Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
Introducción a la geometría diferencial
Curso 2003

Práctico 1

1. Sean M y N dos variedades diferenciables. Probar que el producto cartesiano $M \times N$ es la única variedad diferenciable a menos de isomorfismo que verifica la propiedad universal siguiente:

Para toda variedad diferenciable Z y mapas diferenciables $\varphi_M : Z \to M$ y $\varphi_N : Z \to N$ existe un único mapa diferenciable $f : Z \to M \times N$ tal que $p_M \circ f = \varphi_M$ y $p_N \circ f = \varphi_N$, con p_M y p_N las proyecciones de $M \times N$ sobre M y N respectivamente.

2. Sean M y N dos variedades diferenciables (con borde).

a. Probar que si $\partial M = \emptyset$ y $\partial N \neq \emptyset$, entonces $M \times N$ es una variedad con borde. Calcularlo.

b. Probar que si M y N tienen borde no vacío, entonces $M \times N$ NO es una variedad con borde.

c. Definimos las *variedades diferenciables (C^∞) con bordes y esquinas* como los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, localmente difeomorfos a abiertos de $\mathbb{H}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{H}^{n_r} \subset \mathbb{R}^{n_1 + \cdots n_r}$. Probar que las variedades diferenciables con y sin borde son variedades con bordes y esquinas, y que la categoría de las variedades con bordes y esquinas es cerrada para el producto cartesiano.

d. Sea $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la traslación horizontal $H(x, y) = (x+1, y)$, y sea $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la traslación vertical $V(x, y) = (x, y+1)$. Probar que el espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/G$ correspondiente a la acción sobre $\mathbb{R}^2$ del grupo generado por H y V es homeomorfo a T^2. Recordamos que el espacio de órbitas es el cociente de $\mathbb{R}^2$ por la relación de equivalencia $x \equiv y$ si y sólo si x e y pertenecen a la misma órbita, $x, y \in \mathbb{R}^2$.

e. Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la simetría central de centro el origen. El grupo $G = \{A, Id\}$ actúa en T^2, de modo que sus órbitas tiene dos puntos. Consideremos $K = T^2/G$, con la topología cociente. Mostrar que la aplicación $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y) = ((r\cos y + a)\cos x, (r\cos y + a)\sin x, r\sin y \cos\frac{x}{2}, r\sin y \sin\frac{x}{2})$$

induce un homeomorfismo sobre su imagen de K en $\mathbb{R}^4$, de modo que K es una variedad diferenciable. Dicha variedad se llama la *botella de Klein.*

3. Probar que la variedad diferenciable $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ es difeomorfa al toro T^2 definido en el ejercicio 2 del práctico 1. (S^1 es la circunferencia de radio 1).

4. El objetivo de este problema es probar que el fibrado tangente de una variedad diferenciable (vsita como subvariedad de R^n) es también una variedad diferenciable.

a. Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ una variedad diferenciable de dimensión n. Consideremos cartas locales $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{n+k}\}$ de M de modo que las imágenes de las cartas locales cubran M. Probar que los mapas

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}^{n+k} \quad , \quad \psi_\alpha(x, v) = (\varphi_\alpha(x), d_x\varphi_\alpha(v))$$

son isomorfismos sobre su imagen, y tales que inducen un homeomorfismo de TM sobre su imagen. Deducir que TM es una variedad diferenciable.

b. Sean M y N dos variedades diferenciables, y $\varphi : M \to N$ una función diferenciable. Probar que $d\varphi : TM \to TN$ dada por $d\varphi(p, v) = (\varphi(p), d_p\varphi(v))$ es una función diferenciable.

5. Sean M y N dos variedades con borde difeomorfas. Probar que sus bordes son variedades difeomorfas.

6. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ una vareidad orientable. Probar que el fibrado normal $NX = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : x \in X \ , \ v \perp T_xX\}$ es una variedad diferenciable.

7. Sea $f : V \to U$ una funcin diferenciable entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$, y sean ω, ω' dos p-formas diferenciables en U. Pruebe las siguientes afirmaciones:

a. $f^*(\omega + \omega') = f^*\omega + f^*\omega'$.

b. $f^*(\omega \wedge \omega') = f^*\omega \wedge f^*\omega'$.

c. $f^*(\mathsf{d}\, x_1 \wedge \mathsf{d}\, x_2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}\, x_n) = \det(f')\, \mathsf{d}\, x_1 \wedge \mathsf{d}\, x_2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}\, x_n$.

8. Sean ω, ω' dos p-formas diferenciables en un abierto U de $\mathbb{R}^n$.

a. $\mathsf{d}(\omega + \omega') = \mathsf{d}\,\omega + \mathsf{d}\,\omega'$.

b. $\mathsf{d}(\omega \wedge \omega') = \mathsf{d}\,\omega \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge \mathsf{d}\,\omega'$.

c. $\mathsf{d}(\mathsf{d}\,\omega) = 0$.

d. Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una funcin diferenciable, $\mathsf{d}\, f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathsf{d}\, x_i$.

e. Si $g : V \to U$ es un difeomorfismo, $\mathsf{d}(g^*\omega) = g^*(\mathsf{d}\,\omega)$.

9. Calcular las derivadas exteriores de las siguientes formas en $\mathbb{R}^3$:

a. $z^2\, \mathsf{d}\, x \wedge \mathsf{d}\, y + (z^2 + 2y)\, \mathsf{d}\, x \wedge \mathsf{d}\, z$.

b. $13x\, \mathsf{d}\, x + y^2\, \mathsf{d}\, y + xyz\, \mathsf{d}\, z$.

c. $f\, \mathsf{d}\, g$, donde f y g son funciones.

d. $(x + 2y^3)(\mathsf{d}\, z \wedge \mathsf{d}\, x + \frac{1}{2}\, \mathsf{d}\, y \wedge \mathsf{d}\, x)$.

10. Sea $\omega = u\, \mathsf{d}\, x + v\, \mathsf{d}\, y$ una 1-forma diferenciable cerrada en $\mathbb{R}^2$. Muestre que ω es exacta. (Sugerencia: suponga que $\omega = \mathsf{d}\, f$ y trate de obtener f integrando y derivando.)