]$, tenemos que la matriz asociada a D en esa base es ${}_\mathcal{B}[D]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como la primera columna es cero y las otras son múltiplos de los vectores e_1, e_2, e_3 de la base canónica de $\mathbb{K}^4$, el espacio generado por las columnas de esta matriz, tiene dimensión tres.

5. Matriz asociada y subespacios invariantes

Cuando se estudian los endomorfismos de un espacio vectorial V , es de suma utilidad el reconocer los llamados *subespacios invariantes*:

DEFINICIÓN 5.29. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal y sea $W \subset V$ un subespacio. Se dice que W es invariante con respecto a T (o un subespacio invariante de T) si $T(W) \subset W$.

En el caso de la existencia de una descomposición en subespacios invariantes, podemos aplicar el Corolario 4.9 para obtener la siguiente descripción, que será de mucha utilidad a la hora de describir los endomorfismos de un espacio vectorial.

COROLARIO 5.30. *Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal, y $V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$ una descomposición de V en suma directa de subespacios invariantes. Sean $p_i : V \rightarrow V$ las proyecciones dadas por el Corolario 4.9. Entonces $T = \sum_{i=1}^n T \circ p_i$.*

Recíprocamente, sea $V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$ es una descomposición en suma directa, $q_i : V \rightarrow W_i$, $i = 1, \dots, n$ las proyecciones canónicas y $f_i = W_i \rightarrow W_i$, $i = 1, \dots, n$ transformaciones lineales. Entonces la transformación lineal T inducida por $T_i = f_i \circ q_i$ es tal que $T(W_i) \subset W_i$.

DEMOSTRACIÓN. El resultado es consecuencia directa del hecho que $\sum_i p_i = \text{Id} : V \rightarrow V$.

Recordemos que $T(v) = \sum_i T_i(v) = \sum_i f_i \circ q_i(v)$ para todo $v \in V$. Luego, si $w_j \in W_j$, tenemos que $T(w_j) = \sum_{i=1}^n f_i(q_i(w_j)) = f_j(w_j) \in W_j$. $\square$

Finalizamos la sección mostrando cómo se puede utilizar la existencia de subespacios invariantes para un endomorfismo T a los efectos de obtener una descripción simple del mismo, en términos de su matriz asociada.

LEMA 5.31. *Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de V , espacio vectorial de dimensión finita, y $V = W_1 \oplus W_2$ una descomposición en suma directa de subespacios T -invariantes. Sea $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_s\}$ una base de W_1 , $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_t\}$ una base de W_2 . Consideremos la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t\}$ de V . Entonces,*

$${}_B[T]_B = \begin{pmatrix} {}_{\mathcal{B}_1}[T]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ 0 & {}_{\mathcal{B}_2}[T]_{\mathcal{B}_2} \end{pmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $v_i \in \mathcal{B}_1$. Entonces $T(v_i) = \sum_{j=1}^s a_{ij} v_j + \sum_{j=1}^t b_{ij} w_j \in W_1$, y como W_1 y W_2 son linealmente disjuntos deducimos que $b_{i1} = \dots, b_{it} = 0$. En otras palabras, las primeras s columnas de ${}_B[T]_B$ son como plantea la tesis. Para las columnas restantes se realiza un razonamiento análogo. $\square$

Más adelante (Corolario 6.19) veremos una prueba de este resultado utilizando el concepto de *espacio cociente*.

OBSERVACIÓN 5.32. El lema anterior puede generalizarse a una suma directa de n subespacios invariantes:

Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de V , espacio vectorial de dimensión finita, y $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ una descomposición en suma directa de subespacios T -invariantes. Sean $\mathcal{B}_i = \{v_1^i, \dots, v_{s_i}^i\}$, $i = 1, \dots, n$, bases de W_i , y consideremos la base de V

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n = \{v_1^1, \dots, v_{s_1}^1, w_1^2, \dots, v_{s_2}^2, \dots, v_1^n, \dots, v_{s_n}^n\}$$

Entonces,

$${}_B[T]_B = \begin{pmatrix} {}_{\mathcal{B}_1}[T]_{\mathcal{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {}_{\mathcal{B}_n}[T]_{\mathcal{B}_n} \end{pmatrix}$$

6. Ejercicios

- Probar las afirmaciones de la Observación 5.2.
- Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar una base de $N(T)$ y una base de $\text{Im}(T)$.
- Sean $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ y $S : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que:

$${}_C[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } {}_{\mathcal{B}}[S]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
 donde $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.
 - Hallar bases para $N(T)$ e $\text{Im}(T)$.
 - Hallar bases para $N(S \circ T)$ e $\text{Im}(S \circ T)$.
 - Hallar la matriz asociada de $H = 3(T \circ S) + \text{Id}_{\mathbb{R}_2[x]}$ en la base $\{1, x, x^2\}$.
- Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que ${}_C[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
 - Hallar $T(x, y, z)$.
 - Hallar la matriz asociada T en la base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, -1)\}$.
 - Determinar si T es invertible.
- Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ dada por $T(p) = p + p' + p''$.
 - Hallar la matriz asociada a T en la base canónica.
 - Demostrar que T es invertible.
 - Hallar la matriz asociada a T^{-1} en la base canónica.
- Terminar la prueba del Teorema 5.6.
- Sea V un $\mathbb{k}$ -espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \rightarrow V$ lineal. Probar:
 - $N(T) \subseteq N(T^2)$ y $\text{Im}(T^2) \subseteq \text{Im}(T)$.
 - $V = N(T) \oplus \text{Im}(T) \Leftrightarrow N(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\} \Leftrightarrow N(T) = N(T^2)$.
 - Supongamos que $V = N(T) \oplus \text{Im}(T)$. Probar que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que ${}_B[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, donde $A \in M_m(\mathbb{k})$ y $m = \dim \text{Im}(T)$.
- En los siguientes casos hallar la matriz asociada a T en las bases canónicas de los espacios considerados:
 - $T : \mathbb{k}^3 \rightarrow \mathbb{k}^3$ tal que $T(x, y, z) = (y - z, 2x + y, x + y + z)$.
 - $T : \mathbb{k}_2[x] \rightarrow M_2(\mathbb{k})$ tal que $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) & p'(1) \end{pmatrix}$.
 - la traza $\text{tr} : M_n(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$, $\text{tr}(a_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.
- Sea $T : \mathbb{k}^3 \rightarrow \mathbb{k}^2$ lineal tal que $T(1, 0, 0) = (1, -2)$, $T(0, 1, 0) = (2, 4)$, $T(0, 0, 1) = (1, -1)$.
 - Hallar $T(x, y, z)$.
 - Hallar la matriz asociada a T en las bases canónicas de $\mathbb{k}^3$ y $\mathbb{k}^2$.
 - Hallar $N(T)$.
 - Hallar la matriz asociada a T en las bases $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{k}^3$ y la base canónica de $\mathbb{k}^2$.

10. (a) Sea $id : \mathbb{k}_2[x] \rightarrow \mathbb{k}_2[x]$ la transformación identidad y sea $\mathcal{B} = \{x^2 - 1, x - 1, 1\}$ una base de $\mathbb{k}_2[x]$. Hallar ${}_C[id]_{\mathcal{B}}$, ${}_B[id]_{\mathcal{C}}$ y ${}_B[id]_{\mathcal{B}}$, siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{k}_2[x]$.
- (b) Sea $p(x) = 3x^2 + 2$. Hallar sus coordenadas en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.
11. Sean $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 0)\}$ base de $\mathbb{k}^2$, $\mathcal{C} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$ base de $\mathbb{k}^3$ y $T : \mathbb{k}^3 \rightarrow \mathbb{k}^2$ tal que ${}_B[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar $T(x, y, z)$ y ${}_{\mathcal{C}_2}[T]_{\mathcal{C}_3}$.
12. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $T : M_2(\mathbb{k}) \rightarrow M_2(\mathbb{k})$ definida por $T(X) = AX$.
- (a) Hallar ${}_C[T]_{\mathcal{C}}$ siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $M_2(\mathbb{k})$.
- (b) Hallar $\dim \text{Im}(T)$ y $\dim \text{N}(T)$. Deducir que T es biyectiva.
- (c) Hallar ${}_C[T^{-1}]_{\mathcal{C}}$.
- (d) Sea S la transformación lineal del ejercicio 6b. Hallar la matriz asociada a $T \circ S$ en las bases canónicas de $M_2(\mathbb{k})$ y $\mathbb{k}_2[x]$.
13. En un espacio vectorial V con base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ se definen dos transformaciones lineales S y T mediante:
- $$S(v_1) = v_2, S(v_2) = -v_1, S(v_3) = v_4, S(v_4) = -v_3$$
- $$T(v_1) = v_3, T(v_2) = -v_4, T(v_3) = v_1, T(v_4) = v_2.$$
- (a) Hallar $A = {}_B[T]_{\mathcal{B}}$ y $C = {}_B[S]_{\mathcal{B}}$.
- (b) Calcular A^2 , C^2 , $A \cdot C$ y $C \cdot A$.
- (c) Si $D = C \cdot A$, calcular D^2 , $C \cdot D$, $D \cdot C$, $A \cdot D$ y $D \cdot A$.
14. (a) Se considera la base $\mathcal{A} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ de $V = \mathbb{R}_2[x]$. Hallar $\mathbf{c}_{\mathcal{A}}(a + bx + cx^2)$.
- (b) Sea considera la base $\mathcal{B} = \{(\cos w, \sin w), (-\sin w, \cos w)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Hallar $\mathbf{c}_{\mathcal{B}}(x, y)$.
15. (a) Probar que $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1, -1), (1, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 0), (1, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 1), (-1, 1, 1, 1)\}$ son bases de $\mathbb{R}^4$.
- (b) Hallar las coordenadas de los vectores de $\mathcal{A}$ en la base $\mathcal{B}$ y las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{A}$.
- (c) Escribir las matrices de cambio de base ${}_B[id]_{\mathcal{A}}$ y ${}_A[id]_{\mathcal{B}}$.
16. Sean $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ tal que
- $${}_B[id]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
- (a) Hallar las $\mathbf{c}_{\mathcal{B}}(u_1)$, $\mathbf{c}_{\mathcal{B}}(u_2)$, $\mathbf{c}_{\mathcal{B}}(u_3)$ y expresar u_1, u_2, u_3 como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.
- (b) Hallar $\mathbf{c}_{\mathcal{B}}(2u_1 + 3u_2 - 4u_3)$.
- (c) Calcular ${}_A[id]_{\mathcal{B}}$ y expresar v_1, v_2, v_3 como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{A}$.

Espacio cociente

En esta sección estudiamos el cociente de un espacio vectorial V por un subespacio $W \subset V$. Este espacio vectorial se define como el conjunto cociente de V por una relación de equivalencia conveniente. La noción de espacio cociente es muy importante dentro del álgebra lineal. Los teoremas 6.6 y 6.18 y sus corolarios 6.12 y 6.19 son una muestra de la utilidad de este concepto.

DEFINICIÓN 6.1. Si V es un espacio vectorial y W es un subespacio cualquiera, definimos en V la siguiente relación de equivalencia: $v \sim_W v'$ si $v - v' \in W$.

OBSERVACIÓN 6.2. (1) El subespacio W en general se considera fijo y por ese motivo el símbolo $\sim_W$ se escribe omitiendo el subíndice como $\sim$.

(2) Es claro que $v \sim v'$ si y sólo si existe $w \in W$ de modo que $v = v' + w$.

(3) Es claro que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia. Por ejemplo, si $v \sim v'$ y $v' \sim v''$, entonces $v - v'' = (v - v') + (v' - v'') \in W$, por lo que $v \sim v''$. (4) Si $W = \{0\}$, $v \sim v'$ si y sólo si $v = v'$ y si $W = V$ para todo par $v, v' \in V$, $v \sim v'$.

(5) Recordar que si $v \in V$ su clase de equivalencia es un subconjunto de V :

$$[v] = \{v' \in V : v' \sim v\} = \{v' \in V : v' = v + w \text{ para algún } w \in W\}.$$

En otras palabras, la clase de equivalencia de v es el subconjunto $v + W \subset V$.

DEFINICIÓN 6.3. En la situación anterior, la clase de equivalencia de $v \in V$ se nota $[v]$ o $v + W$. El conjunto cociente $V/\sim$, se nota $V/W = \{[v] : v \in V\}$ y se denomina *espacio cociente* de V por W .

La proyección canónica $\pi : V \rightarrow V/W$ – que existe para cualquier relación de equivalencia, en particular la considerada más arriba – explícitamente se define como $\pi(v) = [v] = v + W$.

A priori V/W es tan sólo un conjunto. Probaremos que de hecho es un espacio vectorial con operaciones que hacen que $\pi : V \rightarrow V/W$ sea una transformación lineal.

LEMA 6.4. *En la situación anterior tenemos que:*

- (1) Si $v_1 \sim v'_1$ y $v_2 \sim v'_2$ entonces $v_1 + v_2 \sim v'_1 + v'_2$ para todo $v_1, v_2, v'_1, v'_2 \in V$.
- (2) Si $v \sim v'$ entonces $av \sim av'$ para todo $v, v' \in V$ y $a \in \mathbb{k}$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Si $v_1 \sim v'_1$ y $v_2 \sim v'_2$ entonces existe $w_1, w_2 \in W$ tales que $v_1 = v'_1 + w_1$ y $v_2 = v'_2 + w_2$. Entonces $v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2 + w_1 + w_2$ y como $w_1 + w_2 \in W$ concluimos que $v_1 + v_2 \sim v'_1 + v'_2$.

(2) La demostración de esta propiedad es muy semejante a la anterior y queda como ejercicio. $\square$

TEOREMA 6.5. *Se definen en V/W las siguientes operaciones: $[v] + [v'] = [v + v']$ y $a[v] = [av]$ si $a \in \mathbb{k}$ y $v, v' \in V$. Con respecto a estas operaciones V/W es un espacio vectorial.*

Más aún, la proyección canónica $\pi : V \rightarrow V/W$ es una transformación lineal sobre-yectiva, cuyo núcleo es W .

DEMOSTRACIÓN. El lema anterior nos garantiza que las definiciones de suma y producto por un escalar entre clases de equivalencia tienen sentido, o sea el resultado de sumar $[v]$ y $[v']$ no depende del par $v, v' \in V$ sino tan sólo de su clase de equivalencia modulo W . Lo mismo para producto por un escalar.

Necesitamos probar que se verifican para las operaciones definidas en V/W todos los axiomas de un espacio vectorial. Por ejemplo para probar la propiedad asociativa queremos probar que $([v] + [v']) + [v''] = [v] + ([v'] + [v''])$. Para ello comenzamos operando en el lado derecho de esta igualdad:

$$([v] + [v']) + [v''] = [v + v'] + [v''] = [(v + v') + v''] = [v + (v' + v'')] = [v] + [v' + v''] = [v] + ([v'] + [v'']).$$

Se ha usado en esta cadena de igualdades la propiedad asociativa de la suma en el espacio V .

El vector cero en V/W es el vector $0_{V/W} = [0_V] = [w]$ para cualquier $w \in W$. Es claro que $[v] + 0_{V/W} = [v + 0] = [v]$ y luego ese vector es el neutro del espacio cociente. La verificación de los demás axiomas se hace de manera análoga.

Si tomamos $v, v' \in V$ y calculamos $\pi(v + v')$ tenemos que

$$\pi(v + v') = [v + v'] = [v] + [v'] = \pi(v) + \pi(v').$$

De forma parecida se prueba que $\pi(av) = a\pi(v)$ y así π es una transformación lineal. Que la proyección canónica es sobreyectiva es una propiedad general del espacio cociente por una relación de equivalencia que se observó cuando se vieron los elementos iniciales de teoría de conjuntos. Por otro lado, $N(\pi) = \{v \in V : \pi(v) = 0\}$. Pero $\pi(v) = 0$ si y sólo si $[v] = [0]$ o sea si y sólo si $v \in W$. Luego $N(\pi) = W$. $\square$

La siguiente es una adaptación de la propiedad universal del cociente que vimos cuando estudiamos teoría de conjuntos, al caso del cociente de un espacio vectorial por un subespacio.

TEOREMA 6.6. *Sea V, U espacios vectoriales y $W \subset V$ un subespacio de V . Si $T : V \rightarrow U$ es una transformación lineal tal que $W \subset N(T)$, entonces existe una única transformación lineal $\hat{T} : V/W \rightarrow U$ que hace el diagrama de abajo conmutativo.*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & U \\ \pi \downarrow & \nearrow \hat{T} & \\ V/W & & \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si $v \sim v'$ y escribimos $v' = v + w$, con $w \in W$ entonces $T(v') = T(v + w) = T(v) + T(w) = T(v)$, ya que $w \in W \subset N(T)$. Aplicando la propiedad universal del cociente probada en el Capítulo 1 (ver página 12), podemos asegurar la existencia y unicidad de una función $\hat{T} : V/W \rightarrow U$ que hace el diagrama conmutativo.

Para concluir la prueba, falta probar la linealidad de $\hat{T}$. Como $\hat{T} \circ \pi = T$ tenemos que para todo $v \in V$, entonces $T(v) = \hat{T}(\pi(v)) = \hat{T}([v])$. Luego si $v, v' \in V$ tenemos que $\hat{T}([v] + [v']) = \hat{T}([v + v']) = T(v + v') = T(v) + T(v') = \hat{T}([v]) + \hat{T}([v'])$ lo que prueba que $\hat{T}$ es aditiva. En forma semejante se prueba que $\hat{T}(a[v]) = a\hat{T}([v])$ para todo $a \in \mathbb{K}$. $\square$

OBSERVACIÓN 6.7. (1) En la situación anterior tenemos que $N(\hat{T}) = \pi(N(T))$ y que $\text{Im}(\hat{T}) = T(V) = \hat{T}(V/W)$. La segunda afirmación se deduce inmediatamente del hecho de que la proyección canónica π es sobreyectiva. Por otro lado $\hat{T}([v]) = 0$ si y sólo si $0 = \hat{T}(\pi(v)) = T(v)$ y eso sucede si y sólo si $v \in N(T)$, es decir $[v] \in N(T)/W$.

(2) La construcción del cociente nos permite demostrar que dado un espacio vectorial V y un subespacio $W \subset V$ arbitrario, existe una transformación lineal $T : V \rightarrow U$ en algún espacio vectorial U de modo que $N(T) = W$. En otras palabras, todo subespacio es el núcleo de alguna transformación lineal. Para demostrar lo anterior basta tomar $T = \pi : V \rightarrow V/W$ la proyección canónica.

(3) Es evidente que dado un subespacio vectorial $W \subset V$ existe una transformación lineal $T : U \rightarrow V$ para algún subespacio U de modo que $T(U) = W$. Para ello basta tomar $U = W$ y la transformación lineal T la inclusión canónica de W en V .

Queremos ahora estudiar cómo están relacionados los subespacios de V y los de V/W .

OBSERVACIÓN 6.8. Como la proyección canónica $\pi : V \rightarrow V/W$ es una transformación lineal, se cumple que si $L \subset V$ es un subespacio, entonces $\pi(L) \subset V/W$ es un subespacio, y que si $\mathcal{L} \subset V/W$ es un subespacio, entonces $\pi^{-1}(\mathcal{L}) \subset V$ es un subespacio (ver Lema 2.43). Sin embargo esta correspondencia no es biyectiva, ya que si $L \subset V$ es un subespacio,

$$\pi^{-1}(\pi(L)) = \{v \in V : \pi(v) \in \pi(L)\} = \{v \in V : v + w \in L \text{ para algún } w \in W\}.$$

Para la última igualdad hemos usado que $\pi(v) \in \pi(L)$ si y sólo si existe $l \in L$ tal que $\pi(v) = \pi(l)$. Esta última afirmación es equivalente a que $l - v \in N(\pi) = W$, es decir existe $w \in W$ tal que $v + w = l \in L$. Luego, si $W \not\subset L$, $L \subsetneq \pi^{-1}(\pi(L))$.

La observación anterior nos sugiere la siguiente relación entre los subespacios de V y los de V/W :

TEOREMA 6.9. *Existe una correspondencia biyectiva entre los subespacios de V/W y los subespacios de V que contienen a W . Esa correspondencia está dada de la siguiente forma: $\mathcal{L} \subset V/W \rightsquigarrow \pi^{-1}(\mathcal{L}) \subset V$; $W \subset L \subset V \rightsquigarrow L/W = \pi(L) \subset V/W$. Más aún, la correspondencia respecta inclusiones.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que las funciones definidas arriba envían subespacios en subespacios. Ambos mapas son inversos uno del otro. En efecto, si tomamos $W \subset L \subset V$ y calculamos la preimagen de $L/W = \pi(L)$, tenemos que $\pi^{-1}(L/W) = \{v \in V : [v] \in \pi(L)\}$. Si $[v] \in L/W$ entonces, existe $l \in L$ tal que $v - l \in W$. Luego $v = l + w$ con $w \in W$. Como $W \subset L$ eso implica que $v \in L$, o sea que $\pi^{-1}(L/W) \subset L$. Claramente la inclusión inversa es también verdadera. El resto de la demostración es semejante.

Finalmente, es claro que si $W \subset L \subset L'$, entonces $\pi(L) \subset \pi(L')$. $\square$

El teorema anterior permite obtener información sobre el comportamiento de una transformación lineal $T \in \text{End}(V)$ cuando se conocen subespacios invariantes de la misma la siguiente (ver Definición 5.29).

TEOREMA 6.10. *Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de V y $W \subset V$ un subespacio invariante de T . Entonces, existe una única transformación lineal $\tilde{T} : V/W \rightarrow V/W$ que hace el diagrama de abajo conmutativo.*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/W & \xrightarrow{\tilde{T}} & V/W \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la transformación lineal $\pi \circ T : V \rightarrow V/W$. Probaremos en primer lugar que $W \subset N(\pi \circ T)$. Si $w \in W$ entonces $\pi(T(w)) = 0$, porque $T(w) \in W$. Usando la propiedad universal del cociente deducimos la existencia de una única $\tilde{T} : V/W \rightarrow V/W$ de modo que $\tilde{T} \circ \pi = \pi \circ T$. Esto termina la demostración del teorema. $\square$

OBSERVACIÓN 6.11. El teorema anterior puede generalizarse de la siguiente forma:

Sea $T : V \rightarrow V'$ una transformación lineal, y $W \subset V$, $W' \subset V'$ subespacios tales que $T(W) \subset W'$. Entonces, existe una única transformación lineal $\tilde{T} : V/W \rightarrow V'/W'$ tal que $\tilde{T} \circ \pi = \pi' \circ T$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ V/W & \xrightarrow{\tilde{T}} & V'/W' \end{array}$$

La prueba de este hecho es una fácil adaptación de la prueba del teorema 6.10 y queda como ejercicio (ver Ejercicio 4).

