Algebra I

Segundo semestre 2002

Práctico 8

1. Sean M_1, M_2, N_1, N_2 R-módulos tales que $M_i \cong N_i$, $i = 1, 2$. Probar que $M_1 \oplus M_2 \cong N_1 \oplus N_2$. ¿El recíproco es cierto?

2. a. Calcular $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{Z}$.

b. Calcular $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q)$, $p, q \in \mathbb{Z}$ primos.

c. Calcular $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

3. Probar que los submódulos y cocientes de un módulo de torsión son de torsión.

4. Probar que $\mathbb{Q}$ es un Z-módulo libre de torsión que no es libre.

5. ¿Verdadero o falso?

- Un submódulo de un módulo libre es libre.
- Un submódulo de un módulo libre es libre de torsión.
- A módulo cociente de un módulo cíclico es cíclico.
- Un submódulo de un módulo cíclico es cíclico.

6. Sea V un $\mathbb{Z}_2$-espacio vectorial de dimensión 3. Sea $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_2}(V)$ dada en una base por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Consideremos la estructura de $\mathbb{Z}_2[x]$-módulo en V inducida por α. Hallar $\mathrm{o}(\alpha)(v)$ para un elemento $v \in V$cualquiera. Hallar un elemento en el anulador de V.

7. Dar ejemplos de sucesiones exactas cortas de R-módulos

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N_2 \longrightarrow 0$$

tales que:

a. $M_1 \cong N_1$, $M \cong N$, $M_2 \ncong N_2$.

b. $M_1 \cong N_1$, $M \ncong N$, $M_2 \cong N_2$.

c. $M_1 \ncong N_1$, $M \cong N$, $M_2 \cong N_2$.

Nota: La resolución del problema 5 y deberá ser incluida en la carpeta de ganancia de curso cuyo plazo de presentación vence el 18 de diciembre.