Algebra I

Segundo semestre 2002

Práctico 4

1. a. Un anillo R es *simple* si $R \neq \{0\}$ y sus únicos ideales son $\{0\}$ y R. Probar que la característica de un anillo simple es 0 o es un número primo.

b. Probar que si R es un dominio de integridad su característica es 0 o un número primo.

c. Sean R_1 y R_2 anillos con características m y n respectivamente. ¿Cuál es la característica de $R_1 \times R_2$?

2. a. Sea A un anillo con unidad. Mostrar que existe un único morfismo de $\mathbb{Z}$ en A que lleva la unidad en el uno.

b. Sea k un cuerpo y $\tilde{k}$ la intersección de todos los subcuerpos de k. Probar que $\tilde{k}$ es el menor subcuerpo de k. $\tilde{k}$ se llama el *cuerpo primo* de k).

c. Probar que $\tilde{k}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ si $\mathrm{car}(k) = p$ o a $\mathbb{Q}$ si $\mathrm{car}(k) = 0$.

3. Probar que si $R_1, \dots, R_n$ son anillos, entonces

$$U(R_1 \times \cdots \times R_n) = U(R_1) \times \cdots \times U(R_n),$$

siendo $U(R)$ el grupo de invertibles de R. Observar que esto implica

$$\# U(R_1 \times \cdots \times R_n) = \prod_{i=1}^{n} \# U(R_i)$$

si $\# U(R_i) < \infty$ para todo $i = 1, \dots, n$.

4. Sea $\phi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos con unidad tal que $\phi(1) = 1$. Se define $\overline{\phi} : R[[X]] \longrightarrow S[[X]]$ por $\overline{\phi}(\sum_i a_i X^i) = \sum_i \phi(a_i) X^i$.

a. Probar que $\overline{\phi}$ es un homomorfismo de anillos que lleva la unidad en la unidad y que $\overline{\phi}\big(R[X]\big) \subset S[X]$.

b. Probar que $\overline{\phi}$ es inyectiva (sobreyectiva) sii ϕ lo es, y que en ese caso también lo es $\overline{\phi}|_{R[X]} : R[X] \longrightarrow S[X]$.

c. Probar que $\mathbb{Z}_n[X]$ es isomorfo a $\mathbb{Z}[X]/! < n >$, donde $< n >$ es el ideal de $\mathbb{Z}[X]$ generado por el polinomio constante n.

5. Sea R un anillo con unidad y $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Probar que:

a. $(M_n(R))[X] \cong M_n(R[X])$

b. $(M_n(R))[[X]] \cong M_n(R[[X]])$

6. Sean R un anillo con unidad y $a \in R[[X]]$, $a = \sum a_i X^i$.

a. Probar que a es invertible en $R[[X]]$ si y sólo si a_0 es invertible en R.

b. Dar un ejemplo de un elemento $a \in R[X]$ que no es invertible en $R[X]$ y sí lo es en $R[[X]]$.

c. Probar que, si R es un cuerpo, el conjunto de elementos no invertibles en $R[[X]]$ es el ideal generado por X y es el único ideal maximal de $R[[X]]$.

d. Probar que, si R es un cuerpo, $< X >$ es un ideal maximal de $R[X]$, ¿es el único?

7. Probar que el polinomio $X^3 - X$ tiene 6 raíces en $\mathbb{Z}_6$.

8. Probar que el anillo $\mathbb{H}$ de los cuaterniones tiene una cantidad infinita de elementos u que verifican $u^2 = -1$.

Nota: La resolución del problema 1) deberá ser incluida en la carpeta de ganancia de curso cuyo plazo de presentación vence el 11 de noviembre.