COROLARIO 6.12. *Sea $T : V \rightarrow U$ una transformación lineal, entonces la transformación lineal $\hat{T} : V/N(T) \rightarrow T(V)$ es un isomorfismo.*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & T(V) \xrightarrow{\text{inc}} U \\ \pi \downarrow & \nearrow \hat{T} & \\ V/N(T) & & \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo a los resultados anteriores, $N(\hat{T}) = N(T)/N(T) = \{0\} \subset V/N(T)$, de donde $\hat{T}$ es inyectiva. Además, $\hat{T}(V/N(T)) = T(V)$, por lo que la transformación lineal $\hat{T} : V/N(T) \rightarrow T(V)$ es sobreyectiva. $\square$

A continuación veremos algunos resultados sobre dimensión que se deducen de la construcción anterior del cociente.

TEOREMA 6.13. *Sea V un espacio de dimensión finita y W un subespacio; entonces $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una base $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_t\}$ de W y completémosla a una base $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_t, v_{t+1}, \dots, v_n\}$ de V . Consideremos los vectores, $[v_{t+1}], \dots, [v_n] \in V/W$. Ese conjunto de vectores junto con el $0_{V/W}$ constituye la imagen de la base $\mathcal{B}$ por la proyección canónica π , que es sobreyectiva. Como $\mathcal{B}$ genera V concluimos que $\overline{\mathcal{B}} = \{[v_{t+1}], \dots, [v_n]\} \subset V/W$ es un generador de V/W . Probaremos ahora que los vectores $[v_{t+1}], \dots, [v_n] \in V/W$ son linealmente independientes. Si $a_{t+1}, \dots, a_n$ son escalares tales que $a_{t+1}[v_{t+1}] + \dots + a_n[v_n] = 0$, entonces $a_{t+1}v_{t+1} + \dots + a_nv_n \in W$ y como los vectores de $\mathcal{C}$ son una base de W tenemos que existen escalares $a_1, \dots, a_t \in \mathbb{k}$ tales que

$$a_{t+1}v_{t+1} + \dots + a_nv_n = a_1w_1 + \dots + a_tw_t,$$

de donde obtenemos una relación de dependencia

$$a_1w_1 + \dots + a_tw_t - a_{t+1}v_{t+1} - \dots - a_nv_n = 0.$$

Como los vectores $w_1, \dots, w_t, v_{t+1}, \dots, v_n \in V$ son una base de V , concluimos que todos los coeficientes $a_1 = a_2 = \dots = a_t = a_{t+1} = \dots = a_n = 0$. Hemos probado que en la situación anterior $\overline{\mathcal{B}}$ es una base de V/W . $\square$

OBSERVACIÓN 6.14. Es de destacar que en el teorema anterior no sólo probamos el resultado sobre la dimensión sino que además describimos un procedimiento para encontrar una base del cociente V/W a partir de una base de W , que completamos a una base de V .

Más aún, es fácil ver que este procedimiento (la construcción de una base de V/W) es válido aún en dimensión infinita.

COROLARIO 6.15 (Teorema de las dimensiones). *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y supongamos que $T : V \rightarrow U$ es una transformación lineal. Entonces, $N(T) \subset V$ y $T(V) \subset U$ tienen dimensión finita y además*

$$\dim(N(T)) + \dim(T(V)) = \dim(V).$$

DEMOSTRACIÓN. Claramente $N(T)$ tiene dimensión finita. Por otro lado, usando el Corolario 6.12, sabemos que los espacios vectoriales $V/N(T)$ y $T(V)$ son isomorfos, y eso implica que $T(V)$ tiene dimensión finita y además que

$$\dim(V) - \dim(N(T)) = \dim(V/N(T)) = \dim(T(V)).$$

$\square$

OBSERVACIÓN 6.16. Comparar esta prueba con la realizada anteriormente en el Ejercicio 4.1.

COROLARIO 6.17. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{k}$ y $W \subset V$ un subespacio. Entonces $V \cong W \oplus V/W$.*

DEMOSTRACIÓN. Como en la prueba del teorema 6.13, completamos una base $\mathcal{B}_1$ de W a una base $\mathcal{B}$ de V . Si $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1$, entonces $\pi(\mathcal{B}_2)$ es una base de V/W . Consideremos la inclusión $\iota : W \hookrightarrow V$ y la transformación lineal $T : V/W \rightarrow V$ inducida por $T([v]) = v$, $v \in \mathcal{B}_2$ (ver Lema 4.1). Entonces T es inyectiva y el par ι, T induce una transformación lineal biyectiva $W \oplus V/W \rightarrow V$. $\square$

Queremos ahora comparar la matriz asociada a $T : V \rightarrow V$ con la matriz asociada al mapa inducido por T en el cociente V/W , en el caso en que W es un subespacio invariante.

TEOREMA 6.18. *Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal del espacio de dimensión finita V . Sea W un subespacio invariante de T . Llamemos $T|_W : W \rightarrow W$ a la transformación lineal obtenida mediante la restricción de T a W . Consideremos $\tilde{T} : V/W \rightarrow V/W$ la transformación lineal asociada a T en el cociente.*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/W & \xrightarrow{\tilde{T}} & V/W \end{array}$$

Sean $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_t\}$, $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_t, v_{t+1}, \dots, v_n\}$ y $\bar{\mathcal{B}} = \{[v_{t+1}], \dots, [v_n]\}$ bases de W , V y V/W respectivamente. Entonces ${}_B[T]_B = \begin{pmatrix} {}_C[T]_C & 0 \\ 0 & {}_{\bar{B}}[\tilde{T}]_{\bar{B}} \end{pmatrix}$, donde $\star$ es una matriz de t filas y n columnas.

DEMOSTRACIÓN. Calculemos en primer lugar las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ de los vectores $T(w_i)$, $i = 1, \dots, t$. Como éstos están en W , que es invariante por T , concluimos que $T(w_i)$ se escribe como combinación lineal de $\{w_1, \dots, w_t\}$. Los coeficientes correspondientes a esa combinación lineal son exactamente las entradas de la matriz asociada ${}_C[T]_C$. Eso prueba que las primeras t columnas de la matriz ${}_B[T]_B$ son como se enuncia en el teorema.

Consideremos la columna $t + j$, $j = 1, \dots, n - t$, de la matriz asociada. Si escribimos $T(v_j) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_t w_t + \alpha_{t+1} v_{t+1} + \dots + \alpha_n v_n$, de la igualdad anterior concluimos que $\tilde{T}([v_j]) = [T(v_j)] = \alpha_{t+1}[v_{t+1}] + \dots + \alpha_n[v_n]$. Eso implica que la “cola” (o sea la parte que va del elemento $t + 1$ hasta el elemento n) del $(t + j)$ -ésimo vector columna de la matriz ${}_B[T]_B$ es exactamente el j -ésimo vector columna de la matriz ${}_{\bar{B}}[\tilde{T}]_{\bar{B}}$. Eso termina la demostración. $\square$

A modo de aplicación, daremos una nueva prueba del Lema 5.31.

COROLARIO 6.19. *Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal de V , espacio vectorial de dimensión finita, y $V = W_1 \oplus W_2$ una descomposición en suma directa de subespacios T -invariantes. Sea $\mathcal{B}_1$ una base de W_1 , $\mathcal{B}_2$ una base de W_2 y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Entonces,*

$${}_B[T]_B = \begin{pmatrix} {}_{\mathcal{B}_1}[T]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ 0 & {}_{\mathcal{B}_2}[T]_{\mathcal{B}_2} \end{pmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicar el teorema anterior a W_1 para obtener las primeras t columnas de ${}_B[T]_B$, y a W_2 para obtener las últimas r columnas. $\square$

1. Ejercicios

1. Sea $V = \{f : [a, b] \rightarrow k\}$ y $W = \{f \in V : f(a) = 0\}$. Probar que $V/W \cong k$.
2. Sea $V = \{\{x_n\} \subseteq k : \{x_n\} \text{ converge}\}$ y sea $W = \{\{x_n\} \in V : \lim x_n = 0\}$. Probar que $V/W \cong k$.
3. Sean V y W subespacios de un espacio E . Probar que:

$$\frac{V+W}{V} \cong \frac{W}{V \cap W} \text{ y deducir } \frac{V \oplus W}{V} \cong W.$$
4. Probar la Observación 6.11.
5. Sea V un espacio vectorial, W y U subespacios de V tales que $W \subseteq U \subseteq V$. Probar que $\frac{V/W}{U/W} \cong V/U$.
6. (a) Sea V un k -espacio vectorial y W un subespacio de V . Sean $v_1, \dots, v_n \in V$. Probar que son equivalentes:
 - (A) $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\}$ es linealmente independiente en V/W .
 - (B) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente y $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \cap W = \{0\}$.
- (b) Sea $V = \mathbb{R}[x]$ y $W = \{x^3 p(x) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$. Se consideran los siguientes conjuntos de V/W : $A = \{\overline{x^3 - x^2}, \overline{x^2 - x}, \overline{x}\}$, $B = \{\overline{x^2 - x}, \overline{x - 1}, \overline{-x^2 + 1}\}$ y $C = \{\overline{1 + x^4 + x^5}, \overline{x + x^7}, \overline{x^2 + x^3 + x^4}\}$.
 - (i) Estudiar si son l.i o l.d..
 - (ii) Es alguno de ellos base de V/W ?

Dualidad

1. Dual de una transformación lineal

En este capítulo volveremos a considerar el tema de la dualidad de espacios vectoriales.

Se recuerda que si V es un espacio vectorial, definimos el *dual* como $V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{k} : f \text{ es una transformación lineal}\}$.

En el caso en que V tiene dimensión finita y $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base, denotamos la base dual como $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, ver Definición 4.23. Recordar que la propiedad más importante de la base dual es que se verifican las siguientes igualdades para todo $v \in V$ y para todo $f \in V^*$ (ver Lema 4.24):

$$v = \sum_i e_i^*(v) e_i \quad f = \sum_i f(e_i) e_i^*$$

Denotemos $\mathcal{V}$ a la familia de todos los espacios vectoriales, que consideramos simultáneamente con la familia de todas las transformaciones lineales entre todos los espacios vectoriales. Decimos que estamos considerando la *categoría* de todos los espacios vectoriales.

La dualidad se puede pensar como una *construcción* en la categoría $\mathcal{V}$. Para esto necesitamos completar la definición y considerar el dual de una transformación lineal.

DEFINICIÓN 7.1. Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Definimos una nueva transformación lineal $T^* : W^* \rightarrow V^*$ de la siguiente forma: $T^*(f) = f \circ T$ si $f \in W^*$.

OBSERVACIÓN 7.2. (1) Es de destacar que para verificar que la definición anterior es correcta es necesario probar dos linealidades. La primera es probar que $T^*(f) \in V^*$ o sea necesitamos verificar que $T^*(f) : V \rightarrow \mathbb{k}$ es una transformación lineal. Esto es consecuencia del hecho de que $T^*(f) = f \circ T$ y que esta última es una composición de transformaciones lineales. La segunda es verificar que T^* es lineal. En ese caso necesitamos probar que si $f, g \in W^*$ y $a \in \mathbb{k}$, entonces $(af + g) \circ T = af \circ T + g \circ T$. Esta propiedad se deduce de la definición de $af + g \in W^*$.

(2) En términos explícitos, podemos decir que $T^*(f)(v) = f(T(v))$.

(3) La funcional lineal $T^*(f) : V \rightarrow \mathbb{k}$ se puede caracterizar como la única funcional lineal que hace el diagrama de abajo conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T^*(f)} & \mathbb{k} \\ & \searrow T \quad \nearrow f & \\ & W & \end{array}$$

La *construcción* del dual verifica las dos siguientes propiedades que se pueden abreviar diciendo que el dual es un *functor* contravariante.

LEMA 7.3. Sean V, W, U espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$, $S : W \rightarrow U$ transformaciones lineales. Entonces:

- (1) $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$;
- (2) $(\text{Id}_V)^* = \text{Id}_{V^*}$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea $f \in U^*$, entonces $(S \circ T)^*(f) = f \circ (S \circ T)$. Por otro lado $(T^* \circ S^*)(f) = T^*(S^*(f)) = T^*(f \circ S) = (f \circ S) \circ T$. El resultado buscado se deduce de la asociatividad de la composición de funciones.

(2) La demostración de esta propiedad es simple y queda como ejercicio. $\square$

2. Dualidad y matrices asociadas

A continuación calculamos la matriz asociada a T^* en las bases duales, en términos de la matriz asociada a T en las bases dadas.

DEFINICIÓN 7.4. Si $A \in M_{m \times n}$ es una matriz definimos la matriz transpuesta $A^t \in M_{n \times m}$ como la matriz que se obtiene a partir de la matriz A intercambiando filas por columnas (ver Ejemplo 2.38).

OBSERVACIÓN 7.5. (1) Claramente, el mapa $A \rightsquigarrow A^t : M_{m \times n} \rightarrow M_{n \times m}$ es una transformación lineal ya que la transpuesta de una suma de matrices es la suma de las transpuestas y que la transpuesta del múltiplo escalar de una matriz es el múltiplo escalar de la transpuesta. Además si intercambiamos columnas por filas y luego nuevamente columnas por filas, volvemos a la matriz original, por que su inversa es la transposición $B \rightsquigarrow B^t : M_{n \times m} \rightarrow M_{m \times n}$.

(2) Recordemos que si la matriz es cuadrada, al transponerla obtenemos una matriz cuadrada que es la simétrica de la primera con respecto a la diagonal principal. Claramente la transpuesta de la identidad es la identidad. En el ejemplo 2.38 definimos las *matrices simétricas* como aquellas que coinciden con su transpuesta y las *matrices antisimétricas* como aquellas que son la opuesta de su transpuesta.

(3) Probaremos más adelante — se podría también verificar directamente — que la transpuesta de un producto es el producto de las transpuestas en el orden inverso. O sea, $(AB)^t = B^t A^t$, ver Corolario 7.7.

TEOREMA 7.6. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal entre espacios de dimensión finita y sean $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y $\mathcal{C} = \{f_1, \dots, f_m\}$ una base de W . Sean $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ y $\mathcal{C}^* = \{f_1^*, \dots, f_m^*\}$ las bases duales. Entonces ${}_B[T^*]_{\mathcal{C}^*} = ({}_C[T]_{\mathcal{B}})^t$.

DEMOSTRACIÓN. Si escribimos ${}_C[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}}$, y ${}_B[T^*]_{\mathcal{C}^*} = (b_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq m}}$ tenemos que $T(e_j) = a_{1j}f_1 + \dots + a_{mj}f_m$. Si evaluamos la igualdad anterior en f_i^* obtenemos que $a_{ij} = f_i^*(T(e_j))$. Por otro lado tenemos que $(T^*(f_i^*))(e_j) = (\sum b_{ti}e_t^*)(e_j) = b_{ji}$, de donde $b_{ji} = a_{ij}$. $\square$

COROLARIO 7.7. (1) Si A es una matriz, entonces $(L_A)^* = L_{A^t}$.
 (2) Si $A \in M_{m \times n}$ y $B \in M_{n \times l}$, entonces $(AB)^t = B^t A^t$.

DEMOSTRACIÓN. (1) es inmediato.

(2) se deduce de (1) y del hecho que $L_{AB} = L_A \circ L_B$. $\square$

3. Propiedades de T vs. propiedades de T^*

Las siguientes propiedades relacionan la inyectividad y sobreyectividad de una transformación lineal con las correspondientes propiedades de su transformación lineal dual.

TEOREMA 7.8. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

(1) La transformación lineal T es sobreyectiva si y solamente si $T^* : W^* \rightarrow V^*$ es inyectiva.

(2) La transformación lineal T es inyectiva si y sólo si T^* es sobreyectiva.

DEMOSTRACIÓN. (1) Supongamos que $T^*(f) = 0$ para $f \in W^*$. En ese caso deducimos que $f \circ T = 0$, y como T es sobreyectiva concluimos que $f = 0$.

Consideremos $\text{Im}(T) \subset W$. Si T no es sobreyectiva, entonces $\text{Im}(T) \subsetneq W$ y el Corolario 3.38 nos garantiza que existe un complemento directo $N \neq \{0\}$ de $\text{Im}(T)$ (ver Definición 3.35). Sea $\alpha : N \rightarrow \mathbb{k}$, una funcional lineal no nula — que existe porque la dimensión de N y la de N^* coinciden y la primera es positiva. Definimos $f : W = \text{Im}(T) \oplus N \rightarrow \mathbb{k}$, de la siguiente forma: $f(w + n) = \alpha(n)$. Este mapa f es una funcional lineal no nula en W tal que $f|_{\text{Im}(T)} = 0$, es decir $T^*(f) = 0$. Eso quiere decir que T^* no es inyectiva.

(2) Supongamos que T^* es sobreyectiva, y sea $0 \neq v \in V$ tal que $T(v) = 0$. Consideremos una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , con $v_1 = v$. Entonces $v_1^*(v) = 1$, pero $T^*(f)(v) = f^*(T(v)) = 0$ para todo $f \in W^*$, luego v_1^* no está en la imagen de T^* y entonces T^* no es sobreyectiva. Esto es una contradicción a menos que no exista v no nulo en el núcleo de T , o sea a menos que T sea inyectiva.

Recíprocamente, supongamos que T es inyectiva; si $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ es un funcional lineal, queremos construir $g : W \rightarrow \mathbb{k}$ lineal que verifique que $g \circ T = f$. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V , como T es inyectiva es claro que $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es una base de $T(V)$ (ver Lema 4.10). Si completamos esta base con los vectores $w_{n+1}, \dots, w_m$ hasta formar una base de W podemos definir $g : W \rightarrow \mathbb{k} \in W^*$ de la siguiente forma:

$$g(T(v_1)) = f(v_1), \dots, g(T(v_n)) = f(v_n), g(w_{n+1}) = 0, \dots, g(w_m) = 0.$$

Es evidente que $f = g \circ T$. $\square$

OBSERVACIÓN 7.9. (1) En el teorema anterior la hipótesis sobre las dimensiones de los espacios no es necesaria. En efecto, sabemos que siempre es posible extender un conjunto linealmente independiente a una base de un espacio vectorial. Consecuentemente siempre se puede encontrar el complemento de un subespacio cualquiera de un espacio vectorial.

(2) Veremos más adelante (ver Teorema 7.12) una generalización de este resultado.

4. Correspondencia entre subespacios de V y de V^*

Estudiaremos a continuación la relación entre los subespacios de un espacio vectorial y los de su dual.

DEFINICIÓN 7.10. (1) Sea V un espacio vectorial y $W \subset V$ un subespacio. Se define el *anulador o perpendicular* de W en V^* , $W^\perp \subset V^*$ de la siguiente forma:

$$W^\perp = \{f : V \rightarrow \mathbb{k} \in V^* : f|_W = 0\}.$$

(2) Sea $X \subset V^*$ un subespacio del dual de V , se define $X^\perp \subset V$ de la siguiente forma:

$$X^\perp = \{v \in V : f(v) = 0 \text{ para todo } f \in X\}.$$

Es fácil probar a partir de las definiciones anteriores que $W^\perp$ es un *subespacio* de V^* y que $X^\perp$ es un *subespacio* de V .

LEMA 7.11. Sea V un espacio vectorial y $W \subset V$ un subespacio. Entonces la proyección canónica $\pi : V \rightarrow V/W$ induce un isomorfismo $\pi^* : (V/W)^* \rightarrow W^\perp \subset V^*$.

DEMOSTRACIÓN. El Teorema 7.8 nos garantiza que la aplicación $\pi^* : (V/W)^* \rightarrow V^*$ es inyectiva. La imagen de π^* es

$$\text{Im}(\pi^*) = \{f : V \rightarrow \mathbb{k} : \text{existe } g : V/W \rightarrow \mathbb{k}, f = g \circ \pi\}.$$

Claramente una transformación lineal de la forma $g \circ \pi$ está en $W^\perp$ pues se anula en W . Recíprocamente, si tenemos una transformación lineal $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ que está en $W^\perp$, usando la propiedad universal del cociente deducimos que existe $g : V/W \rightarrow \mathbb{k}$ tal que $f = g \circ \pi$. En definitiva, hemos probado que $\text{Im}(\pi^*) = W^\perp$. $\square$

TEOREMA 7.12. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

$$(1) N(T^*) \cong (W/\text{Im}(T))^*.$$

$$(2) \text{Im}(T^*) \cong (V/N(T))^*.$$

DEMOSTRACIÓN. (1) Observemos que

$$N(T^*) = \{f \in W^* : f \circ T = 0\} = \{f \in W^* : f|_{\text{Im } T} = 0\}.$$

Aplicando el Lema 7.11, deducimos que $N(T^*) \cong (W/\text{Im}(T))^*$.

(2) Si probamos que $f \in \text{Im}(T^*)$ si y solamente si $f|_{N(T)} = 0$, el resultado se deduce aplicando nuevamente el Lema 7.11.

Por definición, $\text{Im}(T^*) = \{f \in V^* : \exists g \in W^*, g \circ T = f\}$. Luego, si $f = g \circ T \in \text{Im}(T^*)$ y $v \in N(T)$, entonces $f(v) = g \circ T(v) = g(0) = 0$. Recíprocamente, si $f|_{N(T)} = 0$, entonces f induce una funcional lineal $\tilde{f} : V/N(T) \rightarrow \mathbb{k}$. Por otro lado, T induce un isomorfismo $\tilde{T} : V/N(T) \rightarrow \text{Im}(T)$; sea $S : \text{Im}(T) \rightarrow V/N(T)$ su inversa. Entonces $g = f \circ S : \text{Im}(T) \rightarrow \mathbb{k}$ es tal que $g \circ T = (f \circ S) \circ T = f$. Razonando como antes extendemos $g : \text{Im}(T) \rightarrow \mathbb{k}$ a una funcional $\tilde{g} : W \rightarrow \mathbb{k} \in W^*$. Entonces $\tilde{g} \in W^*$ es la funcional lineal buscada, o sea una funcional que verifica que $T^*(\tilde{g}) = f$ y que garantiza que $f \in \text{Im}(T^*)$. $\square$

OBSERVACIÓN 7.13. Nuevamente, obsérvese que la hipótesis en las dimensiones es sólo técnica, obedeciendo a que no tenemos probado extensión de bases en dimensión infinita.

5. Rango de T y rango de T^*

Estamos ahora en condiciones de probar que el rango por filas de una matriz es igual al rango por columnas.

COROLARIO 7.14. *Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces $\text{r}(T) = \text{r}(T^*)$. En particular, el rango por filas de una matriz es igual al rango por columnas.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto,

$$\dim \text{Im}(T^*) = \dim(V / \text{N}(T))^* = \dim V / \text{N}(T) = \dim \text{Im}(T).$$

Si A es una matriz, entonces $\text{rc}(A) = \text{r}(L_A) = \text{r}((L_A)^*) = \text{rc}(A^t) = \text{rf}(A)$. La penúltima igualdad se demuestra aplicando el Teorema 7.7. $\square$

6. Doble dual

En esta sección estudiaremos la relación entre un espacio vectorial V y su *doble dual* V^{**} .

La construcción — functor — que realizamos en $\mathcal{V}$ (la categoría de los espacios vectoriales) y que a un espacio vectorial le asocia su dual, podemos iterarla. De esta forma tenemos otro functor $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, tal que $V \rightsquigarrow V^{**}$ y $T : V \rightarrow W \rightsquigarrow T^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}$.

