Algebra I

Segundo semestre 2002

Práctico 5

1. Sea $\mathbb{Z}\left(\sqrt{-5}\right) = \left\{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Probar que R es un subanillo de $\mathbb{C}$ y que su cuerpo de fracciones es $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-5}\right) = \left\{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

2. Sean D_1 y D_2 dominios de integridad, F_1, F_2 sus respectivos cuerpos de fracciones y $\phi : D_1 \longrightarrow D_2$ un isomorfismo de anillos. Probar que ϕ se extiende a un isomorfismo entre F_1 y F_2.

3. Sean R un anillo conmutativo con unidad y S un submonoide de $(R, \cdot, 1)$. En $R \times S$ se define la relación: $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$ si y sólo si existe $s \in S$ tal que $s(s_2 a_1 - s_1 a_2) = 0$.

a. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $R \times S$. Sea R_S el cociente $(R \times S)/\sim$. Se indica con a/s la clase de equivalencia de $(a, s) \in R \times S$. Probar que R_S es un anillo con la suma y el producto definidos mediante:

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{s_2 a_1 + s_1 a_2}{s_1 s_2}, \qquad \frac{a_1}{s_1}\frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2}.$$

El anillo R_S se llama *localización de R en S.*

b. Sea $\lambda_S : R \longrightarrow R_S$ dado por $\lambda_S(a) = \frac{a}{1}$. Probar que λ_S es un homomorfismo de anillos y que $\lambda_S(s)$ es invertible para todo $s \in S$.

c. Probar que $R_S = 0$ si y sólo si $0 \in S$. ,En ese caso se dice que S es un cioonjunto multiplicativo

d. Sean R' un anillo conmutativo y $\eta : R \longrightarrow R'$ un homomorfismo de anillos tal que $\eta(s)$ es invertible para todo $s \in S$. Probar que existe un único homomorfismo de anillos $\tilde{\eta} : R_S \longrightarrow R'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\lambda_S"] \arrow[d, "\eta"] & R_S \arrow[dl, "\tilde{\eta}"] \\ R' & \end{tikzcd}$$

conmuta.

e. Sean $R = \mathbb{Z}_6$ y $S = \{[1], [2], [4]\} \subset \mathbb{Z}_6$. Probar que R_S es isomorfo a $\mathbb{Z}_3$.

4. a. Sea A un anillo conmutativo con unidad, y $f \in A$ un elemento no nulo, qu no es divisor de cero. Probar que entonces $S = \{f^n \mid n \geq 0\}$ es un conjunto multiplicativo. Notaremos A_f el localizado de A por S.

b. ¿ Cómo se traduce en este caso la propiedad universal del ejercicio 3?

5. a. Sea A un anillo con unidad. Un ideal $\mathcal{P}$ de A se dice primo si toda vez que $a, b \in A$ son tales que $ab \in \mathcal{P}$, entonces o a o b pertenecen a $\mathcal{P}$ (dicho de otro modo: si $a, b \notin \mathcal{P}$, entonces $ab \notin \mathcal{P}$). Probar que si $\mathcal{P} \neq A$, entonces $A \setminus P$ es un conjunto multiplicativo de A. Notaremos por $A_{\mathcal{P}}$ dicho localizado.

b. Probar que todo ideal maximal es primo.

c. `optativo` Probar que si $\mathcal{P} \subset A$ es primo, entonces $A_{\mathcal{P}}$ es un anillo local, es decir contiene un único ideal maximal. Sugerencia: Probar que un anillo es local si y sólo si el conjunto de todos los elementos no invertibles es un ideal.

Nota: La resolución del problema 1 deberá ser incluida en la carpeta de ganancia de curso cuyo plazo de presentación vence el 19 de noviembre.