Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
Introducción a la geometría diferencial
Curso 2003

Práctico 2

1. Sean M una variedad diferenciable sin borde y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que 0 es valor regular. Probar que $f^{-1}(0)$ es una subvariedad diferenciable con borde igual a $f^{-1}(0)$.

2. Consideremos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - a^2)^2 - r^2$. ¿Cuándo $T^2 = f^{-1}(0)$ es una variedad diferenciable?

3. Se define el *gráfico* Γ de una función diferenciable $f : M \to N$ como el conjunto de todos los $(x,y) \in M \times N$ tales que $f(x) = y$. Probar que Γ es una variedad diferenciable con espacio tangente $T_{(x,y)}\Gamma \subset T_xM \times T_yN$ igual al gráfico de d_xf.

4. **a.** Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un mapa C^∞. Entonces $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = y + g(x)$ es tal que todo punto de $\mathbb{H}^2$ es regular.
b. Sea $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = y - x^2$. Probar que $f^{-1}(0)$ es una variedad diferenciable cuyo borde es vacío (y por lo tanto está contenido estrictamente en $\partial\mathbb{H}^2$).
c. Sea $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-1/x^2}\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Probar que f es C^∞ pero que $f^{-1}(0)$ no es una variedad.