

Algebra I

Segundo semestre 2002

Práctico 7

1. Probar que todo grupo abeliano puede verse como un $\mathbb{Z}$ -módulo.
2. Sea V un k -espacio vectorial de dimensión 2 y $T \in \text{End}_k(V)$. Consideremos la estructura de $k[x]$ -módulo de V inducida por T ($p \cdot v = p(T)(v)$). Describir (con bases) todos los submódulos de V . ATENCIÓN: la característica de k puede ser 2...
3. El ideal $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ es un submódulo. Probar que es isomorfo a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$ -módulo, pero no como anillo.
4. Probar que si R es un dominio de integridad y $x \in R$, entonces $R \cong Rx$ como R -módulos. Probar que $R \cong Rx$ como anillos si y sólo si x es una unidad.
5. Sea R un anillo y $M \in {}_R\mathcal{M}$. Sea $N \leq M$ un submódulo. Probar que el cociente $\pi : M \rightarrow M/N$ verifica la siguiente propiedad universal:

Para todo $L \in {}_R\mathcal{M}$ y todo morfismo $f : M \rightarrow L$ tal que $\ker(f) \supset N$, existe un único morfismo $\tilde{f} : M/N \rightarrow L$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & L \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ M/N & & \end{array}$$

Hallar el núcleo de $\tilde{f}$.

6. Un R -módulo M se dice finitamente generado si existe un subconjunto finito $S \subset M$ tal que $\langle S \rangle = M$.
 - a. Probar que $R[x]$ es finitamente generado si y sólo si $R = 0$
 - b. Probar que $\mathbb{Q}$ no es finitamente generado sobre $\mathbb{Z}$.
7. Sea R un anillo (conmutativo con unidad). Sean I, J dos ideales de R .
 - a. Probar que si $R/I \cong R/J$ como módulos, entonces $I = J$.
 - b. Probar que $k[x, y]/(x) \cong k[x, y]/(y)$ como anillos, pero no como $K[x, y]$ -módulos. Deducir que la parte a es falsa si el isomorfismo es de anillos.

Nota: La resolución de los problemas 5 y 7 deberá ser incluida en la carpeta de ganancia de curso cuyo plazo de presentación vence el 9 de diciembre.