Es importante notar que si bien la construcción del dual es *contravariante* en el sentido que “intercambia” el dominio con el codominio (“cambia el sentido de las flechas”), al iterarla se hace *covariante* y a $T : V \rightarrow W$ le corresponde $T^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}$.

El doble dual está ligado con el espacio original mediante un mapa *natural* que pasamos a definir.

DEFINICIÓN 7.15. Si V es un espacio vectorial, se define $j_V : V \rightarrow V^{**}$ de la siguiente forma: $j_V(v)(f) = f(v)$ para toda $f \in V^*$.

Observemos que debemos probar que si $v \in V$ entonces $j_V(v) \in V^{**}$, es decir que para todos $a, b \in \mathbb{k}$ y para todo $f, g \in V^*$,

$$j_V(v)(af + bg) = aj_V(v)(f) + bj_V(v)(g).$$

Esta igualdad se verifica directamente:

$$j_V(v)(af + bg) = (af + bg)(v) = af(v) + bg(v) = aj_V(v)(f) + bj_V(v)(g).$$

LEMA 7.16. (1) Para todo V el mapa j_V definido arriba es lineal e inyectivo. (2) Para toda transformación lineal $T : V \rightarrow W$, el diagrama de abajo conmuta.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j_V} & V^{**} \\ T \downarrow & & \downarrow T^{**} \\ W & \xrightarrow{j_W} & W^{**} \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. (1) Debemos probar que j_V es lineal o sea que $j_V(av + bw) = aj_V(v) + bj_V(w)$ para $a, b \in \mathbb{k}$ y $v, w \in V$. Si evaluamos en $f \in V^*$ tenemos que:

$$j_V(av + bw)(f) = f(av + bw) = af(v) + bg(w) = aj_V(v)(f) + bj_V(w)(f).$$

Para probar la inyectividad de j_V observemos primeramente que $v \in N(j_V)$ si y sólo si $f(v) = 0$ para todo $f \in V^*$. Queremos entonces probar que si $0 \neq v \in V$, entonces existe una funcional lineal $f \in V^*$ tal que $f(v) \neq 0$. Para ello, dado $v \neq 0$ consideramos el subespacio $\langle v \rangle \subset V$ y un complemento directo, es decir $L \subset V$ es un subespacio tal que $\langle v \rangle \oplus L = V$.

Usando la propiedad universal de la suma directa definimos una transformación lineal $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ tal que $f(av) = a$ para $a \in \mathbb{k}$ y $f(w) = 0$ para todo $w \in L$. Explícitamente, f se caracteriza por la igualdad $f(av + w) = a$, si $a \in \mathbb{k}$ y $w \in L$. La transformación lineal $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ verifica que $f(v) = 1$ (ver Lema 4.20).

(2) Queremos probar que $T^{**} \circ j_V = j_W \circ T$. Si aplicamos el primer miembro de esa igualdad a $v \in V$ obtenemos que $(T^{**} \circ j_V)(v) = T^{**}((j_V)(v)) = j_V(v) \circ T^*$. Si evaluamos ahora en $g \in W^{**}$ tenemos que

$$((T^{**} \circ j_V)(v))(g) = (j_V(v) \circ T^*)(g) = j_V(v)(g \circ T) = g(T(v)).$$

Si procedemos en la misma forma con el segundo miembro obtenemos que

$$(j_W \circ T)(v)(g) = j_W(T(v))(g) = g(T(v)),$$

por lo que hemos probado la tesis. $\square$

COROLARIO 7.17. *En la notación de arriba, si V tiene dimensión finita el mapa j_V es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Si la dimensión de V es finita, la de V^* también es igual a la de V . Consecuentemente V^{**} es un espacio vectorial de la misma dimensión que V . Como j_V es inyectiva deducimos que también es sobreyectiva. $\square$

OBSERVACIÓN 7.18. (1) Se verifica, pero la demostración de este resultado está fuera del alcance de este curso, que si j_V es un isomorfismo, entonces V tiene dimensión finita. O sea que el corolario anterior admite un recíproco.

(2) Si V tiene dimensión finita y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base, si consideramos la base dual $\{e_1^*, \dots, e_n^*\} \subset V^*$ y la dual nuevamente $\{e_1^{**}, \dots, e_n^{**}\} \subset V^{**}$, se puede probar que $j_V(e_i) = e_i^{**}$, ver Ejercicio 7.

OBSERVACIÓN 7.19. (1) La segunda conclusión del Lema 7.16 es la llamada *condición de naturalidad* del mapa j . Esta condición expresa de manera formal el hecho de que en la definición de j_V entran como ingredientes tan sólo las estructuras básicas del espacio V .

(2) La condición de naturalidad no se verifica en otras situaciones. Por ejemplo para espacios de dimensión finita, existe siempre un isomorfismo $i_V : V \cong V^*$, pero este isomorfismo no es natural en V porque en general no se cumple la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i_V} & V^* \\ T \downarrow & & \uparrow T^* \\ W & \xrightarrow{i_W} & W^* \end{array}$$

La conmutatividad del diagrama falla porque para definir i_V necesitamos elegir una base en V y la elección de esa base es arbitraria, ver Ejemplo 7.20.

EJEMPLO 7.20. Consideremos $V = \mathbb{k}^2$ y $W = \mathbb{k}^3$ con sus respectivas bases canónicas $\mathcal{C} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ y $\mathcal{D} = \{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)\}$. Consideremos los isomorfismos $i_V : V \rightarrow V^*$, $i_V(e_i) = e_i^*$, $i = 1, 2$, e $i_W : W \rightarrow W^*$, $i_W(f_j) = f_j^*$, $j = 1, 2, 3$. Sea $T : V \rightarrow W$ dada por $T(a, b) = (a, a + b, 0)$.

Se cumple entonces que $i_V(a, b) = ae_1^* + be_2^*$, por lo que para todo $(x, y) \in V$

$$(i_V(a, b))(x, y) = (ae_1^* + be_2^*)(x, y) = ae_1^*(x, y) + be_2^*(x, y) = ax + by.$$

Del mismo modo, para todo $(r, s, t) \in W$, se cumple que

$$(i_W(c, d, e))(r, s, t) = (cf_1^* + df_2^* + ef_3^*)(r, s, t) = cf_1^*(r, s, t) + df_2^*(r, s, t) + ef_3^*(r, s, t) = cr + ds + et.$$

Luego,

$$(T^* \circ i_W \circ T)(a, b) = (T^* \circ i_W)(a, a + b, 0) = (i_W(a, a + b, 0)) \circ T.$$

Evaluando en $(x, y) \in V$ tenemos que

$$\begin{aligned} ((T^* \circ i_W \circ T)(a, b))(x, y) &= ((i_W(a, a + b, 0)) \circ T)(x, y) = \\ &= (i_W(b, a, 0))(x, x + y, 0) = \\ &= ax + (a + b)(x + y) = (2a + b)x + (a + b)y. \end{aligned}$$

Como $(i_V(a, b))(x, y) = ax + by$, verificamos que el diagrama *no* conmuta.

7. ejercicios

1. Para cada uno de los siguientes casos, dar explícitamente los elementos de la base dual correspondiente.

- (a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(2, 1), (3, 1)\}$.
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 2, 1), (0, 0, 1)\}$.
- (c) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.

2. Sea $T : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(p) = (p(0), p(2))$ y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Hallar T^* y sus matriz asociada en las bases duales correspondientes.

- 3. (a) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que toda base de V^* es base dual de una base de V .
- (b) Sea $V = \mathbb{R}^3$ y definimos $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ de la siguiente manera: $f_1(x, y, z) = x - 2y$, $f_2(x, y, z) = x + y + z$ y $f_3(x, y, z) = y - 3z$. Probar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de V^* y hallar una base de V de la cual es base dual.
- (c) Sea $V = \mathbb{R}_1[x]$, para cada $p \in V$ se definen $f_1, f_2 \in V^*$ por $f_1(p) = \int_0^1 p(t)dt$ y $f_2(p) = \int_0^2 p(t)dt$. Probar que $\{f_1, f_2\}$ es base de V^* y hallar una base de V de la cual es base dual.

4. Se define $f \in (\mathbb{R}^2)^*$ por $f(x, y) = 2x + y$ y $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $T(x, y) = (3x + 2y, x)$

- (a) Hallar $T^*(f)$.
- (b) Hallar ${}_{\mathcal{B}^*}[T^*]_{\mathcal{B}^*}$, donde $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}^*$ es su base dual.

5. Sean $V = \mathbb{R}_1[x]$ y $W = \mathbb{R}^2$ con las respectivas bases $\mathcal{A} = \{1, x\}$ y $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$. Se define $T : V \rightarrow W$ por $T(p) = (p(0) - 2p(1), p(0) + p'(0))$.

- (a) Para $f \in W^*$ definido por $f(a, b) = a - 2b$, hallar $T^*(f)$.
- (b) Hallar ${}_{\mathcal{A}^*}[T^*]_{\mathcal{B}^*}$.

6. Probar que todo plano que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$ puede identificarse con el núcleo de un elemento en $(\mathbb{R}^3)^*$. Enunciar y probar el resultado análogo para $\mathbb{R}^2$.

7. Probar que si V es un espacio vectorial y $\mathcal{C} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base, entonces $j_V(e_i) = e_i^{**}$ para todo $i = 1, \dots, n$ (ver Observación 7.18)

8. (a) Una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ se dice *nilpotente* si para algún entero positivo k , $A^k = 0$, donde 0 es la matriz nula. Hallar el determinante de una matriz nilpotente.

(b) ¿Cuánto vale el determinante de una matriz antisimétrica $(2k + 1) \times (2k + 1)$?

(c) Una matriz $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ se dice *ortogonal* si $QQ^t = I$. Probar que si Q es ortogonal entonces $\det(Q) = \pm 1$.

(d) Hallar el determinante de una proyección $p : V \rightarrow V$.

9. Sea $M \in M_{n \times n}$ de la forma $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ donde A es una matriz cuadrada, I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula. Probar que $\det(M) = \det(A)$.

Funciones multilineales y determinantes

En este capítulo generalizamos el concepto de transformación lineal, permitiendo que en el dominio de la función hayan varias variables.

1. Definiciones generales

DEFINICIÓN 8.1. Sean $V_1, \dots, V_n, W$ espacios vectoriales y $b : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ una función. Decimos que b es *multilineal* si, fijando todas las variables menos la variable i -ésima, la función $V_i \rightarrow W$ que se obtiene es lineal. Por ejemplo, si fijamos todas las variables menos la primera, obtenemos que la función $v \mapsto b(v, v_2^0, \dots, v_n^0) : V_1 \rightarrow W$ es una transformación lineal — estamos considerando $v_2^0, \dots, v_n^0$ fijos.

Llamamos $\text{Mult}(V_1, \dots, V_n; W)$ al conjunto de todas las transformaciones multilineales con dominio en $V_1, \dots, V_n$ y codominio W . En el caso en que el codominio es el cuerpo de base, i.e., si $W = \mathbb{k}$, decimos que $b : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathbb{k}$ es una *forma* multilineal.

EJEMPLO 8.2. Si $n = 2$ entonces las condiciones para que $b \in \text{Mult}(V_1, V_2; W)$ son las siguientes: $b(\alpha v + \beta v', w) = \alpha b(v, w) + \beta b(v', w)$; $b(v, \gamma w + \delta w') = \gamma b(v, w) + \delta b(v, w')$ para todo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{k}$ y $v, v' \in V_1$ y $w, w' \in V_2$. Si compactificamos ambas fórmulas en una sola tenemos:

$$b(\alpha v + \beta v', \gamma w + \delta w') = \alpha \gamma b(v, w) + \alpha \delta b(v, w') + \beta \gamma b(v', w) + \beta \delta b(v', w').$$

OBSERVACIÓN 8.3. De la misma manera que se prueba que si V y W son espacios vectoriales, entonces $\text{Hom}(V, W)$ es un espacio vectorial con las operaciones realizadas punto a punto, se puede probar que $\text{Mult}(V_1, \dots, V_n; W)$ es un espacio vectorial con las operaciones realizadas punto a punto.

DEFINICIÓN 8.4. (1) Una transformación multilineal $b \in \text{Mult}(V, \dots, V; W)$ se dice *simétrica* si cuando se intercambian dos vectores de posición el resultado es el mismo. O sea si para todo $1 \leq i < j \leq n$ y toda n -upla de vectores $(v_1, \dots, v_n) \in V \times \dots \times V$, se tiene que

$$b(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n) = b(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n).$$

Llamamos $\text{Sim}(V, \dots, V; W)$ al conjunto de todas las transformaciones multilineales simétricas. Si $W = \mathbb{k}$ denotamos $\text{Sim}(V, \dots, V; \mathbb{k}) = \text{Sim}_n(V)$.

(2) Una transformación multilineal $b \in \text{Mult}(V, \dots, V; W)$, se dice *antisimétrica* o *alternada* si cuando se intercambian dos vectores de posición el resultado es opuesto. O sea si para todo $1 \leq i < j \leq n$ y toda n -upla de vectores $(v_1, \dots, v_n) \in V \times \dots \times V$, se tiene que

$$b(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -b(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

Llamamos $\text{Alt}(V, \dots, V; W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales alternadas. Si $W = \mathbb{k}$ denotamos $\text{Alt}(V, \dots, V; \mathbb{k}) = \text{Alt}_n(V)$.

OBSERVACIÓN 8.5. (1) Es fácil ver que $\text{Sim}(V, \dots, V; W) \subset \text{Mult}(V, \dots, V; W)$ es un subespacio. Del mismo modo, $\text{Alt}(V, \dots, V; W) \subset \text{Mult}(V, \dots, V; W)$ es también un subespacio. En particular, $\text{Sim}_n(V)$ y $\text{Alt}_n(V)$ son espacios vectoriales de un modo natural.

(2) Es claro que si b es una función multilinear alternada, como

$$b(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n) = \\ - b(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

(intercambiamos el vector de la posición i con el de la posición j), deducimos que $b(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n) = 0$. También se prueba el recíproco de la siguiente forma. Si para todos $v_1, \dots, v_n, v \in V$ se tiene que $b(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n) = 0$, obtenemos

$$0 = b(v_1, \dots, v + w, \dots, v + w, \dots, v_n) = b(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n) + \\ b(v_1, \dots, v, \dots, w, \dots, v_n) + b(v_1, \dots, w, \dots, v, \dots, v_n) + \\ b(v_1, \dots, w, \dots, w, \dots, v_n),$$

de donde deducimos que $b(v_1, \dots, v, \dots, w, \dots, v_n) = -b(v_1, \dots, w, \dots, v, \dots, v_n)$.

2. Formas bilineales, matrices asociadas

Consideramos ahora el caso particular de las formas bilineales; se usa la notación $\text{Bil}(V, W)$ para indicar $\text{Mult}(V \times V, W; \mathbb{k})$.

EJEMPLO 8.6. (1) Sea $A \in M_{n \times m}$ una matriz arbitraria. Definimos una forma bilineal $BL_A : \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^m \rightarrow \mathbb{k}$ de la siguiente forma: $BL_A(v, w) = v^t A w$ donde v^t indica el vector fila obtenido transponiendo el vector columna v . De esta forma construimos una función $BL : M_{n \times m} \rightarrow \text{Bil}(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^m)$. Es fácil ver que BL_A es una forma bilineal y que la función $BL : M_{n \times m} \rightarrow \text{Bil}(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^m)$ es una transformación lineal.

(2) Procediendo en forma semejante a como se procedió en el caso de transformaciones lineales se puede probar que BL es un isomorfismo: si $b \in \text{Bil}(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^m)$, entonces $b = BL_A$, donde $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = b(e_i, e_j)$.

DEFINICIÓN 8.7. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $\{e_1, \dots, e_n\} = \mathcal{B} \subset V$ y $\{f_1, \dots, f_m\} = \mathcal{C} \subset W$ respectivas bases. La matriz $(b(e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{n \times m}$ se llama la matriz asociada a la forma bilineal b en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$. Esa matriz se denota como ${}_B[b]_C$.

LEMA 8.8. La matriz asociada a una forma bilineal b en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ verifica:

$$b(v, w) = \mathbf{c}_B(v)^t {}_B[b]_C \mathbf{c}_C(w).$$

DEMOSTRACIÓN. Si escribimos $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ y $w = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j$ tenemos que

$$b(v, w) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j b(e_i, f_j) = \sum_{i,j} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) b(e_i, f_j) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \mathbf{c}_B(v)^t {}_B[b]_C \mathbf{c}_C(w).$$

□

Otra forma de interpretar la proposición anterior es la siguiente.

LEMA 8.9. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y sean $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{C} \subset W$ respectivas bases. Si ${}_{\mathcal{B}}[b]_{\mathcal{C}}$ es la matriz asociada a la forma bilineal $b : V \times W \rightarrow \mathbb{k}$, entonces el diagrama de abajo es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{b} & \mathbb{k} \\ \downarrow \mathbf{c}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{c}_{\mathcal{C}} & \nearrow BL_{{}_{\mathcal{B}}[b]_{\mathcal{C}}} & \\ \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^m & & \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que el enunciado de este lema es una reformulación del lema anterior. $\square$

OBSERVACIÓN 8.10. (1) En caso de que $b : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ sea una forma bilineal y $\mathcal{B} \subset V$ sea una base de V , tenemos que $b \in \text{Sim}_2(V)$ si y sólo si ${}_{\mathcal{B}}[b]_{\mathcal{C}}$ es una matriz simétrica. Análogamente, $b \in \text{Alt}_2(V)$ si y sólo si ${}_{\mathcal{B}}[b]_{\mathcal{C}}$ es una matriz antisimétrica. Esta demostración queda como ejercicio para el lector, ver Ejercicio 1.

(2) En particular, usando que una matriz arbitraria cuadrada se descompone en una matriz simétrica y una antisimétrica (si la característica del cuerpo es diferente de 2), se puede probar que una forma bilineal se descompone como una simétrica y otra alternada. Esta demostración queda como ejercicio para el lector.

COROLARIO 8.11. (1) Si V y W son espacios vectoriales de dimensión d y d' , entonces $\dim \text{Bil}(V, W) = dd'$.

(2) Si V es un espacio vectorial de dimensión d , entonces $\dim \text{Bil}(V) = d^2$.

DEMOSTRACIÓN. Se deja como ejercicio (ver Ejercicio 1). $\square$

3. Determinantes

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada dos por dos. Se define el *determinante* de la matriz A como $\det(A) = ad - bc$. Podemos interpretar $\det : \mathbb{k}^2 \times \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}$ como función de las dos columnas de la matriz. En ese caso se puede probar directamente que $\det \in \text{Alt}_2(\mathbb{k}^2)$. Esto nos lleva a considerar el espacio siguiente donde consideramos a “todos los determinantes”.

DEFINICIÓN 8.12. Sea V un espacio vectorial de dimensión n . Los elementos de $\text{Alt}_n(V)$ se llaman determinantes en V .

Ya hemos observado que si d y d' son determinantes en V entonces $d + d'$ es un determinante y también αd es un determinante si $\alpha \in \mathbb{k}$, en otras palabras, los determinantes forman un espacio vectorial.

OBSERVACIÓN 8.13. Si d es un determinante en $\mathbb{k}^2$ y $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica tenemos que si $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ y $w = \gamma e_1 + \delta e_2$ entonces

$$d(v, w) = d(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) = \alpha \gamma d(e_1, e_1) + \alpha \delta d(e_1, e_2) + \beta \gamma d(e_2, e_1) + \beta \delta d(e_2, e_2).$$

Como d es alternada, concluimos que $d(e_1, e_1) = d(e_2, e_2) = 0$ y además que $d(e_1, e_2) = -d(e_2, e_1)$. Entonces $d(v, w) = (\alpha \delta - \beta \gamma) d(e_1, e_2)$. Esto muestra la íntima relación entre

las funciones que más arriba llamamos determinantes y el determinante de una matriz (tal cual está definido usualmente). Ver Teorema 8.31.

DEFINICIÓN 8.14. Sea V un espacio vectorial de dimensión n ; se considera la transformación lineal $\Delta : \text{Alt}_n(V) \rightarrow \mathbb{k}$ definida de la siguiente forma: $\Delta(d) = d(e_1, \dots, e_n)$.

A continuación estudiaremos al mapa Δ . Nuestro propósito es probar que Δ es un isomorfismo (eso lleva su tiempo).

A continuación realizaremos un cálculo que resultará útil en varias ocasiones.

OBSERVACIÓN 8.15. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base. Si $v_1, \dots, v_n \in V$ son n vectores de V , queremos calcular $d(v_1, \dots, v_n)$. Para ello escribimos $v_i = \sum_{j_i} \alpha_{ij_i} e_{j_i}$ y

$$d(v_1, \dots, v_n) = d\left(\sum_{j_1} \alpha_{1j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_n} \alpha_{nj_n} e_{j_n}\right) = \sum_{j_1, \dots, j_n} \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{nj_n} d(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

A priori, el conjunto $\{j_1, \dots, j_n\}$ puede tener elementos repetidos; si los tuviera, como d es alternada tenemos que $d(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$. Consecuentemente, en la expresión anterior solo “sobreviven” los términos que tienen los subíndices $\{j_1, \dots, j_n\}$ diferentes, o sea si $\{j_1, \dots, j_n\}$ es una permutación (reordenación, ver Sección 4) del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

Luego, si denotamos $\mathcal{S}_n$ al conjunto de las permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ y consideramos una permutación $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\sigma(i) = j_i$ para $i = 1, \dots, n$, tenemos que

$$d(v_1, \dots, v_n) = d\left(\sum_{j_1} \alpha_{1j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_n} \alpha_{nj_n} e_{j_n}\right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} d(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Por otro lado, al ser $\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$ una reordenación de los elementos $\{1, \dots, n\}$, tenemos que

$$d(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \pm d(e_1, \dots, e_n). \quad (8.3.1)$$

El signo $\pm$ que aparece en la expresión anterior está determinado por la permutación σ que estamos considerando, lo calcularemos más adelante, ver Lema 8.26.

Tenemos entonces que el determinante d está dado por la fórmula

$$d(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \pm \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}\right) d(e_1, \dots, e_n). \quad (8.3.2)$$

Observemos que el valor de $d(v_1, \dots, v_n)$ está entonces determinado por el valor de $d(e_1, \dots, e_n)$, como lo muestra más formalmente el siguiente lema:

LEMA 8.16. Si V es un espacio vectorial de dimensión n , la función $\Delta : \text{Alt}_n(V) \rightarrow \mathbb{k}$ es inyectiva (ver la Definición 8.14). En particular, un determinante d está determinado por el valor $\Delta(d)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $d \in \text{Alt}_n(V)$ es tal que $\Delta(d) = 0$, aplicando los resultados de la Observación 8.15 concluimos que $d(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \pm \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}\right) \Delta(d) = 0$. Deducimos que $d(v_1, \dots, v_n) = 0$. $\square$

Como consecuencia del lema anterior, obtenemos una cota para la dimensión del espacio vectorial de los determinantes:

COROLARIO 8.17. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita $\dim V = n$, entonces $\dim \text{Alt}_n(V) \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, $\Delta : \text{Alt}_n(V) \rightarrow \mathbb{k}$ es inyectiva, por lo que $\dim \text{Alt}_n(V) = \dim \text{Im } \Delta \leq 1$. $\square$

OBSERVACIÓN 8.18. Más adelante veremos que existe siempre un determinante no nulo, probando entonces que $\dim \text{Alt}_n(V) = 1$, ver Observación 8.29 y Teorema 8.31.

