**Algebra I**

Segundo semestre 2002

Práctico 7

**1.** Probar que todo grupo abeliano puede verse como un $\mathbb{Z}$-módulo.

**2.** Sea $V$ un $k$-espacio vectotrial de dimensión 2 y $T \in \mathrm{End}_k(V)$. Consideremos la estructura de $k[x]$-módulo de $V$i nducida por $T$ $(p \cdot v = p(T)(v))$. Describir (con bases) todos los submódulos de $V$. Atención: la característica de $k$ puede ser 2...

**3.** El ideal $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ es un submódulo. Probar que es isomorfo a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo, pero no como anillo.

**4.** Probar que si $R$ es un dominio de integridad y $x \in R$, enotnceds $R \cong Rx$ como $R$-módulos. Probarque $R \cong Rx$ como anillos si y sólo si $x$ es una unidad.

**5.** Sea $R$ un anillo y $M \in {}_R\mathcal{M}$. Sea $N \leq M$ un submódulo. Probar que el cociente $\pi : M \to M/N$ verifica la siguiente propiedad universal:

Para todo $L \in {}_R\mathcal{M}$ y todo morfismo $f : M \to L$ tal que $\ker(f) \supset N$, existe un único morfismo $\widetilde{f} : M/N \to L$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & L \\ M/N \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Hallar el núcleo de $\widetilde{f}$.

**6.** Un $R$-módulo $M$ se dice finitamente generado si existe un subconjunto finito $S \subset M$ tal que $\langle S \rangle = M$.

**a.** Probar que $R[x]$ es finitamente generado si y sólo si $R = 0$

**b.** Probar que $\mathbb{Q}$ no es finitamente generado sobre $\mathbb{Z}$.

**7.** Sea $R$ un anillo (conmutativo con unidad). Sean $I, J$ dos ideales de $R$.

**a.** Probar que si $R/I \cong R/J$ como módulos, entonces $I = J$.

**b.** Probar que $k[x,y]/(x) \cong k[x,y]/(y)$ como anillos, pero no como $K[x,y]$-módulos. Deducir que la parte a es falsa si el isomorfismo es de anillos.

**Nota:** La resolución de los problemas 5 y 7 deberá ser incluidA en la carpeta de ganancia de curso cuyo plazo de presentación vence el 9 de diciembre.