Práctico 3

1. Consideramos $f : S^1 \rightarrow S^1$ un mapa diferenciable.
 - a. Probar que existe un mapa diferenciable $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\cos t, \sin t) = (\cos g(t), \sin g(t))$, y tal que $g(2\pi) = g(0) + 2\pi q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$. SUGERENCIA: Primero definir g en $[0, 2\pi]$, y mostrar que $g(2\pi) = g(0) + 2\pi q$; luego extender g pidiendo que $g(t + 2\pi) = g(t) + 2\pi q$.
 - b. Probar que $\deg_2(f) = q \pmod{2}$.
2. Sean X una variedad diferenciable compacta e Y una variedad diferenciable conexa tales que $\dim X = \dim Y$. Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapa diferenciable tal que $\deg_2(f) \neq 0$. Probar que f es sobreyectivo.
3. Probar que el grado de una composición es el producto de los grados ($\deg(g \circ f) = (\deg f)(\deg g)$).
4. Sea $f : X \rightarrow Y$ un difeomorfismo entre dos variedades diferenciables orientables compactas conexas. Probar que $\deg f = 1$ si f preserva la orientación y $\deg f = -1$ si f da vuelta la orientación.
5. * Probar que todo polinomio complejo de grado n da lugar a un mapa de la esfera de Gauss en sí misma de grado n .
6. Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ diferenciable. Probar que $\deg f = q$, q el mismo que en el ejercicio 1.
7. * Sea X una variedad diferenciable. Probar que si dos mapas continuos $f, g : X \rightarrow S^p$ son tales que $\|f(x) - g(x)\| < 2$ para todo $x \in X$, entonces f y g son homotópicos. Más aún, si f y g son diferenciables entonces la homotopía puede tomarse diferenciable.
8. (Brower) Probar que cualquier mapa $f : S^n \rightarrow S^n$ con grado diferente de $(-1)^{n+1}$ debe tener un punto fijo.
9. Probar que todo mapa $f : S^n \rightarrow S^n$ de grado impar debe llevar algún par de puntos antipodales en otro par de puntos antipodales.