4. Permutaciones

En la construcción de los determinantes el conjunto $\mathcal{S}_n$ de las permutaciones de n elementos juega un papel relevante, queremos estudiarlo más en detalle. Recordemos que

$$\mathcal{S}_n = \{\sigma : [n] \rightarrow [n] : \sigma \text{ es biyectiva}\} \subset [n]^{[n]}.$$

OBSERVACIÓN 8.19. (1) El conjunto de las permutaciones $\mathcal{S}_n \subset [n]^{[n]}$ tiene $n!$ elementos.

(2) Si $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ es una función biyectiva, entonces, $\sigma^{-1} : [n] \rightarrow [n]$ (la función inversa de σ) es también una función biyectiva, o sea que si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ entonces $\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n$. Es claro también que la función identidad $1_n = \text{Id}_{[n]} : [n] \rightarrow [n]$ es una permutación. Si $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ son permutaciones también lo es $\sigma \circ \tau$ — muchas veces omitimos el símbolo $\circ$ y escribimos simplemente $\sigma\tau$. También a menudo omitiremos el subíndice en 1_n y escribimos $1 \in \mathcal{S}_n$.

De esta forma, hemos probado que el conjunto de todas las permutaciones de n elementos forman un grupo.

(3) Las permutaciones se escriben frecuentemente de la siguiente forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 8.20. El grupo $\mathcal{S}_3$ tiene seis elementos que son:

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \nu &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \nu\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \tau\nu &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 8.21. Una *transposición* es una permutación $\sigma \in \mathcal{S}_n$ con la siguiente propiedad: existen $1 \leq i \neq j \leq n$ tales que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$, $\sigma(k) = k$ para todo $k \neq i, j$.

OBSERVACIÓN 8.22. Observar que si τ es una transposición, entonces $\tau^2 = 1$, o sea que $\tau = \tau^{-1}$.

En el ejemplo de $\mathcal{S}_3$ presentado más arriba, σ, τ, ν son transposiciones. En $\mathcal{S}_2$ la única permutación diferente de 1 es una transposición.

En el caso de $\mathcal{S}_3$ se observa que toda permutación es producto de transposiciones. Por ejemplo, la identidad $1 = \sigma^2$. Por otro lado esta descomposición no es única pues por ejemplo: $1 = \sigma^2 = \tau^2$. El teorema que sigue que no demostraremos, da información sobre este tipo de descomposiciones.

TEOREMA 8.23. *Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es una permutación, existen transposiciones $\tau_1, \dots, \tau_l \in \mathcal{S}_n$ tales que $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_l$. Además, si tenemos otra descomposición de la forma $\sigma = \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_s$ con ν_i transposición para $i = 1, \dots, s$, entonces $s - l$ es un número par.* $\square$

El teorema anterior garantiza que toda permutación se escribe como producto de transposiciones, de forma no necesariamente única, y que en dos descomposiciones diferentes de la misma permutación, la diferencia de las longitudes de ambas descomposiciones es un número par.

Por ejemplo, *no* sería posible descomponer, σ de dos formas diferentes, $\sigma = \tau_1 \tau_2 \tau_3 = \nu_1 \nu_2$ donde $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \nu_1, \nu_2$ son transposiciones.

DEFINICIÓN 8.24. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es una permutación y $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_l$, se define el signo de σ como $\varepsilon(\sigma) = (-1)^l$.

OBSERVACIÓN 8.25. (1) El Teorema 8.23 nos garantiza que la definición anterior es correcta, o sea que $\varepsilon(\sigma)$ no depende de la descomposición elegida de σ en términos de transposiciones.

(2) Si consideramos ε como una función, tenemos que $\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$. Es claro que el conjunto $\{-1, 1\}$ es un grupo con la operación de producto. Con esa estructura ε es un homomorfismo de grupos, es decir que $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

5. Unicidad de los determinantes. Determinantes de matrices

Comenzamos calculando el signo $\pm$ que aparece en la ecuación (8.3.2).

LEMA 8.26. *De acuerdo con las notaciones de la ecuación (8.3.1) tenemos que*

$$d(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) d(e_1, \dots, e_n)$$

DEMOSTRACIÓN. Escribimos $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_l$ donde $\tau_i, i = 1, \dots, l$ son transposiciones. Si abreviamos $\sigma' = \tau_1 \cdots \tau_{l-1}$ tenemos que $\sigma = \sigma' \tau_l$. Luego, $d(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = d(e_{\sigma'(1)}, \dots, e_{\sigma'(n)}) = -d(e_{\sigma'(1)}, \dots, e_{\sigma'(n)})$. La última igualdad se deduce del hecho de que d es alternada. En efecto, supongamos que $\tau_l = (ij)$ y notemos $(a_1, \dots, a_n)_i = a_i$. Entonces

$$\begin{aligned} (e_{\sigma'(1)}, \dots, e_{\sigma'(n)})_i &= e_{\sigma'(\tau_l(i))} = e_{\sigma(j)} \\ (e_{\sigma'(1)}, \dots, e_{\sigma'(n)})_j &= e_{\sigma'(\tau_l(j))} = e_{\sigma(i)} \\ (e_{\sigma'(1)}, \dots, e_{\sigma'(n)})_k &= e_{\sigma'(\tau_l(k))} = e_{\sigma(k)} \quad k \neq i, j \\ (e_{\sigma'(1)}, \dots, e_{\sigma'(n)})_h &= e_{\sigma(h)} \quad h = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

de donde deducimos la afirmación.

Al reducir $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_l$ a $\sigma' = \tau_1 \cdots \tau_{l-1}$ el signo se cambia una vez, ya que se cambia la paridad de la cantidad de transposiciones involucradas. Si seguimos con ese procedimiento, y eliminamos todos los términos del producto $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_l$ uno por uno, realizaremos $(-1)^l$ cambios de signo en la expresión de d . En definitiva, concluimos que $d(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) d(e_1, \dots, e_n)$. $\square$

DEFINICIÓN 8.27. Dada una matriz, $A \in M_n$ definimos su determinante por la fórmula

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}.$$

OBSERVACIÓN 8.28. Podemos interpretar la igualdad de la ecuación (8.3.2) como

$$d(v_1, \dots, v_n) = \det(A)d(e_1, \dots, e_n) \quad (8.5.1)$$

La función $\det : M_n \rightarrow \mathbb{k}$ la podemos pensar también como una función $\det : \mathbb{k}^n \times \dots \times \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, la fórmula anterior (8.5.1) se puede escribir de la siguiente manera:

$$d(v_1, \dots, v_n) = \det(\mathbf{c}_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, \mathbf{c}_{\mathcal{B}}(v_n))d(e_1, \dots, e_n) \quad (8.5.2)$$

En definitiva, hemos probado que el diagrama de abajo conmuta.

$$\begin{array}{ccc} V \times \dots \times V & \xrightarrow{d} & \mathbb{k} \\ \mathbf{c}_{\mathcal{B}} \times \dots \times \mathbf{c}_{\mathcal{B}} \downarrow & \nearrow d(e_1, \dots, e_n) \det & \\ \mathbb{k}^n \times \dots \times \mathbb{k}^n & & \end{array}$$

OBSERVACIÓN 8.29. Es claro que si probamos que $\det : \mathbb{k}^n \times \dots \times \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k} \in \text{Alt}_n(\mathbb{k}^n)$ y no es la función nula, del diagrama anterior se concluye inmediatamente que

$$d(v_1, \dots, v_n) = \det(\mathbf{c}_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_1), \dots, \mathbf{c}_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_n)) \in \text{Alt}_{\mathbf{n}}(\mathbf{V}),$$

y que este determinante no es nulo, luego $\dim \text{Alt}_n(V) \geq 1$, por lo que $\text{Alt}_n(V) = 1$ (ver Observación 8.18)

TEOREMA 8.30. *La función $\det : (\mathbb{k}^n)^n = \mathbb{k}^n \times \dots \times \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$ es una forma multilineal alternada no nula.*

DEMOSTRACIÓN. Queremos probar que $\det$ es multilineal y alternada. Si

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^n,$$

entonces $\det(c_1, \dots, c_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$. Si $i < j$, y τ es la transposición que intercambia i con j y deja el resto de los elementos del conjunto $[n]$ fijos, entonces

$$\begin{aligned} \det(c_1, \dots, c_j, \dots, c_i, \dots, c_n) &= \\ \det\left(\sum_{k_1} c_{1k_1} e_{k_1}, \dots, \sum_{k_{i-1}} c_{1k_{i-1}} e_{k_{i-1}}, \sum_{k_j} c_{1k_j} e_{k_j}, \dots, \sum_{k_i} c_{1k_i} e_{k_i}, \dots, \sum_{k_n} c_{1k_n} e_{k_n}\right) &= \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(j)} \dots a_{j\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} &= \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma\tau(1)} \dots a_{i\sigma\tau(i)} \dots a_{j\sigma\tau(j)} \dots a_{n\sigma\tau(n)}, \end{aligned}$$

Si hacemos en la sumatoria el cambio de variables $\nu = \sigma\tau$ tenemos que

$$\begin{aligned} \det(c_1, \dots, c_j, \dots, c_i, \dots, c_n) &= \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\nu\tau) a_{1\nu(1)} \dots a_{i\nu(i)} \dots a_{j\nu(j)} \dots a_{n\nu(n)} = \\ &= \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\nu) a_{1\nu(1)} \dots a_{i\nu(i)} \dots a_{j\nu(j)} \dots a_{n\nu(n)} = \\ &= \det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n). \end{aligned}$$

En la prueba anterior hemos usado que $\varepsilon(\nu\tau) = \varepsilon(\nu)\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\nu)$.

Por último, es fácil ver que $\det(\text{Id}_n) = \det(e_1, \dots, e_n)$, donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica, por lo que $\det$ no es la función nula. En efecto, Las entradas de la matriz correspondiente a la base canónica son δ_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, donde $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ii} = 1$. Calculando explícitamente:

$$\det(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \delta_{1\sigma(1)} \dots \delta_{i\sigma(i)} \dots \delta_{n\sigma(n)}.$$

En la suma anterior, el único sumando que no es cero es el que corresponde a $\sigma(1) = 1, \dots, \sigma(i) = i, \dots, \sigma(n) = n$; o sea el que corresponde a $\sigma = 1$. En definitiva tenemos que

$$\det(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \delta_{1\sigma(1)} \dots \delta_{i\sigma(i)} \dots \delta_{n\sigma(n)} = \varepsilon(1) \delta_{11} \dots \delta_{ii} \dots \delta_{nn} = 1.$$

□

TEOREMA 8.31. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base fija.*

(1) *Sea d el elemento de $\text{Alt}_n(V)$ definido por la fórmula*

$$d(v_1, \dots, v_n) = \det(\mathbf{c}_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, \mathbf{c}_{\mathcal{B}}(v_n)).$$

Si $\Delta : \text{Alt}_n(V) \rightarrow \mathbb{K}$ es como antes, entonces $\Delta(d) = 1$.

(2) *El espacio $\text{Alt}_n(V)$ tiene dimensión uno.*

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Delta(d) = d(e_1, \dots, e_n) = \det(f_1, \dots, f_n)$, donde $\{f_1, \dots, f_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$, por lo que aplicando el Teorema 8.30 — mejor dicho los cálculos efectuados en la prueba de mismo —, vemos que $\Delta(d) = 1$.

(2) Hemos probado que la transformación lineal Δ no es nula; luego $\dim \text{Alt}_n(V) \neq 0$. Por otro lado, en el Lema 8.16 probamos que $\dim \text{Alt}_n(V) \leq 1$, luego $\dim \text{Alt}_n(V) = 1$. □

COROLARIO 8.32. *Si V es un espacio de dimensión n y $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base dada, existe una y sólo una función n -lineal alternada d definida en V tal que $d(e_1, \dots, e_n) = 1$.* □

6. Determinantes de transformaciones lineales

En esta sección definimos el determinante de una transformación lineal de un espacio en sí mismo.

LEMA 8.33. Sea V un espacio vectorial y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Si $d \in \text{Alt}_n(V)$ y definimos $d_T : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ por la siguiente fórmula: $d_T(v_1, \dots, v_n) = d(T(v_1), \dots, T(v_n))$, entonces $d_T \in \text{Alt}_n(V)$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $d_T(v_1, \dots, v_n) = d(T(v_1), \dots, T(v_n))$ es multilineal y alternada si d lo es. $\square$

DEFINICIÓN 8.34. Si V es un espacio vectorial y $T : V \rightarrow V$ es una transformación lineal, se define $T^\sharp : \text{Alt}_n(V) \rightarrow \text{Alt}_n(V)$ por la fórmula $T^\sharp(d) = d_T$.

OBSERVACIÓN 8.35. (1) Es fácil verificar que $T^\sharp : \text{Alt}_n \rightarrow \text{Alt}_n$ es una transformación lineal.

(2) $(TS)^\sharp = S^\sharp T^\sharp$. Efectivamente, como $T^\sharp(d) = d \circ (T \times \cdots \times T)$, tenemos que

$$(TS)^\sharp(d) = d \circ (TS \times \cdots \times TS) = T^\sharp(d) \circ (S \times \cdots \times S) = (S^\sharp T^\sharp)(d).$$

(3) $\text{Id}^\sharp = \text{Id}_{\text{Alt}_n(V)}$, ver Ejercicio 2.

(4) $(aT)^\sharp = a^n T^\sharp$, ver Ejercicio 2.

DEFINICIÓN 8.36. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Como $\dim \text{Alt}_n(V) = 1$, existe un único escalar $\det(T) \in \mathbb{k}$ que verifica que para todo $d \in \text{Alt}_n(V)$, $T^\sharp(d) = \det(T)d$. Diremos que $\det(T)$ es el *determinante de la transformación lineal* T .

En otras palabras, $\det(T)$ es el único escalar que verifica que para todo $d \in \text{Alt}_n(V)$ se tiene que $d_T = \det(T)d$.

OBSERVACIÓN 8.37. Sea W un espacio vectorial de dimensión 1 y $T, S : W \rightarrow W$ dos transformaciones lineales. Entonces existen $a_T, a_S \in \mathbb{k}$ tales que $T(w) = a_T w$ y $S(w) = a_S w$ para todo $w \in W$. Luego, $TS(w) = T(a_S w) = a_S T(w) = a_S a_T w$. Deducimos entonces que $a_S a_T = a_{ST}$, el único escalar tal que $TS(w) = a_{ST} w$, para todo $w \in W$.

LEMA 8.38. (1) Si $T, S : V \rightarrow V$ son dos transformaciones lineales, entonces $\det(TS) = \det(T)\det(S)$.

(2) $\det(\text{Id}_V) = 1$.

(3) Si $T : V \rightarrow V$ es invertible, entonces $\det(T) \neq 0$ y $\det(T^{-1}) = 1/\det(T)$.

(4) $\det(aT) = a^n \det(T)$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Esta propiedad se deduce inmediatamente de la Observación 8.37.

(2) $d_{\text{Id}_V} = d$.

(3) Si T es invertible, tenemos que $T^{-1}T = \text{Id}$, de donde deducimos que $\det(T^{-1})\det(T) = 1$.

(4) Como $(aT)^\sharp = a^n T^\sharp$ concluimos el resultado deseado. $\square$

A continuación relacionamos el determinante de una transformación lineal con el determinante de su matriz asociada.

LEMA 8.39. Sea $A \in M_n$ y consideremos $L_A : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$. En esa situación $\det(L_A) = \det(A)$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $\det \in \text{Alt}_n(\mathbb{k}^n)$. Entonces $\det(L_A)$ verifica la siguiente igualdad:

$$L_A^\sharp(\det) = \det(L_A) \det.$$

Si evaluamos el lado izquierdo de la igualdad anterior en la matriz identidad tenemos que $L_A^\sharp(\det)(e_1, \dots, e_n) = \det(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det(A)$. Si evaluamos el lado derecho tenemos: $\det(L_A) \det(e_1, \dots, e_n) = \det(L_A)$. De esa forma concluimos que $\det(L_A) = \det(A)$. $\square$

COROLARIO 8.40. Si V es un espacio vectorial de dimensión n con base $\mathcal{B}$, entonces $\det(T) = \det({}_\mathcal{B}[T]_\mathcal{B})$.

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $A = {}_\mathcal{B}[T]_\mathcal{B}$. Es claro que si $d \in \text{Alt}_n(V)$ es tal que $d(e_1, \dots, e_n) = 1$ entonces el diagrama de abajo conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} V \times \dots \times V & \xrightarrow{T \times \dots \times T} & V \times \dots \times V & \xrightarrow{d} & \mathbb{k} \\ \mathbf{c}_\mathcal{B} \times \dots \times \mathbf{c}_\mathcal{B} \downarrow & & \mathbf{c}_\mathcal{B} \times \dots \times \mathbf{c}_\mathcal{B} \downarrow & \nearrow d(e_1, \dots, e_n) \det & \\ \mathbb{k}^n \times \dots \times \mathbb{k}^n & \xrightarrow{L_A \times \dots \times L_A} & \mathbb{k}^n \times \dots \times \mathbb{k}^n & & \end{array}$$

Usando las definiciones de determinante de T y de L_A el diagrama anterior puede ser sustituido por el que sigue

$$\begin{array}{ccc} V \times \dots \times V & \xrightarrow{\det(T)d} & \mathbb{k} \\ \mathbf{c}_\mathcal{B} \times \dots \times \mathbf{c}_\mathcal{B} \downarrow & \nearrow \det(L_A) \det & \\ \mathbb{k}^n \times \dots \times \mathbb{k}^n & & \end{array}$$

En otras palabras: $\det(T)d = \det(L_A) \det(\mathbf{c}_\mathcal{B} \times \dots \times \mathbf{c}_\mathcal{B})$, y como también sabemos que $d = \det(\mathbf{c}_\mathcal{B} \times \dots \times \mathbf{c}_\mathcal{B})$, concluimos que $\det(T) = \det(L_A) = \det(A) = \det({}_\mathcal{B}[T]_\mathcal{B})$. $\square$

COROLARIO 8.41. Si $A, B \in M_n$ entonces, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

DEMOSTRACIÓN. Como $L_{AB} = L_A L_B$, deducimos que $\det(AB) = \det(L_{AB}) = \det(L_A L_B) = \det(L_A) \det(L_B) = \det(A) \det(B)$. $\square$

7. Cálculos de determinantes, menores

En esta sección nos concentraremos en determinantes de matrices.

LEMA 8.42. Si $A \in M_n$ entonces $\det(A) = \det(A^t)$.

DEMOSTRACIÓN. Queremos probar que si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ entonces

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Si escribimos en la segunda sumatoria $i = \sigma(\sigma^{-1}(i))$ tenemos la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))} \cdots a_{\sigma(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))} = \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se obtiene simplemente cambiando el orden de los factores $a_{\sigma(i)\sigma^{-1}(\sigma(i))}$, con $i = 1, \dots, n$ de modo que queden ordenados en orden creciente $\{1, \dots, n\}$. La última igualdad se obtiene haciendo en la sumatoria un cambio de variables de σ por σ^{-1} , ya que al σ recorrer $\mathcal{S}_n$ lo mismo pasa con σ^{-1} . Observemos además que $\text{sg}(\sigma) = \text{sg}(\sigma^{-1})$. $\square$

DEFINICIÓN 8.43. (1) Sea $A \in M_n$ una matriz cuadrada. Fijados un par de subíndices $1 \leq i, j \leq n$ se considera una matriz $m_{ij}(A) \in M_{n-1}$, que se obtiene a partir de la matriz A eliminando la columna i y la fila j . La matriz $m_{ij}(A)$ se llama el *menor* (si es necesario aclararlo el $n-1$ menor) (i, j) de la matriz A .

(2) Se define en la misma situación que arriba, para i, j fijados, el escalar $c_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det(m_{ij}(A))$.

(3) Se define la matriz adjunta de la matriz A de la siguiente forma:

$$\text{ad}(A) = (c_{ij}(A))_{1 \leq i, j \leq n}^t.$$

EJEMPLO 8.44. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. En este caso los menores son matrices uno por uno, o sea escalares, escribimos explícitamente $c_{11} = a_{22}$, $c_{12} = -a_{21}$, $c_{21} = -a_{12}$, $c_{22} = a_{11}$. Tenemos entonces que

$$c_{ij}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \quad \text{ad}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

El siguiente teorema muestra que un determinante se puede calcular desarrollando por una fila, o por una columna.

TEOREMA 8.45. Sea $A \in M_n$ una matriz cuadrada.

(1) $\det(A) = a_{1i}c_{1i}(A) + a_{2i}c_{2i}(A) + \cdots + a_{ni}c_{ni}(A)$. Esta fórmula se llama *fórmula del desarrollo de un determinante por la columna i -ésima*.

(2) $\det(A) = a_{j1}c_{j1}(A) + a_{j2}c_{j2}(A) + \cdots + a_{jn}c_{jn}(A)$. Esta fórmula se llama *fórmula del desarrollo de un determinante por la fila j -ésima*.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que tomando matrices transpuestas podemos transformar la ecuación (1) en la ecuación (2). Probaremos sólo la segunda, por inducción.

Para $n = 1$ no hay nada que probar, para $n = 2$ se puede probar directamente (ver introducción a la Sección 3).

Supongamos probado el resultado para $n-1$ y llamemos $\beta(A) = a_{j1}c_{j1}(A) + a_{j2}c_{j2}(A) + \cdots + a_{jn}c_{jn}(A)$. Queremos probar que $\beta \in \text{Alt}_n(\mathbb{K}^n)$. Si dejamos a todas las columnas fijas y ponemos la columna k -ésima como suma $a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$, llamamos B a la matriz

obtenida sustituyendo la columna k por la formada por los b_{ik} y C a la correspondiente matriz para los c_{ik} . En el desarrollo $a_{j1}c_{j1}(A) + a_{j2}c_{j2}(A) + \cdots + a_{jn}c_{jn}(A)$, cada menor $c_{jl}(A)$ que no sea el c_{jk} , se descompone $c_{jl}(A) = c_{jl}(B) + c_{jl}(C)$ por la hipótesis de inducción. En el lugar j, k tenemos la descomposición $a_{jk} = b_{jk} + c_{jk}$.

