Algebra I

Segundo semestre 2002

Práctico 6

1. Sea R el subanillo $\{a + b\sqrt{10} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ del cuerpo de los reales. Probar que:

a. La función $N : R \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$N(a + b\sqrt{10}) = (a + b\sqrt{10})(a - b\sqrt{10}) = a^2 - 10b^2$$

verifica $N(uv) = N(u)N(v)$ para todo $u, v \in R$, y $N(u) = 0$ si y sólo si $u = 0$.

b. Un elemento u de R es invertible sii $N(u) = \pm 1$.

c. $2, 3, 4 + \sqrt{10}$ y $4 - \sqrt{10}$ son elementos irreducibles de R.

d. $2, 3, 4 + \sqrt{10}$ y $4 - \sqrt{10}$ no son elementos primos de R. SUGERENCIA: observar que $3.2 = (4 + \sqrt{10})(4 - \sqrt{10})$.

2. a. Sea D un dominio integral que tiene un elemento irreducible c. Probar que $D[X]$ no es un dominio de ideales principales (sugerencia: considerar el ideal generado por $\{c, X\}$).

b. Probar que $\mathbb{Z}[X]$ no es un dominio de ideales principales.

c. Sea k un cuerpo, y $n \geq 2$. Probar que $k[X_1, X_2, ...X_n]$ no es un dominio de ideales principales.

3. Utilizar el algoritmo de Euclides para encontrar el máximo común divisor de $x^3 + x^2 + x - 3$ y $x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 4$ en $\mathbb{Q}[x]$.

4. a. Sean a y n enteros, $n > 0$. Probar que existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = qn + r$ y $|r| \leq n/2$.

b. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$. Probar que existen $r, q \in \mathbb{C}$ tales que $a + bi = qc + r$ y $|r|^2 < c^2$.

5. `Enteros de Gauss` Probar que $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un dominio euclídeo con $\phi(a + bi) = a^2 + b^2$. SUGERENCIA: dados $y = a + bi$ y $x = c + di \in \mathbb{Z}[i]$, sea $\overline{x} = c - di$. Probar que existen $q, r_0 \in \mathbb{Z}[i]$ tales que $y\overline{x} = qx\overline{x}$ y $r_0 = 0$ o $\phi(r_0) < \phi(x\overline{x})$, y tomar $r = y - qx$.

6. Probar que el polinomio $1 + X + X^3 + X^4$ no es irreducible sobre $k[X]$ para ningún cuerpo k.

7. Sean D un dominio factorial, F su cuerpo de fracciones y $f \in D[X]$ un polinomio mónico. Sea $\alpha \in F$ una raíz de f. Probar que $\alpha \in D$.

8. *Criterio de irreducibilidad de Eisenstein.* Sean D un dominio factorial, F su cuerpo de fracciones, y $f \in D[X]$, $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$, donde $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$. Sea $p \in D$, irreducible tal que $p \nmid a_n$; $p | a_k$ para todo $k = 0, 1, ..., n-1$; $p^2 \nmid a_0$. Probar que f es irreducible en $F[X]$ y que, si f es primitivo, es irreducible en $D[X]$.

9. Determinar si el polinomio f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ y en $\mathbb{Z}[X]$.

i) $f(X) = 2X^5 - 6X^3 + 9X^2 - 15$
ii) $f(X) = 3X^4 + 6X^2 + 6$
iii) $f(X) = X^3 + 2X^2 + X + 2$
iv) $f(X) = X^3 - 7X + 3$

10. Sean D un dominio factorial y $P \in D[X,Y]$, $P = Y^4 + 2X^2Y^3 + X^3Y^2 - XY + X$. probar que P es irreducible en $D[X,Y]$.

11. Sea D un dominio integral, y $c \in D$. Dado $f \in D[X]$, $f = a_0 + a_1X + ...a_nX^n$, sea $f_c \in D[X]$, $f_c = a_0 + a_1(X-c) + ... + a_n(X-c)^n$.

a. Probar que f es irreducible en $D[X]$ si y sólo si f_c lo es.

b. Probar que si p es un número primo, el *polinomio ciclotómico* $f = X^{p-1} + X^{p-2} + ... + X + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$. SUGERENCIA: observar que $f = (X^p - 1)/(X-1)$, y que $f_{-1} = ((X+1)^p - 1)/X$, y usar el criterio de Eisenstein).

12. Probar que el polinomio $X + 1$ es invertible en $\mathbb{Z}[[X]]$ pero no en $\mathbb{Z}[X]$.

Nota: La resolución del problema 7 deberá ser incluida en la carpeta de ganancia de curso cuyo plazo de presentación vence el 25 de noviembre.