Algebra I

Segundo semestre 2002

Práctico 9

1. Sea k un cuerpo. Consideremos polinomios $f_i \in k[x]$ tales que $\deg(f_i) = i$, $i \in \mathbb{N}$. Probar que $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una base de $k[x]$ como k-módulo.

2. Sea $u = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

a. Probar que existe una base de $\mathbb{Z}^2$ que contiene a u si y sólo si $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$.

b. Si $u = (5, 12)$, hallar un elemento $v \in \mathbb{Z}^2$ de modo que $\{u, v\}$ sea base de $\mathbb{Z}^2$.

3. Completar la demostración del teorema que caracteriza las sucesiones excatas cortas que escinden.

4. Consideremos la categoría de los $\mathbb{Z}$-módulos.

a. Hallar un $\mathbb{Z}$-módulo N de modo que el functor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, N)$ no sea exacto a derecha.

b. Hallar un $\mathbb{Z}$-módulo M de modo que el functor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, -)$ no sea exacto a izquierda..

5. Sea A la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1+i & 1-i \\ 8+6i & -4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

a. Hallar la forma normal de A sobre $\mathbb{Z}[i]$ (ver ejercicio sobre los enteros de Gauss del práctico 6).

b. Hallar la forma normal de A sobre $\mathbb{C}$.

6. En los siguientes casos, calcular una base del R-submódulo N del módulo R^3:

a. $R = \mathbb{Z}$, N es el submódulo generado por $f_1 = (2, 1, -3)$, $f_2 = (1, -1, 2)$.

b. $R = \mathbb{Z}$, N es el submódulo generado por $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (2, -3, 1)$, $f_3 = (0, 3, 1)$, $f_4 = (3, 1, 5)$.

c. $R = \mathbb{Q}[x]$, N es el submódulo generado por $f_1 = (2x-1, x, x^2+3)$, $f_2 = (x, x, x^2)$ y $f_3 = (x + 1, 2x, 2x^2 - 3)$.

d. $R = \mathbb{Z}$, $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : x + 2y + 3z = 0 = x + 4y + 9z\}$

7. Sea k un cuerpo. Probar que $A \in M_n(k)$ es invertible si y sólo si es producto de matrices elementales.

8. Hallar el rango de la parte libre y los factores invariantes de torsión de los siguientes módulos:

a. Un espacio vectorial V de dimensión n sobre un cuerpo k.

b. El mismo espacio V como $k[X]$-módulo, con la acción determinada por la transformación lineal T definida en una base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ por $T(v_i) = v_{i+1}$, si $1 \leq i \leq n-1$, $T(v_n) = 0$.

c. $\mathbb{Z}_p$ como $\mathbb{Z}_p$-módulo.

d. $\mathbb{Z}_p$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

9. Sean R y N como en el ejercicio 6. escribir R^3/N como suma directa de submódulos irreducibles. Hallar los invariantes de torsión y los divisores elementales de R^3/N.

10. Determinar los invariantes de torsión y los divisores elementales de los siguientes grupos abelianos:

a. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{35}$.

b. $\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_{108}$.

c. $\mathbb{Z}_{26} \oplus \mathbb{Z}_{42} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}_{200} \oplus \mathbb{Z}_{1000}$.

Nota: La resolución del problema 5 deberá ser incluida en la carpeta de ganancia de curso. Siendo éste el último problema de la carpeta, su plazo de presentación es el penúltimo teórico que se dicte. Este plazo es inamovible. La lista de aprobados sedará en el último teórico dictado.