En definitiva tenemos que

$$\begin{aligned} a_{j1}c_{j1}(A) + a_{j2}c_{j2}(A) + \cdots + a_{jn}c_{jn}(A) = \\ a_{j1}(c_{j1}(B) + c_{j1}(C)) + a_{j2}(c_{j2}(B) + c_{j2}(C)) + \cdots + \\ + (b_{jk} + c_{jk})c_{jk}(A) + \cdots + a_{jn}(c_{jn}(B) + c_{jn}(C)) = \\ \beta(B) + \beta(C). \end{aligned}$$

Para probar que β es alternada, observamos que si A tiene las columnas h, k iguales, entonces si $m_{ji}(A)$ tiene dos columnas iguales si $j \neq h, k$. Si suponemos que $h < k$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \beta(A) = a_{j1}c_{j1}(A) + \cdots + a_{jh}c_{jh}(A) + \cdots + a_{jk}c_{jk}(A) + \cdots + a_{jn}c_{jn}(A) = \\ a_{jh}c_{jh}(A) + a_{jk}c_{jk}(A) = a_{jh}(c_{jh}(A) + c_{jk}(A)). \end{aligned}$$

Resta ahora observar que si c'_i es la i -ésima columna de A sin elemento a_{ji} ,

$$c'_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{j-1,i} \\ a_{j+1,i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} m_{jh}(A) &= (c'_1, \dots, c'_{h-1}, c'_{h+1}, \dots, c'_{k-1}, c'_k, c'_{k+1}, \dots, c_n) \\ m_{jk}(A) &= (c'_1, \dots, c'_{h-1}, c'_h, c'_{h+1}, \dots, c'_{k-1}, c'_{k+1}, \dots, c_n). \end{aligned}$$

Luego, $\det(m_{jk}(A)) = (-1)^{k-h+1} \det(m_{i,h}(A))$. En efecto, como $c'_h = c'_k$, la matriz $m_{jk}(A)$ se obtiene a partir de $m_{jh}(A)$ trasponiendo sucesivamente las columnas h -ésima con la $h+1$ -ésima, luego la $h+1$ -ésima con la $h+2$ -ésima y así sucesivamente hasta trasponer la columna $k-1$ con la k , lo que hace un total de $k-h+1$ trasposiciones. El determinante de cada matriz intermedia es el opuesto del determinante de la matriz anterior, por lo que deducimos la afirmación.

De lo anterior, deducimos que

$$\begin{aligned} c_{jh}(A) &= (-1)^{j+h} \det(m_{jh}(A)) = (-1)^{j+h} (-1)^{k-h+1} \det(m_{jk}(A)) = \\ &= (-1)^{j+k+1} \det(m_{jk}(A)) = -c_{jk}(A). \end{aligned}$$

Luego, $\beta(A) = a_{jh}(c_{jh}(A) + c_{jk}(A)) = 0$.

Como β y $\det$ son elementos de $\text{Alt}_n(\mathbb{K}^n)$, que tiene dimensión uno, será uno múltiplo del otro. Como por otro lado $\beta(\text{Id}_n) = 1 = \det(\text{Id}_n)$, concluimos la igualdad buscada. $\square$

TEOREMA 8.46. Si $A \in M_n$, entonces $A \text{ad}(A) = \text{ad}(A)A = \det(A) \text{Id}_n$.

DEMOSTRACIÓN. La entrada k, l de la matriz $A \text{ad}(A)$ es $\sum_r a_{kr} c_{lr}(A)$. De acuerdo con los resultados anteriores (ver Teorema 8.45) en el caso en que $k = r$, este escalar es igual a $\det(A)$. Si $k \neq r$ formemos una nueva matriz que es igual a la original pero

en la que sustituimos la fila k por la fila r . Llamemos A' a esa nueva matriz (que tiene dos filas iguales). Aplicando los resultados del Teorema a la matriz A' deducimos que $0 = \det(A') = a'_{k1}c_{k1}(A') + \cdots + a'_{kn}c_{kn}(A') = a_{r1}c_{k1}(A) + \cdots + a_{rn}c_{kn}(A)$. De esta manera hemos probado el resultado buscado y $A \operatorname{ad}(A) = \det(A) \operatorname{Id}_n$. Para probar la restante igualdad procedemos como sigue. Si aplicamos la propiedad anteriormente probada a A^t , tenemos que $A^t \operatorname{ad}(A^t) = \det(A^t) \operatorname{Id}_n$, o equivalentemente $(\operatorname{ad}(A)A)^t = \det(A) \operatorname{Id}_n$. De lo anterior deducimos que $\operatorname{ad}(A)A = \det(A) \operatorname{Id}_n$. $\square$

COROLARIO 8.47. *Si $A \in M_n$, entonces A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$. En ese caso $A^{-1} = \operatorname{ad}(A)/\det(A)$.* $\square$

COROLARIO 8.48. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \rightarrow V$ es una transformación lineal, entonces T es invertible si y sólo si $\det(T) \neq 0$.* $\square$

8. Orientación de espacios vectoriales reales

Finalizamos este capítulo con la definición y presentación de las primeras propiedades del concepto de *orientación* de un espacio vectorial *real*, de mucha importancia en geometría (ver Apéndice A).

Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita, y $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ dos bases. Entonces $\det_{\mathcal{C}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}} \neq 0$, ya que

$$1 = \det(\operatorname{Id}) = \det({}_{\mathcal{C}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{C}}).$$

DEFINICIÓN 8.49. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ dos bases *ordenadas*. Diremos que $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ tiene la misma *orientación* si el determinante de la matriz de cambio de bases $\det_{\mathcal{C}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}} > 0$.

LEMA 8.50. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, entonces la relación definida en el conjunto de las bases de V $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{C}$ si tienen la misma orientación es una relación de equivalencia. Dicha relación posee únicamente dos clases de equivalencia.*

DEMOSTRACIÓN. La relación es reflexiva ya que $\det_{\mathcal{B}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}} = \det \operatorname{Id} = 1$.

La relación es simétrica pues ${}_{\mathcal{C}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{C}}^{-1}$ por lo que sus determinantes tienen igual signo.

Si $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \mathcal{R} \mathcal{D}$, entonces

$$\det_{\mathcal{B}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{D}} = \det({}_{\mathcal{B}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{C}} {}_{\mathcal{C}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{D}}) = \det_{\mathcal{B}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{C}} \det_{\mathcal{C}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{D}} > 0.$$

Finalmente, sea $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V fija, y consideremos $\mathcal{C} = \{-e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Sea $\mathcal{D}$ una base cualquiera. Entonces

$${}_{\mathcal{C}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{D}} = {}_{\mathcal{C}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} {}_{\mathcal{B}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{D}},$$

por lo que $\det_{\mathcal{C}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{D}} = -\det_{\mathcal{B}} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{D}}$. Luego, $\mathcal{D}$ está relacionada o bien con $\mathcal{B}$ o bien con $\mathcal{C}$, por lo que $[\mathcal{B}]$ y $[\mathcal{C}]$ son las únicas clases de equivalencia. $\square$

DEFINICIÓN 8.51. Dar una *orientación* al espacio vectorial V es elegir una clase de equivalencia en el conjunto de las bases. Diremos que en ese caso V está *orientado*.

EJEMPLO 8.52. En el espacio euclídeo, la elección de un sistema coordenado impone una elección de la orientación del mismo, ver la introducción a la Sección A.2.

Consideremos dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^3$. El producto vectorial $v \wedge w$ (ver Definición A.7 y Observación A.8) fue definido de modo que $\{v, w, v \wedge w\}$ sea una base con la misma orientación que la base canónica.

9. Ejercicios

1. Probar las afirmaciones de la Observación 8.10 y el Corolario 8.11.
2. Probar las afirmaciones de la Observación 8.35.
3. Probar que una matriz triangular superior es invertible si y sólo si sus elementos de la diagonal son distintos de cero. ¿Qué forma tendrá su inversa?
4. Para $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $\bar{A}$ es la matriz dada por $(\bar{A})_{ij} = \overline{a_{ij}}$ para todo i, j , donde $\bar{z}$ es el conjugado de z .

- (a) Probar que $\det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}$.
- (b) Una matriz $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ se dice *unitaria* si $QQ^* = I$, donde $Q^* = \overline{Q}^t$. Probar que si Q es unitaria entonces $|\det(Q)| = 1$.

5. Si $c_0, \dots, c_n$ son elementos distintos de $\mathbb{R}$, definimos $T : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $T(f) = (f(c_0), \dots, f(c_n))$. Sea $\mathcal{C}_1$ la base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$ y $\mathcal{C}_2$ la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

- (a) Probar que $M = {}_{\mathcal{C}_2}[T]_{\mathcal{C}_1}$ es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & c_0 & c_0^2 & \cdots & c_0^n \\ 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \cdots & c_n^n \end{pmatrix}$$

Una matriz que tiene esta forma se llama *matriz de Vandermonde*.

- (b) Probar que $\det(M) \neq 0$.
- (c) Probar que $\det(M) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (c_j - c_i)$.

6. Sea $A \in M_{n \times n}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Hallar el determinante de $A + t \text{Id}$.

7. Calcular

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

8. ¿Para qué valores de a la siguiente matriz es invertible?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ a+1 & a_3 & 2 \\ 0 & a-1 & a-1 \end{pmatrix}$$

Calcular la inversa en los casos en que exista.

Apéndice A

Geometría del plano y del espacio

En este apéndice veremos cómo aplicar diferentes conceptos del álgebra lineal al estudio de la geometría del plano y del espacio euclídeos. Asumimos que el lector ha trabajado con vectores libres del plano y del espacio, conceptos que manejaremos con una relativa vaguedad.

1. Geometría del plano

Si en el plano euclídeo consideramos dos rectas perpendiculares, podemos obtener un *sistema de coordenadas* del siguiente modo:

Llamemos Ox y Oy a las rectas consideradas, y O a su intersección. Identificamos Ox y Oy con la recta real $\mathbb{R}$, del siguiente modo: primero orientamos cada una de dichas rectas; en el sentido positivos designamos como el 1 al punto que dista 1 del origen. Por convención, el ángulo formado por los semiejes positivos se recorre de Ox a Oy en sentido anti-horario (ver Figura 1). Obsérvese que asumimos la existencia de una distancia en el plano.

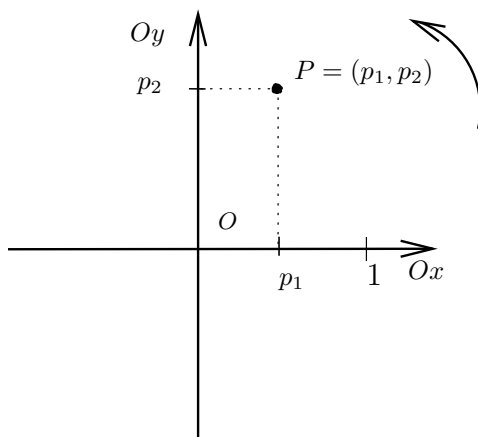


FIGURA 1. El plano visto como $\mathbb{R}^2$.

Asociamos a P un elemento $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ como sigue: p_1 será la proyección ortogonal de P sobre la recta Ox , y p_2 la proyección ortogonal de P sobre Oy . Diremos que (p_1, p_2) son las *coordenadas* del punto P (en el *sistema de coordenadas* Ox, Oy). Los axiomas de Euclides nos garantizan que la correspondencia que asocia a P sus coordenadas es una función biyectiva entre el plano y $\mathbb{R}^2$. A partir de este momento identificaremos entonces un punto del plano con el correspondiente elemento de $\mathbb{R}^2$.

Dados dos puntos del plano $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ consideramos el vector $v = Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2) \in \mathbb{R}^2$. Obsérvese que si bien la dirección de este vector no depende del orden en que consideramos los puntos, su sentido sí depende de esta elección.

En cuando al módulo del vector $Q - P$, recordemos que está dado por la longitud del segmento que une P con Q . Para calcular dicha longitud a partir de las coordenadas de P y Q , alcanza con aplicar el teorema de Pitágoras:

$$\|P - Q\| = d(A, P) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}.$$

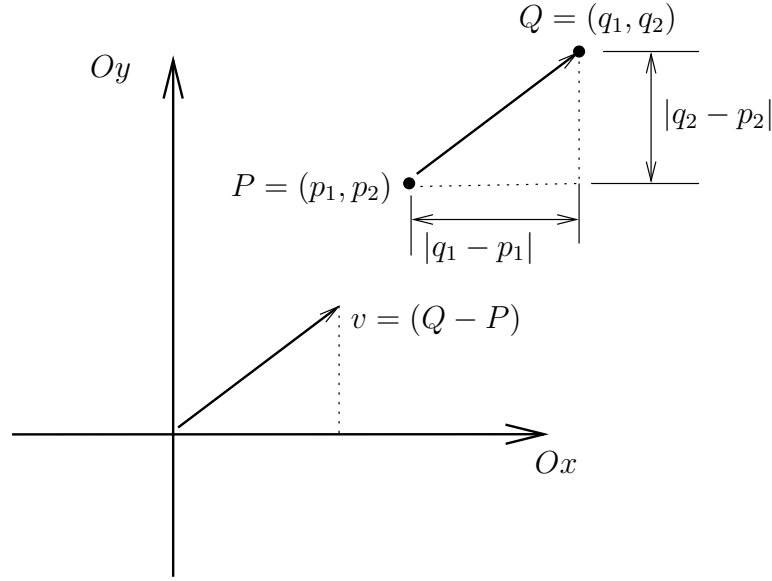


FIGURA 2. Puntos y vectores en el plano.

NOTACIONES

- Notaremos los puntos del plano con letras mayúsculas y los vectores libres con letras minúsculas.
- La resta $Q - P$ entre dos puntos da lugar a un vector (ver Figura 2).
- La suma de un punto P y un vector v da lugar al punto Q tal que $Q - P = v$.

Sea ahora $r \subset \mathbb{R}^2$ la recta que une P con Q . Un punto $A = (x, y) \in r$ determina el vector $A - P$, de coordenadas $(x - p_1, y - p_2)$. Si pensamos al vector $A - P$ con punto de aplicación P , dicho vector tiene dirección la recta r y sentido el de P a A . Deducimos entonces que $A - P$ es colineal con $Q - P$, por lo que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $A - P = t(Q - P)$. despejando, obtenemos que $A = P + t(Q - P)$, lo que en coordenadas da la siguiente ecuación

$$A = (x, y) \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = p_1 + t(q_1 - p_1) \\ y = p_2 + t(q_2 - p_2) \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

El razonamiento hecho para deducir la ecuación (A.1.1) puede generalizarse para la recta l que pasa por el punto $P = (a, b)$ de dirección dada por un vector $v = (v_1, v_2) \in$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, obteniendo:

$$A = (x, y) \in l \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases} \quad (\text{A.1.2})$$

Antes de seguir estudiando la ecuación de la recta, estudiaremos el ángulo entre dos rectas l y s que pasan por el punto $P = (p_1, p_2)$, de direcciones $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$ respectivamente. Sea $A = P + v = (p_1 + v_1, p_2 + v_2) \in \mathbb{R}^2$ el punto del plano tal que $A - P$ es el vector v , y $B = P + w = (p_1 + w_1, p_2 + w_2)$ el punto tal que $B - P$ es el vector w . El ángulo θ entre l y s es el ángulo $\widehat{APB}$ en el vértice P del triángulo APB .

El teorema del coseno nos dice que

$$\|A - B\|^2 = \|A - P\|^2 + \|B - P\|^2 - 2\|A - P\|\|B - P\|\cos\theta,$$

lo que en coordenadas nos da:

$$\begin{aligned} \left\| (p_1 + v_1) - (p_1 + w_1), (p_2 + v_2) - (p_2 + w_2) \right\|^2 = \\ \left\| (v_1, v_2) \right\|^2 + \left\| (w_1, w_2) \right\|^2 - 2\left\| (v_1, v_2) \right\| \left\| (w_1, w_2) \right\| \cos\theta \end{aligned}$$

Despejando obtenemos que

$$\cos\theta = \frac{2v_1w_1 + 2v_2w_2}{2\|v\|\|w\|}. \quad (\text{A.1.3})$$

La ecuación (A.1.3) nos lleva a definir el siguiente concepto.

DEFINICIÓN A.1. Dados dos vectores $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, definimos el *producto escalar* de v con w como

$$\langle v, w \rangle = v_1w_1 + v_2w_2.$$

OBSERVACIÓN A.2. (1) La ecuación (A.1.3) dice que $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos\theta$, con θ el ángulo formado por dos rectas l y s de dirección v y w respectivamente, que pasan por un punto en común P .

(2) En el caso en que $v = w$, tenemos que $\langle v, v \rangle = \|v\|^2$.

(3) Cálculos explícitos (que dejamos como ejercicio al lector) permiten probar producto escalar es lineal en cada una de las variables, es decir que para todo $v, v', w \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \alpha v + \beta v', w \rangle &= \alpha \langle v, w \rangle + \beta \langle v', w \rangle \\ \langle w, \alpha v + \beta v' \rangle &= \alpha \langle w, v \rangle + \beta \langle w, v' \rangle \end{aligned}$$

(4) La noción de producto escalar puede generalizarse a espacios vectoriales reales y complejos, obteniendo de ese modo una noción de “ángulo entre vectores”. Esta generalización cae fuera del alcance de este primer curso — ver sin embargo la Definición A.5 más adelante para el caso de $\mathbb{R}^3$.

1.1. Ecuación de la recta en el plano.

Sea $r \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por los puntos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$, y sea $v = (v_1, v_2) = Q - P$. La ecuación (A.1.1) — o equivalentemente la ecuación (A.1.2) — se denomina la *ecuación paramétrica de la recta r*. Recordémosla:

$$A = (x, y) \in l \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases} \quad (\text{A.1.4})$$

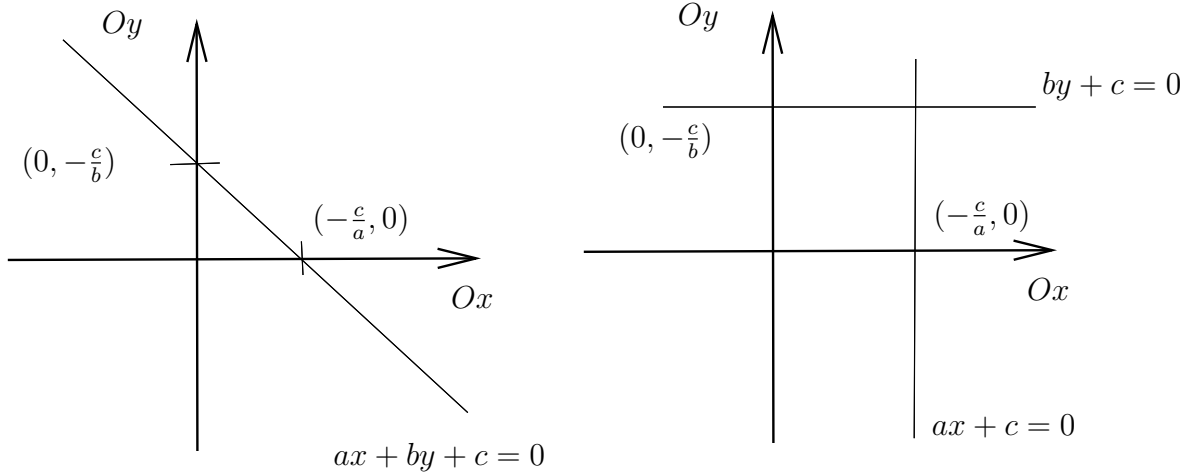


FIGURA 3. Ecuación cartesiana de la recta en el plano.

Hemos visto cómo obtener esta ecuación a partir de las coordenadas de P y Q .

Nuestro objetivo es encontrar una ecuación no paramétrica (es decir que no presente parámetros) que determine los puntos de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertenecen a la recta r . Para ello “eliminamos” el parámetro t de la ecuación (A.1.4).

Los números reales v_1 y v_2 no pueden ser simultáneamente cero, pues en ese caso $P = Q$ (y no queda determinada una recta). Si $v_1 \neq 0$, entonces $t = \frac{x-p_1}{v_1}$. Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $y = p_2 + \frac{x-p_1}{v_1}v_2$, de donde

$$(x, y) \in r \iff v_1(y - p_2) = v_2(x - p_1) \quad (\text{A.1.5})$$

o equivalentemente,

$$(x, y) \in r \iff v_2x - v_1y + v_2p_1 - v_1p_2 = 0 \quad (\text{A.1.6})$$

Si $v_1 \neq 0$, un razonamiento análogo permite obtener la misma ecuación.

Consideremos ahora la ecuación

$$ax + by + c = 0 \quad (\text{A.1.7})$$

donde a y b no son simultáneamente iguales a cero. Afirmamos que los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que verifican esta ecuación conforman una recta del plano, Ver Figura 3.

En efecto, supongamos primeramente que a, b y c son no nulos. En ese caso, el punto $P = (-\frac{c}{a}, 0)$ es la única solución de (A.1.7) perteneciente al eje Ox , y del mismo modo $Q = (0, -\frac{c}{b}) \in Oy$ es el único punto de Oy solución de (A.1.7). Debemos entonces probar que el conjunto solución es la recta que pasa por P y Q . Dicha recta tiene dirección

$(\frac{c}{a}, -\frac{c}{b})$, o lo que es lo mismo, dirección $(b, -a)$. Sustituyendo $P = (-\frac{c}{a}, 0)$ y $v = (b, -a)$ en (A.1.6), deducimos que la recta por P y Q tiene ecuación $ax + by + c = 0$.

Para el caso general, observemos que como a y b no son simultáneamente nulos, tiene sentido considerar o bien el punto $(-\frac{c}{a}, 0)$ o bien $(0, -\frac{c}{b})$, por lo que encontramos una solución particular de la ecuación (A.1.7). Afirmamos que las soluciones de la misma conforman la recta que pasa por el punto encontrado, de dirección $(b, -a)$. Para probar esta afirmación basta repetir el razonamiento hecho anteriormente.

La ecuación (A.1.7) se denomina *ecuación cartesiana de la recta*. Antes de obtener una interpretación geométrica de los coeficientes de la ecuación cartesiana de la recta interpretemos esta ecuación en términos de transformaciones lineales.

OBSERVACIÓN A.3. Un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede verse como las ecuaciones que verifican los puntos que pertenecen a cierto subespacio de $\mathbb{R}^n$. En efecto, es posible asociar al sistema una matriz A de modo que las soluciones sean el núcleo de la transformación lineal $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$: dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases} \quad (\text{A.1.8})$$

entonces $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es solución de (A.1.8) si y solamente si $(x_1, \dots, x_n) \in N(L_A)$, con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Más aún, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= c_m \end{cases} \quad (\text{A.1.9})$$

si y sólo si $(x_1, \dots, x_n) \in L_A^{-1}(c_1, \dots, c_m)$, de donde las soluciones del sistema (A.1.9) son dadas por $P + N(L_A)$, donde P es una solución particular del sistema.

OBSERVACIÓN A.4. La observación A.1.8 lleva a la siguiente interpretación de la ecuación cartesiana de una recta.

Dar una recta que pasa por el origen es equivalente a considerar el núcleo de una funcional lineal no nula $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Dos tales funcionales $f_1, f_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$, $f_1(x, y) = a_1x + b_1y$, $f_2(x, y) = a_2x + b_2y$ dan lugar al mismo núcleo si y solamente si son colineales. En término de las ecuaciones cartesianas de la recta, tenemos que las soluciones de las ecuaciones $a_1x + b_1y = 0$ y $a_2x + b_2y = 0$ conforman la misma recta si y solamente si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(a_2, b_2) = \alpha(a_1, b_1)$.

Vemos entonces que tomar funcionales colineales se corresponde con tomar diferentes vectores a los efectos de establecer la dirección de la misma recta.

Profundizando el análisis anterior, llegamos que dos ecuaciones $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ dan lugar a rectas paralelas si existe α tal que $(a_2, b_2) = \alpha(a_1, b_1)$. Las rectas coinciden si además $c_2 = \alpha c_1$, ver Figura 4.

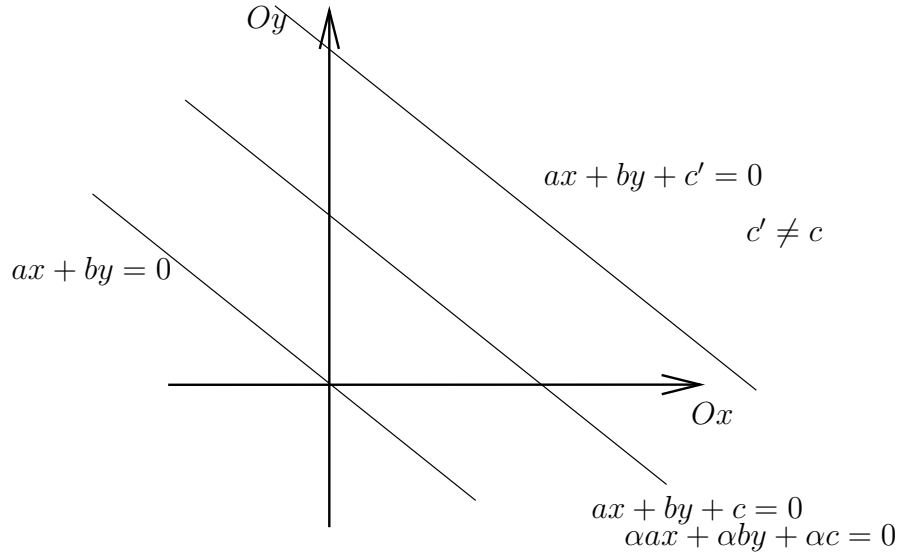


FIGURA 4. Ecuación cartesiana de la recta en el plano. Rectas paralelas.

Veamos ahora otra interpretación de la ecuación cartesiana de una recta en el plano euclídeo. Consideremos la recta r que pasa por el punto $P = (p_1, p_2)$, de dirección dada por el vector $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Sea $n = (n_1, n_2)$ perpendicular a v ; si ℓ es la recta por P de dirección n , entonces r es la recta perpendicular a ℓ por P .

Tenemos entonces que el punto $A = (x, y)$ pertenece a r si y solamente si $A - P$ es perpendicular a n . Deducimos entonces que la ecuación de la recta r está dada por

$$\langle (x - p_1, y - p_2), (n_1, n_2) \rangle = 0$$

es decir

$$n_1x + n_2y = n_1p_1 + n_2p_2 \quad (\text{A.1.10})$$

La relación entre las ecuaciones (A.1.6) y (A.1.10) es inmediata, una vez que se observa que $(v_2, -v_1)$ es un vector perpendicular a v , ver Figura 5.

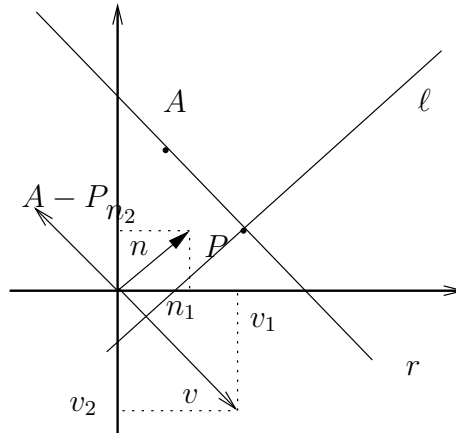


FIGURA 5. Ecuación cartesiana de la recta. Rectas perpendiculares.

1.2. Distancia de un punto a una recta.

Dada una recta r de ecuación $ax + by = c$ y un punto $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$, queremos establecer la distancia del punto Q a la recta r . Ésta se define como la longitud del segmento PQ , donde P es el punto de corte de r con la perpendicular a r que pasa por Q , ver Figura 6.

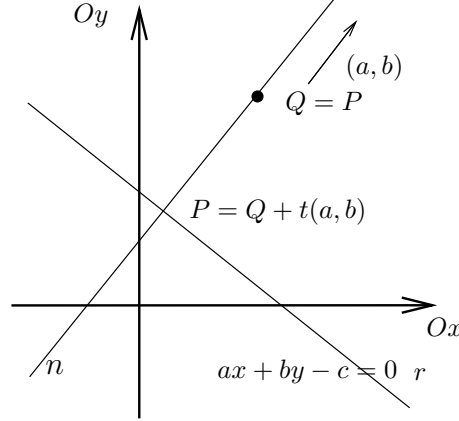


FIGURA 6. Distancia de un punto a una recta.

Para calcular la ecuación de la recta n perpendicular a r por Q observamos que la recta n tiene dirección (a, b) , por lo que tiene ecuación

$$n) \quad \begin{cases} x = q_1 + ta \\ y = q_2 + tb \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1.11})$$

Para encontrar el punto P , intersección de n con r , hallamos el valor del parámetro t correspondiente a P , sustituyendo el valor de (x, y) dado por la ecuación (A.1.11) en la ecuación cartesiana de n :

$$a(q_1 + ta) + b(q_2 + tb) = c$$

de donde obtenemos que $t = \frac{c - aq_1 - bq_2}{a^2 + b^2}$. La longitud del segmento PQ es entonces

$$\begin{aligned} \|Q - P\| &= \left\| \left(q_1 - q_1 + \frac{c - aq_1 - bq_2}{a^2 + b^2}a, q_2 - q_2 + \frac{c - aq_1 - bq_2}{a^2 + b^2}b \right) \right\| = \\ &= \left\| \frac{c - aq_1 - bq_2}{a^2 + b^2} (a, b) \right\| = \left| \frac{c - aq_1 - bq_2}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2} = \\ &= \left| \frac{c - aq_1 - bq_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \frac{|aq_1 + bq_2 - c|}{\|(a, b)\|}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.12})$$

2. Geometría del espacio

Las mismas consideraciones hechas en la sección anterior nos permiten trabajar en el espacio euclídeo.

En el espacio euclídeo fijamos un origen O y tres rectas por O perpendiculares dos a dos, que notamos Ox, Oy, Oz y llamamos los *ejes coordenados*. Identificamos cada eje con

la recta real orientada (con 0 el origen O). Nuevamente, el 1 de cada eje se corresponde con el punto de la semirrecta positiva tal que dista 1 del origen. Convenimos asimismo que los ejes cumplen la “regla de la mano de derecha”: si cerramos la mano derecha yendo desde el semieje positivo Ox al semieje positivo Oy , entonces el pulgar indica la dirección positiva del eje Oz ¹, ver Figura 7.

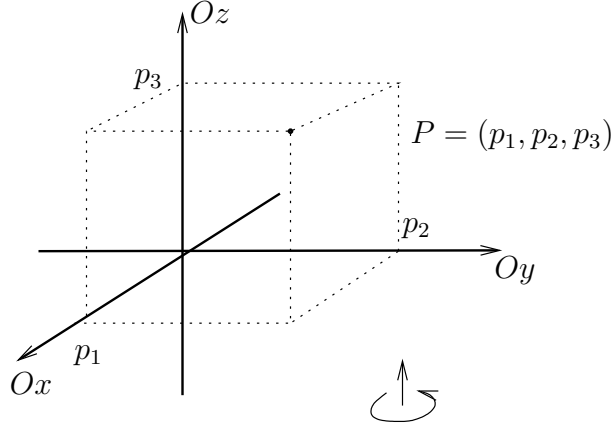


FIGURA 7. El espacio euclídeo visto como $\mathbb{R}^3$.

Dado un punto P del espacio, le asociamos un elemento (p_1, p_2, p_3) de $\mathbb{R}^3$, considerando las proyecciones ortogonales sobre cada uno de los ejes coordenados según el plano determinado por los otros dos. Así, p_1 es la proyección de P sobre el eje Ox según el plano determinado por Oy y Oz (la intersección del plano paralelo al plano yOz por P con la recta Ox).

Nuevamente, notaremos los puntos del espacio con letras mayúsculas y los vectores libres con letras minúsculas, identificándolos con un vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Dos puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ determinan el vector

$$Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3),$$

y un vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ sumado al punto P determina el punto R tal que $R - P = v$.

La longitud del segmento PQ es igual a la norma del vector $Q - P$:

$$d(P, Q) = \|Q - P\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}.$$

Del mismo modo que en el plano, el ángulo que conforman las direcciones de dos vectores puede calcularse en términos de sus coordenadas.

DEFINICIÓN A.5. Sean $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ dos vectores del espacio. Definimos el *producto escalar* entre v y w como

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

OBSERVACIÓN A.6. (1) Es fácil probar que el producto escalar es lineal en ambas variables, es decir

$$\langle av + v', bw + w' \rangle = ab\langle v, w \rangle + a\langle v, w' \rangle + b\langle v', w \rangle + \langle v', w' \rangle \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, v, v', w, w' \in \mathbb{R}^3.$$

¹La necesidad de estas convenciones está relacionada con el concepto de orientación de las bases de un espacio vectorial, ver Definición 8.51.

(2) Es claro que además el producto escalar es simétrico, es decir

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^3.$$

(3) Si $v \in \mathbb{R}^3$, entonces $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.

(4) Considerando el plano que determinan v y w (asumiendo el mismo punto de apoyo), puede mostrarse que si θ es el ángulo determinado por las direcciones de v y w , entonces

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \theta.$$

Nuevamente, v y w determinan direcciones perpendiculares si y solamente si su producto escalar es cero.

2.1. Ecuación de la recta en el espacio.

La recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ de dirección determinada por el vector $v = (v_1, v_2, v_3) \neq (0, 0, 0)$ tiene *ecuación paramétrica*

$$A = (x, y, z) \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \\ z = p_3 + tv_3 \end{cases} \quad (\text{A.2.1})$$

Del mismo modo que antes, la ecuación paramétrica de la recta r que une dos puntos P y Q puede calcularse considerando el vector $v = Q - P$:

$$A = (x, y, z) \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = p_1 + t(q_1 - p_1) \\ y = p_2 + t(q_2 - p_2) \\ z = p_3 + t(q_3 - p_3) \end{cases} \quad (\text{A.2.2})$$

Veamos cómo hallar la *ecuación cartesiana de la recta*. Del mismo modo que para el caso plano, el vector v es no nulo, por lo que podemos suponer que $v_1 \neq 0$ (los otros casos se resuelven de modo análogo, obteniendo ecuaciones similares). Eliminamos entonces de la ecuación (A.2.1) el parámetro t , obteniendo la ecuación

$$A = (x, y, z) \in r \iff \begin{cases} y = p_2 + \frac{x-p_1}{v_1}v_2 \\ z = p_3 + \frac{x-p_1}{v_1}v_3 \end{cases}$$

de donde

$$A = (x, y, z) \in r \iff \begin{cases} v_1(y - p_2) = v_2(x - p_1) \\ v_1(z - p_3) = v_3(x - p_1) \end{cases} \quad (\text{A.2.3})$$

La ecuación (A.2.3) puede interpretarse como la intersección de dos planos, como veremos en la sección siguiente.

2.2. Ecuación del plano en el espacio.

A continuación veremos cómo generalizar los razonamientos realizados hasta ahora para obtener la ecuación de un plano en el espacio. Posteriormente, utilizaremos la nueva información para obtener una interpretación geométrica de la ecuación cartesiana de la recta.

Un plano π está determinado por dos rectas que se cortan en un punto P . Si $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ son vectores con la dirección de las rectas, entonces la ecuación paramétrica del plano π está dada por

$$A = (x, y, z) \in \pi \iff \exists t, s \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = p_1 + tv_1 + sw_1 \\ y = p_2 + tv_2 + sw_2 \\ z = p_3 + tv_3 + sw_3 \end{cases} \quad (\text{A.2.4})$$

Si el plano está determinado por tres puntos no colineales $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $S = (s_1, s_2, s_3)$, entonces podemos considerar los vectores $Q - P$ y $S - P$ y así obtener la ecuación

$$A = (x, y, z) \in \pi \iff \exists t, s \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = p_1 + t(q_1 - p_1) + s(s_1 - p_1) \\ y = p_2 + t(q_2 - p_2) + s(s_2 - p_2) \\ z = p_3 + t(q_3 - p_3) + s(s_3 - p_3) \end{cases} \quad (\text{A.2.5})$$

ver la Figura 8.

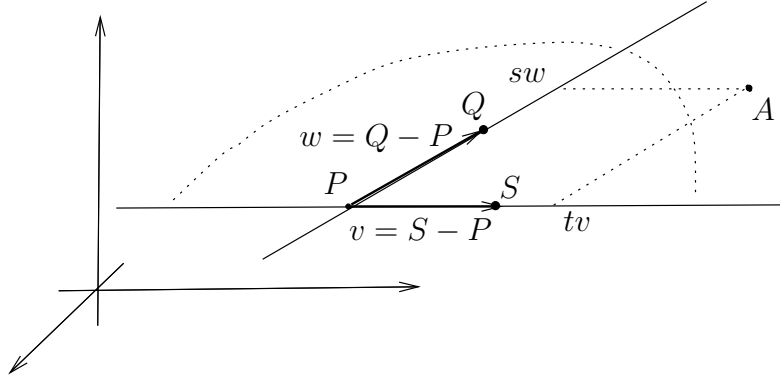


FIGURA 8. El plano en el espacio euclídeo.

Nuevamente, para obtener una ecuación libre de parámetros, podemos eliminarlos de la ecuación (A.2.4). Para ello observemos que como los vectores v y w no son colineales, son linealmente independientes, por lo que si $A = (x, y, z) \in \pi$, existen únicos $t, s \in \mathbb{R}$ tales que se verifica (A.2.4). Sería entonces posible realizar cálculos similares a los del caso de una recta. Sin embargo, resulta más simple generalizar el razonamiento que dio lugar a la ecuación (A.1.10).

Para ello, definiremos primero una nueva operación entre vectores del espacio.

DEFINICIÓN A.7. Sean $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ dos vectores del espacio. Definimos el *producto vectorial* de v con w como el vector

$$v \wedge w = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).$$

OBSERVACIÓN A.8. (1) Es fácil ver que el producto vectorial $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es bilineal, es decir lineal en ambas variables:

$$(av + v') \wedge (bw + w') = ab(v \wedge w) + a(v \wedge w') + b(v' \wedge w) + v' \wedge w' \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, v, v', w, w' \in \mathbb{R}^3.$$

(2) El producto vectorial de vectores es antisimétrico, es decir

$$v \wedge w = -(w \wedge v) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^3.$$

(3) Es posible dar una interpretación geométrica del producto vectorial entre dos vectores v y w : el producto vectorial $v \wedge w$ es el vector de dirección perpendicular al plano determinado por v y w , con $\|v \wedge w\| = \|v\|\|w\| \sin \theta$, con θ el ángulo que forman las direcciones de v y w , y sentido determinado por la “regla de la mano derecha”. En particular, v, w son colineales si y sólo si $v \wedge w = 0 \in \mathbb{R}^3$. Observemos que $\|v\|\|w\| \sin \theta$ es el área del paralelogramo determinado por v y w .

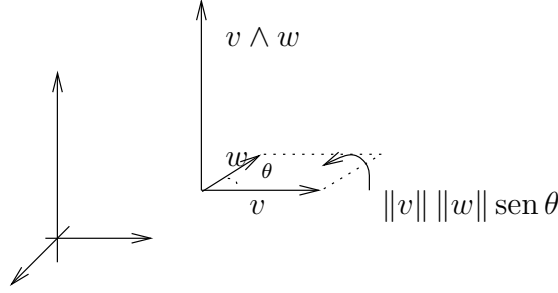


FIGURA 9. Producto vectorial de dos vectores.

DEFINICIÓN A.9. Dados 3 vectores v, w, s del espacio, el *producto mixto* de v, w, s se define como

$$(v, w, s) = \langle v \wedge w, s \rangle$$

Es fácil ver que el producto mixto es igual al determinante de la matriz cuyas filas son v, w, s :

$$(v, w, s) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN A.10. El producto mixto de 3 vectores $v, w, s \in \mathbb{R}^3$ da el valor del paralelepípedo determinado por ellos. En efecto,

$$(v, w, s) = \langle v \wedge w, s \rangle = \|v \wedge w\| \|s\| \cos \alpha = \|v\| \|w\| \sin \theta \|s\| \cos \alpha$$

donde θ es el ángulo que forman v con w y α al ángulo que forman s con $v \wedge w$, ver figura 10,

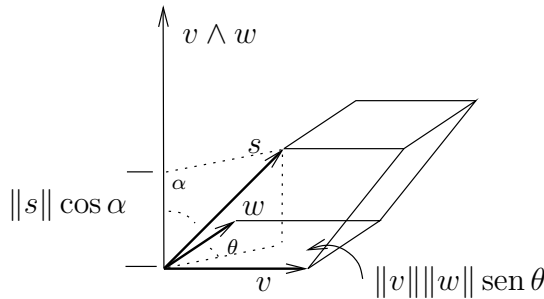


FIGURA 10. Producto mixto de los vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Estamos en condiciones ahora de determinar la *ecuación cartesiana del plano* π determinado por el punto P y los vectores v, w . Dicho plano puede verse como el plano perpendicular al vector $v \wedge w$ que pasa por el punto P , ver Figura 11. Luego, $A = (x, y, z)$ es un punto del plano π si y solamente si $A - P$ es perpendicular al vector $v \wedge w = (n_1, n_2, n_3)$, es decir

$$A = (x, y, z) \in \pi \iff \langle v \wedge w, A - P \rangle = 0, \quad (\text{A.2.6})$$

lo que en coordenadas se expresa como

$$A = (x, y, z) \in \pi \iff n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0.$$

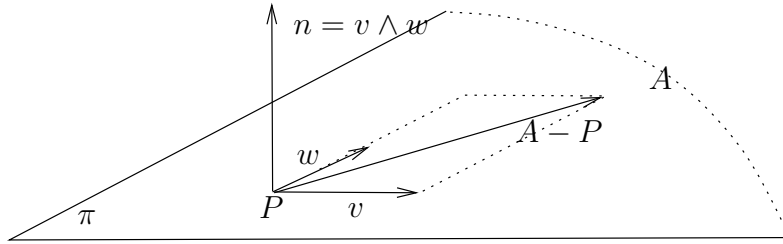


FIGURA 11. Producto mixto de los vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

La ecuación (A.2.6) puede expresarse como $(v, w, P - A) = 0$ (producto mixto). Operando llegamos a

$$A = (x, y, z) \in \pi \iff n_1x + n_2y + n_3z - n_1p_1 - n_2p_2 - n_3p_3 = 0 \quad (\text{A.2.7})$$

Observemos que la ecuación (A.2.7) es de hecho la ecuación de un plano perpendicular a la dirección de (n_1, n_2, n_3) por el punto P . Para obtener la ecuación del plano determinado por P, v y w , basta recordar que

$$(n_1, n_2, n_3) = v \wedge w = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).$$

OBSERVACIÓN A.11. Recíprocamente, es fácil ver que los puntos del espacio que son solución del sistema

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{A.2.8})$$

conforman un plano perpendicular al vector (a, b, c) . Para determinar el plano alcanza con hallar un punto en particular de él.

En particular, dos planos de ecuaciones $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ respectivas son paralelos si y solamente si $(a', b', c') = \alpha(a, b, c)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Los planos coinciden si además $d' = \alpha d$ (cf. Observación A.3). En otras palabras, el vector (a, b, c) determina la dirección del plano, y d permite determinar el mismo, ya que permite hallar un punto concreto del plano.

2.3. La recta como intersección de dos planos.

Dos planos distintos que se cortan lo hacen según una recta. Sean entonces π y π' dos planos de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ respectivamente, que se cortan en una recta — este hecho se detecta en las ecuaciones por el hecho que (a, b, c)

y (a', b', c') no son colineales. Entonces la recta $r = \pi \cap \pi'$ está dada por la ecuación cartesiana:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2.9})$$

Dada la ecuación (A.2.9), es posible encontrar la dirección de la recta r . En efecto, (a, b, c) y (a', b', c') son vectores perpendiculares a los planos que determinan r , luego r es perpendicular a ambos vectores. Entonces la recta r tiene dirección $(a, b, c) \wedge (a', b', c')$, ver Figura 12.

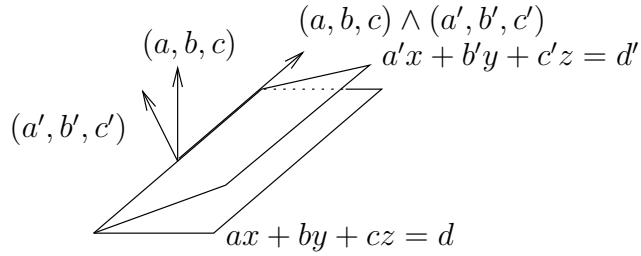


FIGURA 12. La recta como intersección de dos planos.

Consideremos ahora una recta r ; nos interesamos en los planos que la contienen. Es claro que hay infinitos de estos. Supongamos que la recta r tiene ecuación (A.2.9), y sea $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ la ecuación de un plano π . Es claro que $r \subset \pi$ si y sólo si toda solución de (A.2.9) verifica la ecuación de π . Luego, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el plano de ecuación

$$(\alpha a + \beta a')x + (\alpha b + \beta b')y + (\alpha c + \beta c')z + \alpha d + \beta d' = 0 \quad (\text{A.2.10})$$

contiene a la recta r . Afirmamos que de este modo obtenemos todos los planos que contiene a r . La ecuación (A.2.10) se denomina la ecuación del *haz de planos (que pasan) por la recta r*. En efecto, sea $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ la ecuación de un tal plano. Entonces (a'', b'', c'') es perpendicular a la dirección de r . Si probamos que (a, b, c) y (a', b', c') son una base del subespacio de los vectores perpendiculares a r el resultado se deduce de inmediato.

La afirmación restante es una consecuencia directa del siguiente lema:

LEMA A.12. *Sea $n \in \mathbb{R}^3$ un vector no nulo. Entonces el conjunto de los vectores perpendiculares a v es un subespacio vectorial de dimensión 2.*

DEMOSTRACIÓN. La función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(w) = \langle v, w \rangle$ es una funcional lineal. Como $f(v) = \|v\|^2 \neq 0$, f es no nula, luego sobreyectiva. Deducimos entonces que $\dim N(f) = 2$. $\square$

OBSERVACIÓN A.13. Observemos que si consideramos los planos de ecuación $(a + \lambda a')x + (b + \lambda b')y + (c + \lambda c')z + d + \lambda d' = 0$, obtenemos todos los planos que contienen a r salvo el plano de ecuación $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

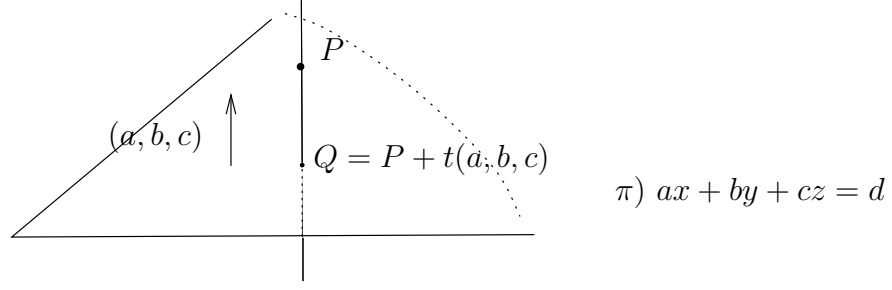


FIGURA 13. Distancia de un punto al plano.

2.4. Distancia de un punto al plano.

Del mismo modo que en el caso del plano euclídeo, es posible determinar la distancia de un punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ al plano π de ecuación $ax + by + cz + d = 0$, ver Figura 13.

Primero observamos que la recta perpendicular a π por P tiene dirección (a, b, c) . Luego, queremos hallar $t \in \mathbb{R}$ tal que el punto $(p_1 + ta, p_2 + tb, p_3 + tc) \in \pi$, es decir buscamos t tal que

$$a(p_1 + ta) + b(p_2 + tb) + c(p_3 + tc) + d = 0.$$

Despejando, obtenemos $t = \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$ (nótese que el denominador es no nulo).

La distancia de p a π está dada entonces por

$$\begin{aligned} d(P, \pi) &= \|(P + t(a, b, c)) - P\| = \left\| \left(P + \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c) \right) - P \right\| = \\ &= \left\| \left(\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c) \right) \right\| = \left| \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \|(a, b, c)\| = \\ &= \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\|(a, b, c)\|} \end{aligned} \tag{A.2.11}$$

OBSERVACIÓN A.14. Procedimientos similares permiten obtener otras distancias. Por ejemplo, la distancia de un punto P a una recta r puede obtenerse intersectando la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por P ; llamando Q a dicho punto, tenemos que $d(P, r) = \|Q - P\|$.

3. Ejercicios

1. (a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (2, -1)$ que es paralela a la recta que pasa por los puntos $Q = (2, 0)$ y $R = (1, 3)$.
- (b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $r : 3x - 4y + 1 = 0$ y pasa por el punto $P = (1, 0)$.
- (c) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al vector $w = (2, 1)$ y que corta a la recta $r : y = x - 2$ en el punto de ordenada 3.

2. Hallar un punto P sobre la recta $r : -3x + 4y + 1 = 0$, tal que la recta que contiene al segmento OP (O : origen de coordenadas) pase por el punto medio del segmento AB , siendo $A = (2, 1)$ y $B = (1, 1)$.

3. Dados los puntos $A = (3, 6)$ y $B = (1, 0)$ y la recta $r : x - y + 1 = 0$, hallar

1. El simétrico de A respecto a B .
2. El simétrico de B respecto a r .

4. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (3, 4)$.

5. Calcular la distancia entre las rectas paralelas $r : 3x + 4y - 15 = 0$ y $s : 3x + 4y = 40$.

6. Hallar un punto de la recta $r : x + y - 2 = 0$ que equidista de los puntos $A = (1, 3)$ y $B = (1, 1)$.

7. Hallar el valor de k par que los puntos $A = (2, -1)$, $B = (1, 4)$ y $C = (k, 9)$ estén alineados.

8. Hallar el valor de a y b par que las rectas $r : ax - y + 2 = 0$ y $s : bx + 6y - 9 = 0$ sean perpendiculares y además la segunda recta pase por el punto $P = (1, 1)$.

9. Hallar el valor de $q \in \mathbb{R}$ para que las rectas $r : qx - 2y + 4 = 0$ y $s : x + (q - 3)y - 7 = 0$ sean paralelas.

10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas

$$\begin{aligned} r : \quad 2x + y &= 0 \\ s : \quad x - y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

y es perpendicular a la recta $t : \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$.

11. Determinar los valores de m y n sabiendo que la recta $r : 2x + ny = 0$ pasa por el punto $P = (1, 2)$ y es paralela a la recta $s : mx - 2y + 3 = 0$.

12. Demuestre que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ verifican $v \cdot u = w \cdot u$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$ si y sólo si $v = w$.

13. (a) Demuestre que para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. Interpretar geoméricamente el resultado anterior.

(b) Demuestre que para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$: $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$. Interpretar geoméricamente el resultado anterior.

14. Demuestre que para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$: $-\|v - w\| \leq \|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|$.

15. Sean u, v dos vectores en $\mathbb{R}^3$.

(a) Hallar $\|v\|$ sabiendo que: $\widehat{uv} = \pi/4$, $\|u\| = 3$, $(u - v) \perp u$.

(b) Hallar $\|v\|$ y $\|v + u\|$ sabiendo que: $\widehat{uv} = \pi/4$, $\|u\| = 3$, $(\widehat{u+v})u = \pi/6$.

16. Dados los vectores u_0 y v , $u_0 \neq 0$, se define el vector $w = \frac{u_0 \cdot v}{\|u_0\|^2} u_0$.

(a) Probar que $(v - w) \perp u_0$.

(b) Probar que para todo λ real se cumple: $\|v - \lambda u_0\|^2 = \|v - w\|^2 + \|w - \lambda u_0\|^2$.

17. Sea $u, v \in \mathbb{R}^3$. Probar que $\|u \wedge v\|^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.

Deducir que si $u \perp v$ entonces $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\|$.

18. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Probar que $|u \cdot v| = \|u\|\|v\|$ si y sólo si $\{u, v\}$ es linealmente dependiente.

19. Investigar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales.

- (a) $A = \{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$.
- (b) $B = \{(1, 0, 1), (2, 1, -2), (1, 2, 4)\}$.
- (c) $C = \{(1, 1, 0), (1, -1, 1), (-1, 1, 2)\}$.
- (d) $D = \{(0, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$.

20. Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$. Probar que si $v \perp w$ entonces $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

21. En cada caso hallar $u \cdot v$, $u \wedge v$, $\|u\|$, $\|v\|$ y $\|u \wedge v\|$.

- (a) $u = (2, 3, 1)$ y $v = (1, -1, 0)$.
- (b) $u = (1, 0, 4)$ y $v = (2, 1, 0)$.
- (c) $u = (2, 0, 5)$ y $v = (0, -2, 0)$.

22. Hallar la ecuación de la recta r sabiendo que:

- (a) Pasa por el punto $P = (1, 2, 5)$ y es paralela al vector $v = (2, 1, 3)$.
- (b) Pasa por los puntos $A = (4, 3, 0)$ y $B = (1, 0, 1)$.
- (c) Pasa por el punto $Q = (-1, 2, 0)$ y es paralela a la recta $s) \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$
- (d) Pasa por el punto $A = (1, 0, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi) 2x + y + 3z = 1$.
- (e) Pasa por el punto $B = (-1, 2, -3)$, se cruza perpendicularmente con la recta $s) \begin{cases} x = -1 + 6\lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$ y se intersecta con la recta $s') \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 - 5\lambda \end{cases}$.
- (f) Pasa por el punto $C = (-4, -5, 3)$ y se intersecta con las rectas $s) \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y $s') \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 1 - 5\lambda \end{cases}$.

23. Hallar la ecuación del plano π sabiendo que:

- (a) Pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es paralelo a los vectores $u = 2e_1 - e_2 + e_3$ y $v = e_1 - e_3$.
- (b) Pasa por los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 3)$ y $C = (1, 1, -2)$.
- (c) Pasa por el punto $Q = (5, 2, 0)$ y es paralelo al plano de la parte anterior.
- (d) Pasa por el punto $M = (1, 1, 1)$ y contiene a la recta r de ecuación general $r) \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$

24. Calcular en los siguientes casos la distancia del punto al plano.

- (a) $M = (-2, -4, 3)$ y $\pi_1) 2x - y + 2z = 0$.
- (b) $O = (0, 0, 0)$ y $\pi_2) 2x + 1 = 0$.

25. Verificar que los siguientes planos son paralelos y hallar la distancia entre ellos.

- (a) $\pi_1) x - 2y - 2z = 12$, $\pi_2) x - 2y - 2z = 6$
 (b) $\pi_1) 2x - 3y + 6z = 14$, $\pi_2) 4x - 6y + 12z = -21$

26. Probar que las siguientes rectas son perpendiculares.

- (a) $r) \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}, s) \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$
 (b) $r) \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}, s) \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 1 - 6\lambda \end{cases}$

27. Se considera las rectas $r)P = A + \lambda v$ y $r')P' = B + \lambda' w$ donde λ y λ' son parámetros reales.

- (a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos PP' con $P \in r$ y $P' \in r'$.
 (b) Decir que representa esta ecuación cuando v y w son colineales.
 (c) Decir que representa esta ecuación cuando v y w no son colineales.

28. Dados los puntos $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 2)$ y $D = (2, 0, 1)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio que:

- (a) equidistan de A y B .
 (b) equidistan de A , B y C .
 (c) equidistan de A , B , C y D .

29. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los planos $2x + y - 1 = 0$ y $x + y + x = 0$.

30. Consideremos los planos definidos por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\pi_1 : x - y &= 2 \\ \pi_2 : x + 3y + 2z &= 2 \\ \pi_3 : -2x + y - z &= 2\end{aligned}$$

Determinar la ecuación del plano π que satisface las siguientes condiciones:

1. π contiene a la recta r , que es la intersección de los planos π_1 y π_2 .
2. π es perpendicular al plano π_3 .

31. Hallar la ecuación de la recta r que satisface las siguientes condiciones:

1. Es perpendicular al plano π que contiene a los puntos $A = (3, 4, 2)$, $B = (-1, 5, 3)$ y $C = (2, 1, 4)$.
2. Pasa por el punto de intersección de la recta $\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{-1}$ con el plano $2x - y - z = 1$.

Apéndice B

Operaciones con matrices

En este apéndice presentamos las operaciones básicas entre matrices (suma, producto, etc.) de un modo explícito.

1. Suma de matrices

Sean $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}, B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in M_{n \times m}(\mathbb{k})$ dos matrices. Entonces $A + B = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in M_{n \times m}(\mathbb{k})$, donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. En otras palabras,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

Obsérvese que sólo es posible sumar matrices con igual cantidad de filas y columnas. Notaremos $(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$.

LA

OBSERVACIÓN B.1. Sean $A, B \in M_{n \times m}(\mathbb{k})$. Si consideramos las correspondientes transformaciones lineales $L_A, L_B, L_{A+B} : \mathbb{k}^m \rightarrow \mathbb{k}^n$, se tiene que $L_A + L_B = L_{A+B}$. La verificación de esa igualdad queda como ejercicio, ver ejercicios 1 y 5.1.

Producto de una matriz por un escalar

Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in M_{n \times m}(\mathbb{k})$ y $\alpha \in \mathbb{k}$. Definimos la matriz $\alpha A = (d_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$, con $d_{ij} = \alpha a_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. En otras palabras,

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}$$

Notaremos $(d_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$.

OBSERVACIÓN B.2. Sean $A \in M_{n \times m}(\mathbb{k})$ y $\alpha \in \mathbb{k}$. Entonces $\alpha L_A = L_{\alpha A} : \mathbb{k}^m \rightarrow \mathbb{k}^n$. La verificación de esa igualdad queda como ejercicio, ver ejercicios 1 y 5.1.

2. Producto de matrices

Sean $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,l}} \in M_{m \times l}(\mathbb{K})$, es decir la cantidad de columnas de A es igual a la cantidad de filas de B . Definimos $AB = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,l}} \in M_{n \times l}(\mathbb{K})$, donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{im}b_{mj}$ para todo $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, l$. En otras palabras,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{ml} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{kl} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^m a_{nk}b_{kl} \end{pmatrix}$$

Notaremos $(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = (\sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,l}}$.

Si llamamos $\beta_1, \dots, \beta_l$ a los vectores de $\mathbb{K}^m$ dados por las columnas de la matriz B , la matriz AB puede escribirse como

$$AB = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_l)$$

OBSERVACIÓN B.3. Sean $A \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{m \times l}(\mathbb{K})$ y la correspondiente matriz $AB \in M_{n \times l}(\mathbb{K})$. Si consideramos las correspondientes transformaciones lineales $L_A : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$, $L_B : \mathbb{K}^l \rightarrow \mathbb{K}^m$ y $L_{AB} : \mathbb{K}^l \rightarrow \mathbb{K}^n$, se tiene que $L_A \circ L_B = L_{AB}$. La verificación de esa igualdad queda como ejercicio, ver ejercicios 1 y 5.1.

3. El álgebra $M_n(\mathbb{K})$

En el caso particular en que las matrices son cuadradas, el producto es asociativo y verifica la propiedad distributiva respecto de la suma.

La matriz $\text{Id} = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$, donde $\delta_{ii} = 1$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, es un neutro para el producto:

$$\text{Id}A = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n} (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \left(\sum_{k=1}^n \delta_{ik}a_{kj} \right)_{i,j=1,\dots,n} = (1a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = A$$

De forma análoga se prueba que $A\text{Id} = A$.

OBSERVACIÓN B.4. (1) Las siguientes propiedades se verifican inmediatamente:

Si $\text{Id}_n \in M_{n \times n}$ es la matriz identidad de tamaño n , entonces $L_{\text{Id}_n} = \text{Id}_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$. En forma parecida si $0_n \in M_{n \times n}$ es la matriz identidad de tamaño n , entonces $L_{0_n} = 0_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$.

(2) El isomorfismo $A \mapsto L_A$ entre las matrices y las transformaciones lineales de los espacios $\mathbb{k}^n$ y las observaciones anteriores, junto con el hecho de que las operaciones de suma producto por un escalar y composición entre transformaciones lineales verifican las propiedades algebraicas usuales entre sumas y productos –conmutativa, asociativa, distributiva, etc.– nos permite concluir que las operaciones entre matrices verifican las mismas propiedades.

Para ilustrar la operatoria entre matrices verificaremos directamente la propiedad asociativa del producto para las matrices $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{k})$. Entonces

$$\begin{aligned} (AB)C &= \left(\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{i,j=1,\dots,n} (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \right) = \left(\sum_{h=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kh} \right) c_{hj} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \\ &= \left(\sum_{k,h=1}^n a_{ik} b_{kh} c_{hj} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{h=1}^n b_{kh} c_{hj} \right) \right)_{i,j=1,\dots,n} = \\ &= (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \left(\sum_{h=1}^n b_{kh} c_{hj} \right)_{k,j=1,\dots,n} = A(BC) \end{aligned}$$

Del mismo modo, se prueba la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} (A+B)C &= (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1,\dots,n} (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \left(\sum_{k=1}^n (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} + b_{ik} c_{kj} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} \right)_{i,j=1,\dots,n} + \left(\sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kj} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \\ &= AC + BC \end{aligned}$$

Debe tenerse presente que el producto de matrices NO es conmutativo, como el siguiente ejemplo lo ilustra:

EJEMPLO B.5. Consideramos en $M_2(\mathbb{k})$ los productos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es un ejercicio fácil ver encontrar ejemplos de matrices $A, B \in M_n(\mathbb{k})$, de tamaño arbitrario $n > 1$, tales que $AB \neq BA$.

OBSERVACIÓN B.6. Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{k}$ -álgebra cualquiera. Se define el *centro del álgebra* — que se denota como

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{c \in \mathcal{A} : ca = ac, \text{ para todo } a \in \mathcal{A}\}.$$

Es claro que el centro del álgebra $\mathcal{A}$ es una *subálgebra*, es decir el neutro de producto y el producto y la suma de dos elementos del centro pertenecen al centro.

Observemos que en el caso de las matrices cuadradas,

$$\alpha A = \alpha(\text{Id}A) = (\alpha \text{Id})A = A(\alpha \text{Id}).$$

De este modo, tenemos un morfismo inyectivo del cuerpo $\mathbb{k}$ y la subálgebra $\mathcal{Z}(M_n(\mathbb{k}))$. Se puede probar que $\mathcal{Z}(M_n(\mathbb{k})) = \{\alpha \text{Id} : \alpha \in \mathbb{k}\}$ y de este modo, $\mathcal{Z}(M_n(\mathbb{k}))$ puede identificarse con el cuerpo $\mathbb{k}$.

OBSERVACIÓN B.7. Podemos resumir las propiedades que verifican la suma y el producto de matrices diciendo que las matrices *cuadradas* (es decir con igual número de filas y columnas) forman una $\mathbb{k}$ -álgebra.

Las Observaciones B.1, B.2, B.3 pueden resumirse entonces así:

El mapa $L : M_n(\mathbb{k}) \rightarrow \text{End}(\mathbb{k}^n)$, $L(A) = L_A$, es un isomorfismo de $\mathbb{k}$ -álgebras.

4. Ejercicios

1. Probar las afirmaciones de las observaciones B.1, B.2 y B.3.

Apéndice C

Ejercicios de exámenes

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $f^3 = f$. Definimos $V^+ = \{v \in V : f(v) = v\}$ y $V^- = \{v \in V : f(v) = -v\}$.

- (a) Probar que $V^+ = \text{Im } \frac{1}{2}(f^2 + f)$ y que $V^- = \text{Im } \frac{1}{2}(f^2 - f)$.
- (b) Probar que $V = \text{Ker } f \oplus V^+ \oplus V^-$.

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (-ax + (3a + 1)y - (2a + 1)z, -ax + (3a + 1)y - 2az, -x + y)$, y $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

- (a) Probar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Hallar ${}_B[T]_B$. ¿Para qué valores de a T es invertible?
- (c) Probar que existe un único subespacio S de $\mathbb{R}^3$ generado exactamente por dos vectores de $\mathcal{B}$ y tal que $T(S) \subset S$. Probar que $T(S) = S$ si y sólo si T es invertible. Hallar $T(S)$ cuando T no es invertible.

4. (a) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y $V = S_1 \oplus S_2$ una descomposición en suma directa de subespacios. Sea $T : V \rightarrow V$ lineal tal que $T(S_i) \subset S_i$, $i = 1, 2$. Probar que $T(S_1) = S_1$ si y sólo si $\text{Ker } T \subset S_2$.

(b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica es $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. Sea $S_1 = \text{Im } T$. Probar que $T(S_1) = S_1$ y que existe un único subespacio $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ T -invariante tal que $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$.

5. Se considera el mapa $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(v) = (1, 1, 1) \wedge v$.

- (a) Probar que T es lineal. Hallar ${}_{can}[T]_{can}$ y ${}_B[T]_B$, donde can es la base canónica y $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (1, -1, 0)\}$.
- (b) Hallar $\text{Ker}(T)$ y $\text{Im}(T)$.
- (c) Sea $r \subset \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por $(1, 2, 3)$ y $(-1, 0, 1)$. Hallar sus ecuaciones paramétrica y reducida.
- (d) Hallar $T(r)$ y un plano que contenga a r y $T(r)$.

6. Sea $V = \langle \sin x, \cos x, e^x \rangle \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- (a) Hallar $\dim V$.
- (b) Hallar una base para $S = \{f \in V : f(0) = 0\} \subset V$.
- (c) Hallar la imagen de S por $T : V \rightarrow V$, $T(f) = f'$.
- (d) Calcular $\dim S \cap T(S)$. Probar que $V = S + T(S)$. ¿Es la suma directa?

7. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineal.

- (a) Probar que $T^2 = 0$ si y sólo si $\text{Im}(T) \subset \text{N}(T)$.
- (b) Si $T \neq 0$, entonces $T^2 = 0$ si y sólo si $\text{Im}(T) = \text{N}(T)$.

Suponemos de ahora en más que $T \neq 0$ y $T^2 = 0$.

- (c) Probar que existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbb{R}^2 = \langle v \rangle v \oplus \text{Im}(T)$.
- (d) Si v es como en (c), entonces $T(\langle v \rangle) = \text{Im}(T)$.
- (e) Si v es como en (c) y $0 \neq w \in N(T)$, entonces $\mathcal{B} = \{w, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, y ${}_B[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ para algún $a \in \mathbb{R}^*$.
Deducir que existe una base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que ${}_C[T]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- (f) Dada $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $S \neq 0$, $S^2 = 0$, probar que existe $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ invertible tal que $SU = UT$.
8. (a) Hallar el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 0 & -3 & b & 5 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ discutiendo según $a, b \in \mathbb{R}$.
Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que su matriz asociada en la base canónica es A (es decir $T = L_A$).
- (b) Investigar si existen valores de a, b para los cuales T es invertible.
- (c) Hallar $\dim \text{Im}(T)$ y $\dim N(T)$, discutiendo según a, b .
- (d) Hallar una base de $\mathbb{R}^4 / N(T)$, discutiendo según a, b .
9. (a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (3, 5, 7)$ y es perpendicular al plano α de ecuación $x + y + z = 1$.
- (b) Probar que r es paralela al plano β que pasa por los puntos $(3, -4, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 1, 3)$.
- (c) Calcular la distancia de r a β .
10. Sean V un espacio vectorial y $S_1, S_2 \subset V$ tales que $V = S_1 + S_2$. Se considera el espacio $W = S_1 \times S_2$ y el conjunto $X = \{(-v, v) \in W : v \in S_1 \cap S_2\}$.
- (a) Probar que $X \subset W$ es un subespacio.
- (b) Probar que $T : W \rightarrow V$, $T(v_1, v_2) = v_1 + v_2$, es una transformación lineal sobre-yectiva.
- (c) Probar que T induce una transformación lineal $\hat{T} : W/X \rightarrow V$, tal que $T = \hat{T} \circ \pi$, con $\pi : W \rightarrow W/X$ la proyección canónica.
- (d) Estudiar si $\hat{T}$ es un isomorfismo.
- (e) Probar que T es un isomorfismo si y sólo si $V = S_1 \oplus S_2$.
11. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = (5a - b + 5c)x^2 + (-4a + b - 4c)x - 6a + b - 6c$.
- (a) Hallar una base de $N(T)$.
- (b) Probar que $N(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$ y deducir que $\mathbb{R}_2[x] = N(T) \oplus \text{Im}(T)$.
- (c) Sean $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] / T(p) = p\}$ y $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] / T(p) = -p\}$.
(i) Hallar bases de S_1 y S_2 .
(ii) Probar que $\mathbb{R}_2[x] = N(T) \oplus S_1 \oplus S_2$.
- (d) Hallar bases de $\mathbb{R}_2[x]/N(T)$ y $\mathbb{R}_2[x]/(N(T) \oplus S_1)$.
12. Se define una relación de equivalencia entre las matrices $n \times n$ de la siguiente manera: $A, B \in \mathcal{M}_n$, $A \sim B$ si y sólo si $A = PBP^{-1}$.
- (a) Probar que si $A \sim B$ entonces $\det(A) = \det(B)$.
- (b) Sea $\phi : \mathcal{M}_n / \sim \rightarrow \mathbb{R}[x]$ definida por $\phi([A]) = \det(A - xI)$.
(i) Probar que ϕ está bien definida.
(ii) Probar que $\phi([A]) = \phi([A^t])$.
- (c) Investigar si es posible definir una suma en $\mathcal{M}_n / \sim$ como sigue $[A] + [B] = [A + B]$.

13. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ fijos. Definimos $\phi_{uv} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi_{uv}(w) = u \wedge v \cdot w$ para todo $w \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Probar que $\phi_{uv} \in (\mathbb{R}^3)^*$.
- (b) Hallar u y v para que ϕ_{uv} no sea la función nula.
De ahora en adelante se trabaja con u y v fijos tal que ϕ_{uv} no sea la función nula.
- (c) Hallar una base de $N(\phi_{uv})$.
- (d) Probar que $\{[u \wedge v]\}$ es una base de del espacio cociente $\mathbb{R}^3/N(\phi_{uv})$.

14. Sea V el espacio de las sucesiones reales. Definimos $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\psi(\{x_n\}) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

- (a) Probar que ψ es lineal.
- (b) Hallar $N(\psi)$, $Im(\psi)$.
- (c) Investigar si ψ es inyectiva y sobreyectiva.
- (d) ¿Qué se puede decir de la dimensión de $W = V/N(\psi)$?
- (e) Sean $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ y $z = \{z_n\} \in V$ definidas por $x_n = (-1)^n$, $y_n = 2n$ y $z_n = 2n^2 + 7$. Probar que $\{[x], [y], [z]\}$ es l.d. en W . Escribir explícitamente uno de ellos como combinación lineal de los demás.

15. Se considera $S = \{(x^2 - 1) \cdot q(x) : q(x) \in \mathbb{R}_1[x]\}$ subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$.

- (a) Probar que $\mathcal{A} = \{1, x, x^2 - 1, x^3 - x\}$ es base de $\mathbb{R}_3[x]$ que contiene una base de S .
- (b) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[x]/S$.
- (c) Sea $\phi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformación lineal definida por $\phi(p(x)) = (p(1), p(-1))$. Hallar $M = {}_c[\phi]_{\mathcal{A}}$, donde $\mathcal{C}$ es base canónica de $\mathbb{R}^2$.
- (d) Probar que existe una única $\hat{\phi} : \mathbb{R}_3[x]/S \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineal tal que $\hat{\phi}([p(x)]) = (p(1), p(-1))$.
- (e) Si $\pi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]/S$ es la proyección canónica, hallar $N = {}_B[\pi]_{\mathcal{A}}$ y $P = {}_c[\hat{\phi}]_{\mathcal{B}}$.
- (f) Probar que $\hat{\phi}$ es un isomorfismo.
- (g) Probar que $M = P \cdot N$.

16. Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ y $T : V \rightarrow V$ dada por $T(f) = f + f' + f''$.

- (a) Hallar la matriz $A = {}_B[T]_{\mathcal{B}}$, donde $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.
- (b) Probar que A es invertible.
- (c) Expresar $T^{-1}(1)$, $T^{-1}(x)$, $T^{-1}(x^2)$ y $T^{-1}(x^3)$ como combinación lineal de $\mathcal{B}$.
- (d) Calcular A^{-1} .

17. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(p) = (p(0), p(1), p'(1))$.

- (a) Hallar la matriz asociada a T en las bases $\mathcal{A} = \{x^2, x, 1\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Demostrar que T es un isomorfismo.
- (c) Hallar la matriz asociada a $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ en las bases de (a).
- (d) Sea $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $c_{\mathcal{C}}(v) = (3, 2, -2)$. Hallar $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(q) = v$.

18. (a) Calcular los rangos de L y M .

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Sean S y T transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ representadas en las bases canónicas por las matrices L y M respectivamente. Demostrar que $S(\mathbb{R}^3) \neq T(\mathbb{R}^3)$.
- (c) Sea V un espacio de dimensión ≥ 2 y sean U y W subespacios tales que $U \neq W$, $\dim U = s$, $\dim W = r$, $\dim U \cap W = i$. Si $\mathcal{B}$ es base de $U \cap W$, $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ base de U y $\mathcal{B} \cup \mathcal{D}$ base de W , demostrar que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ es linealmente independiente. Deducir que $i \geq r + s - n$.
- (d) Usando (a), (b) y (c) probar que $\dim S(\mathbb{R}^3) \cap T(\mathbb{R}^3) = 2$.
19. Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$.
- (a) Probar que $\mathcal{B} = \{1, x^2 + 1, x^2 + x - 1, x^3\}$ es base de V .
- (b) Sea $T : V \rightarrow V$ transformación lineal definida por: $T(1) = -x^3 + 1$, $T(x^2 + 1) = 3x^3 + 2x^2 + 5$, $T(x^2 + x - 1) = 2x^3 + 2x^2 + 2x$ y $T(x^3) = x^3 - 1$. Hallar ${}_B[T]_B$ y verificar que $T^2 = 2T$.
- (c) Calcular $N(T)$ y hallar un subespacio A de V tal que $V = A \oplus N(T)$ y $T(A) \subset A$.
- (d) Hallar una base $\mathcal{D}$ de V de modo que ${}_D[T]_D$ sea diagonal.

Apéndice D

El cuerpo de los números complejos

En este apéndice veremos brevemente las propiedades básicas de los números complejos.

Consideremos la ecuación

$$x^2 + 1 = 0, \quad (\text{D.0.1})$$

es decir, interesémosnos en las raíces del polinomio $p = x^2 + 1$. Claramente ningún número real es solución de eqncompl. Introduzcamos un símbolo, i , para indicar “una raíz” del polinomio p . Entonces i sería una solución de la ecuación eqncompl. Nos interesa encontrar un cuerpo, llamémoslo $\mathbb{C}$, que “contenga” a los números reales y también a i . De ese modo, podríamos trabajar en un cuerpo que contiene al menos (por lo que sabemos hasta el momento) una raíz del polinomio p .

Recordemos que un cuerpo tiene dos operaciones: la suma y el producto, por lo que si $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ y $1 \in \mathbb{C}$, necesariamente $\mathbb{C}$ tiene que contener elementos que expresen el valor de bi donde $b \in \mathbb{R}$, y luego elementos que expresen el valor $a + bi$, donde $a \in \mathbb{R}$.

Definamos entonces $\mathbb{C}$ por

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\},$$

en donde $a + bi$ es una expresión formal. Debemos ahora definir la suma y el producto en $\mathbb{C}$. Para ello recordamos que las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva del producto y de la suma deberán verificarse, y que i^2 debe tener el valor 1. Entonces, si tenemos definido una suma y un producto de modo que $\mathbb{C}$ sea un cuerpo, deberá cumplirse que

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi)(c + di) &= ac + bic + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + bd)i \end{aligned} \quad \text{para todo } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

A partir de esta observación, tomamos las expresiones de las igualdades anteriores como definición de la suma y el producto:

LEMA D.1. *El conjunto $\mathbb{C}$ con las operaciones:*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \quad (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \\ \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + bd)i \end{aligned}$$

es un cuerpo, con neutro para la suma $0 + 0i$ y neutro para el producto $1 + 0i$.

La función $\iota : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\iota(a) = a + 0i$ es inyectiva, y tal que $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$ e $\iota(ab) = \iota(a)\iota(b)$ — en otras palabras, ι es un morfismo de cuerpos.

Notaciones usadas en el texto

- $\#(A)$, cardinal de un conjunto A , 5
 0_V , neutro (cero) del espacio vectorial V , 16
 $A \sim A'$ matrices semejantes, 67
 $\text{ad}(A) = (c_{ij}(A))_{1 \leq i, j \leq n}^t$, 99
 $\text{Alt}(V, \dots, V; W)$, transformaciones multilineales alternadas, 89
 $\text{Alt}_n(V)$, transformaciones multilineales alternadas, 89
 $A/\mathcal{R}$ conjunto cociente de A por la relación $\mathcal{R}$, 10
 A^t , matriz transpuesta, 82
 $A^B = \{f : A \rightarrow B : f \text{ función}\}$, el conjunto de las funciones de dominio A y codominio B , 9
 $\text{Bil}(V, W) = \text{Mult}(V, W; \mathbb{K})$, formas bilineales, 90
 $BL_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$, forma bilineal asociada a la matriz A , 90
 ${}_B[b]_{\mathcal{C}}$ matriz asociada a la forma bilineal b , 90
 $\mathbb{C}$, el cuerpo de los números complejos, 8
 $\#(A)$, cardinal de un conjunto A , 5
 $\mathbf{c}_B : V \rightarrow \mathbb{K}^n$, coordenadas en la base B , 55, 63
 0_V , neutro (cero) del espacio vectorial V , 16
 $c_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det(m_{ij}(A))$, 99
 $\mathcal{R}[a]$, clase de equivalencia de a en la relación de equivalencia $\mathcal{R}$, 10
 A^c , complemento del conjunto A , 6
 $g \circ f$. composición de la función f , seguida de la función g , 7
 $A/\mathcal{R}$ conjunto cociente de A por la relación $\mathcal{R}$, 10
 $c_b : A \rightarrow B$, función constante, $c_b(a) = b$, para todo $a \in A$, 7
 $\Delta : \text{Alt}_n(V) \rightarrow \mathbb{K}$, $\Delta(d) = d(e_1, \dots, e_n)$, 92
 $\det(A)$, determinante de la matriz A , 91, 94
 $\det(T)$, determinante de la transformación lineal T , 97
 $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$, conjunto diferencia, 5
 $\dim_{\mathbb{K}}(V)$, dimensión de un espacio vectorial, 43
 $d_T : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$,
 $d_T(v_1, \dots, v_n) = d(T(v_1), \dots, T(v_n))$, 97
 $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{K})$, espacio dual, 24
 $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, endomorfismos de V , 24
 $\varepsilon(\sigma)$, signo de la permutación σ , 94
 $f : A \rightarrow B$, función f , de dominio A y codominio B , 6
 $f|v, f|v(u) = f(u)v, f \in V^*, u, v \in V$, 26
 $\alpha|w : V \rightarrow W, (\alpha|w)(v) = \alpha(v)w$, 68
 $\langle X \rangle$, subespacio generado por X , 35
 $\text{gr}(f)$, grado del; polinomio $f \in \mathbb{K}[t]$, 17
 $\text{Graf}(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subset A \times B$, el gráfico de una función $f : A \rightarrow B$, 8
 $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, morfismos entre espacios vectoriales, 24
 $\text{Id} = \text{Id}_A : A \rightarrow A$, función identidad $f(a) = a$ para todo $a \in A$, 7
 $V \cong W$, espacios vectoriales isomorfos, 24
 $j_V : V \rightarrow V^{**}, j_V(v)(f) = f(v)$, 85
 $\text{Ker}(T)$, núcleo de la transformación lineal $T : V \rightarrow W$, 26
 $N(T)$, núcleo de la transformación lineal $T : V \rightarrow W$, 25
 $\mathbb{K}^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 16
 $\mathbb{K}_n[t] = \mathbb{K}[t]_n \subset \mathbb{K}[t]$, polinomios de grado menor o igual a n , 20
 $L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), L_A x = Ax$, 27, 63
 ${}_c[T]_{\mathcal{B}}$, matriz asociada a T en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, 63
 $M_{p \times q}(\mathbb{K})$, matrices $p \times q$, 18
 $M_n(\mathbb{K})$, matrices $n \times n$, 18
 $B_n(\mathbb{K})$, matrices triangulares superiores, 29
 $m_{ij}(A) \in M_{n-1}$, menor (i, j) de la matriz $A \in M_n$ (fila i , columna j), 99
 $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, morfismos entre espacios vectoriales, 24

- M^t , matriz transpuesta: si $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$,
 entonces $M^t = (b_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}}$, con $b_{ij} = a_{ji}$,
 23
 $\text{Mult}(V_1, \dots, V_n; W)$, transformaciones
 multilineales, 89
 $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales, 8
 $[n]$, el conjunto $[n] + \{1, 2, \dots, n\}$, 8
 0_V , neutro (cero) del espacio vectorial V , 16
 $\text{Ker}(T)$, núcleo de la transformación lineal
 $T : V \rightarrow W$, 26
 $N(T)$, núcleo de la transformación lineal
 $T : V \rightarrow W$, 25
 $\bigoplus_{i \in I} W_i \subset V$, suma directa de los subespacios
 $W_i \subset V$, 22
 $[x]$, parte entera de x ,
 $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, 7
 S^n , las permutaciones de n elementos, 9
 $\mathbb{Q}$, el cuerpo de los números racionales, 8
 $\mathbb{R}$, el cuerpo de los números reales, 8
 $\mathcal{R}[a]$, clase de equivalencia de a en la relación
 de equivalencia $\mathcal{R}$, 10
 $\text{rc}(A)$, rango por columnas de la matriz A , 69
 $\mathbb{Q}$, el cuerpo de los números racionales, 8
 $\text{rf}(A)$, rango por filas de la matriz A , 69
 $\text{r}(T)$, rango de la transformación lineal T , 68
 $\varepsilon(\sigma)$, signo de la permutación σ , 94
 $\text{Sim}(V, \dots, V; W)$, transformaciones
 multilineales simétricas, 89
 $\text{Sim}(V, \dots, V; W)$, formas multilineales
 simétricas, 89
 $S_n \subset [n]^{[n]}$, el conjunto de las funciones
 biyectivas de $\{1, \dots, n\}$ en sí mismo, 9
 $\mathcal{S}_n$, permutaciones de n elementos, 93
 S^n , las permutaciones de n elementos, 9
 $\langle X \rangle$, subespacio generado por X , 20
 $T^* : W^* \rightarrow V^*$, dual de la transformación
 lineal $T : V \rightarrow W$, 81
 $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$, morfismos entre espacios
 vectoriales, 24
 $T^\sharp : \text{Alt}_n(V) \rightarrow \text{Alt}_n(V)$, $T^\sharp(d) = d_T$, 97
 $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{k})$, espacio dual, 24
 $\mathcal{V}$, categoría de los espacios vectoriales, 81
 $V \cong W$, espacios vectoriales isomorfos, 24
 V/W , espacio cociente de V por $W \subset V$, 73
 $v + W = [v]$, $v \in V$, elemento del espacio
 cociente V/W , 73
 $W^\perp$, subespacio anulador o perpendicular, 84

Índice

- álgebra, 26
- anulador, 61

- base, 40, 41
 - coordenadas, 55, 63
- base canónica, 41
- base dual, 57

- cambio de base, 66–68
- clase de equivalencia, 10
- codominio de una función, 6
- combinación lineal, 35
- complemente directo, 45
- complemento de un conjunto, 6
- composición de funciones, 7, 8
- conjunto
 - complemento, 6
 - diferencia de, 5
 - diferencia simétrica de conjuntos, 13
 - leyes de De Morgan, 6
 - notaciones, 5
 - partición, 9
 - producto cartesiano de conjuntos, 8
 - subconjunto, 6
- conjunto cociente, 10
 - propiedad universal, *ver* propiedad universal del cociente11
 - proyección canónica, 11
- conjunto linealmente dependiente, 37
- conjunto linealmente independiente, 37
- conjuntos disjuntos, 5
- coordenadas, 105
- cuerpo, 15
 - característica, 23

- dependencia lineal
 - conjunto linealmente dependiente, *ver* conjunto linealmente dependiente37
 - conjunto linealmente independiente, *ver* conjunto linealmente independiente37
 - relación de dependencia, *ver* relación de dependencia37
- determinante, 91–102
 - cálculo, 98–101
 - de una transformación lineal, *ver* transformación lineal, determinante96
 - desarrollo por filas o columnas, 99
- diagrama conmutativo, 7
- diferencia de conjuntos, 5
- diferencia simétrica de conjuntos, 13
- dimensión, 43
- distancia
 - de un punto a una recta, 111
- distancia de un punto a un plano, 118
- doble dual, 85–87
- dominio de una función, 6
- dualidad, *ver* espacio dual81

- endomorfismo, 24
 - involución, 53
- espacio cociente, 73–79
 - base, 77
 - dimensión, 77
 - propiedad universal, 74
 - proyección canónica, 73
 - suma y producto por un escalar, 74
- espacio de las sucesiones, 17
- espacio dual, 24, 56–57, 81–88
 - base dual, *ver también* base dual57
 - doble dual, *ver* doble dual85
 - subespacio anulador, 84
 - subespacio perpendicular, 84
- espacio euclídeo, 19, 35, 111–118
 - base canónica, 41, 55
 - distancia de un punto a un plano, 118
 - plano, *ver* plano en el espacio euclídeo113
 - producto escalar de vectores, 112
 - recta, *ver* recta del espacio euclídeo113
- espacio vectorial, 15
 - axiomas, 15, 16
 - base, *ver también* base41, *see also* base
 - cero, 16
 - dimensión, *ver también* dimensión43
 - dual, 24, *see also* espacio dual
 - escalares, 15
 - estructura inducida, 18
 - finitamente generado, 41
 - generador, *ver también* generador35
 - isomorfo, 24

- neutro, *ver también* cero16
- orientación, *ver* orientación101
- producto por un escalar, 15
- subespacio, 18, *see also* subespacio vectorial
- subespacio generado, 20, 35
- suma, 15
- transformación lineal, *see also*
 - transformación lineal
- transformación lineal, 24
- vectores, 15
- familia linealmente disjunta, *ver* subespacio
 - vectorial, familia linealmente disjunta22
- forma bilineal, 90–91
- forma multilineal, 89
- función, 6
 - biyectiva, 6, 8
 - codominio, 6
 - composición de funciones, *see also*
 - composición de funciones
 - dominio, 6
 - gráfico, 8
 - imagen, 6
 - inversa, 8
 - invertible, *ver también* función biyectiva8
 - inyectiva, 6, 9
 - preimagen de un elemento, 6
 - preimagen de un subconjunto del dominio, 6
 - sobreyectiva, 6, 9
- función identidad, 7
- funcional lineal, 24, 56–61
- functor
 - contravariante, 82, 85
 - covariante, 85
 - naturalidad, 86
- generador, 35
- gráfico de una función, 8
- grado de un polinomio, 17
- haz de planos, 117
- imagen de una función, 6
- involución, 53
- isomorfismo, 24
- leyes de De Morgan, 6
- matrices
 - álgebra, 124–126
 - centro, 125
 - base canónica, 41
 - como espacio vectorial, 18
- matriz
 - adjunta, 99
 - antisimétrica, 23, 82
 - cambio de base, *ver* cambio de base67,
 - see also* cambio de base
 - conjugada, 68
 - determinante, *ver* determinante91
 - menor, 99
 - rango, 69, 85
 - semejante, 67
 - simétrica, 23, 82
 - traza, 29
- matriz asociada, 63–68
 - cambio de base, *ver* cambio de base66
 - pasaje al cociente, 78
- matriz transpuesta, 23, 82
- multilineal
 - forma, *ver* forma multilineal89, *see also*
 - forma multilineal
 - transformación, *ver* transformación
 - multilineal89
- núcleo de una transformación lineal, 25, 26
- orientación, 101–102, 112
- parte entera de un número real, 7
- partición de un conjunto, 9
- permutación, 93–94
 - signo, 94
 - transposición, 93
- plano en el espacio euclídeo, 113
 - ecuación, 113–116
 - cartesiana, 116
 - paramétrica, 114
 - intersección, 116
- plano euclídeo, 35, 105–111
 - distancia de un punto a una recta, 111
 - producto escalar de vectores, 107
 - recta, *ver* recta del plano106
- polinomio, 17
 - anillo de los, 17
 - grado, 17
- preimagen de un elemento, 6
- preimagen de un subconjunto del dominio de
 - una función, 6
- producto cartesiano de conjuntos, 8
- producto escalar de vectores, 107, 112
- producto mixto, 115
- producto vectorial, 114
- propiedad reflexiva, 10
- propiedad simétrica, 10
- propiedad transitiva, 10
- propiedad universal del cociente, 11, 74
- proyección, 53
- proyección canónica, *ver* conjunto cociente,
 - proyección canónica11, 53, 73

- propiedad universal, *ver* propiedad universal del cociente11
- rango de una transformación lineal, *ver también* transformación lineal, rango68
- recta del espacio euclídeo, 113
 - ecuación, 113
 - cartesiana, 113
 - paramétrica, 113
- recta del plano, 106
 - ángulo entre rectas, 107
 - ecuación, 108
 - cartesiana, 108–110
 - paramétrica, 107, 108
- recta en el espacio euclídeo
 - ecuación
 - cartesiana, 117
 - haz de planos, 117
 - intersección de planos, 116
- recta en el plano
 - perpendicular, 111
- relación, 10
 - de equivalencia, *ver* relación de equivalencia9
- relación de equivalencia
 - propiedad simétrica, 10
- relación de equivalencia
 - clase de equivalencia, 10
- relación de dependencia, 37
 - no trivial, 37
- relación de equivalencia, 9–12
 - conjunto cociente, *ver también* conjunto cociente10
 - propiedad reflexiva, 10
 - propiedad transitiva, 10
- signo de una permutación, 94
- sistema coordenado, 105
- sistema de ecuaciones lineales, 109
- subconjunto, 6
- subespacio anulador, 84, *see also* subespacio perpendicular
- subespacio generado, *ver* espacio vectorial, subespacio generado20
- subespacio invariante, 58
 - matriz asociada, 78
 - pasaje al cociente, 76
- subespacio perpendicular, 84, *see also* subespacio anulador
- subespacio vectorial, 18–24
 - cadena de subespacios, 20
 - estructura inducida, 19
 - familia linealmente disjunta, 22, 23
 - generador, *ver también* generador35
 - intersección, 20
 - subespacio generado, 20
 - suma, 21
 - suma directa, *ver* suma directa, de subespacios22
 - trivial, 19
- sucesiones
 - espacio de las, 17, *see also* espacio de las sucesiones
- suma directa
 - bases, 45
 - complemento directo, 45
 - de subespacios, 22
 - externa, 55
 - inclusión canónica, 52
 - propiedad universal, 56
 - proyección canónica, 52
- Teorema de las dimensiones, 60, 77
- transformación dual, 82–83
 - matriz asociada, 82
- transformación lineal, 24–27
 - determinante, 96–98
 - dual, *ver también* transformación dual81
 - endomorfismo, 24
 - funcional lineal, 24
 - involución, 53
 - isomorfismo, 24
 - matriz asociada, *ver* matriz asociada63
 - núcleo, *ver* núcleo de una transformación lineal25
 - proyección, 53
 - rango, 68–70
 - subespacio invariante, *ver también* subespacio invariante58
 - Teorema de las dimensiones, *ver también* Teorema de las dimensiones60
- transformación multilineal, 89
 - antisimétrica, 89
 - simétrica, 89
- transformación multilineal
 - antisimétrica, *see also* transformación multilineal alternada
- transposición, 93