

## Algebra I

Segundo semestre 2002

### Práctico 3

1. Sea  $A$  un anillo e  $I \triangleleft A$  un ideal. Terminar la prueba del teórico donde se afirma que  $A/I$  es un anillo.
2. Sea  $A$  un anillo con unidad. Probarque el conjunto de los elementos invertibles es un grupo con la multiplicación y el inverso.
3. Probarque si  $I$  es un ideal en un anillo con unidad  $A$  tal que existe un elemento invertible perteneciente a  $I$ , entonces  $I = A$ .
4. Sea  $k$  un cuerpo. Consideremos el anillo de los polinomios en una variable  $k[x]$ .
  - a. Probar que dados  $p, q \in k[x]$ ,  $q \neq 0$ , existen únicos  $d, r \in k[x]$ , con  $\text{gr } r < \text{gr } q$ , tales que  $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$ . SUGERENCIA : Aplicar el algoritmo de Euclides.
  - b. Sea  $I \triangleleft k[x]$  un ideal. Probar que existe  $q \in I$  tal que  $I = qk[x]$ .
  - c. Si  $p, q \in k[x]$  son tales que  $pk[x] = qk[x]$ , entonces existe  $a \in k$  tal que  $p(x) = aq(x)$ .
  - d. Generalizar la división al anillo de polinomios con coeficientes en un anillo cualquiera. SUGERENCIA: Leer un libro, que no muerden.
5. Dado un homomorfismo de anillos  $\phi : R \longrightarrow S$ , se define  $\phi_* : M_n(R) \longrightarrow M_n(S)$  por  $(\phi_*(A))_{ij} = \phi(A_{ij})$  para todo  $1 \leq i, j \leq n$ .
  - a. Probar que  $\phi_*$  es un homomorfismo, y que si  $R$  y  $S$  tienen unidad y  $\phi(1) = 1$  entonces  $\phi_*(I) = I$ .
  - b. Sean  $R$  un anillo e  $I \triangleleft R$ . Probar que  $M_n(I) \triangleleft M_n(R)$  y que  $M_n(R)/M_n(I) \simeq M_n(R/I)$  (Sugerencia: considerar  $\Pi_*$ , donde  $\Pi$  es la proyección canónica sobre  $R/I$ ).
  - c. Probar que todos los ideales de  $M_n(R)$  son de la forma  $M_n(I)$  para algún ideal  $I$  de  $R$ .
  - d. Probar que  $M_n(R)$  no tiene ideales no triviales si  $R$  es un *anillo con división* (es decir, un anillo con unidad en el que todo elemento diferente de cero es invertible).
6. Dado un anillo  $R$ , sea  $T_n(R) \subset M_n(R)$  el conjunto de matrices cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son nulos.
  - a. Probar que  $T_n(R)$  es un subanillo de  $M_n(R)$ .
  - b. Sea  $\overline{T}_n(R) \subset T_n(R)$  el subconjunto de matrices cuyos elementos en la diagonal principal son nulos. Probar que  $\overline{T}_n(R) \triangleleft T_n(R)$ .
  - c. Sea  $D_n(R)$  el conjunto de matrices diagonales. Probar que  $T_n(R) / \overline{T}_n(R) \simeq D_n(R)$ .
7. Sean  $R$  un anillo conmutativo con unidad y  $A, B \in M_n(R)$ . Probar que  $AB = I$  implica que  $BA = I$ .

8. Sea  $R$  un anillo con unidad (no necesariamente conmutativo). Probar que la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es invertible si y sólo si  $a_{ii}$  es invertible para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Hallar la inversa en ese caso.

9. Probar que la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & -8 \end{pmatrix}$  es invertible en  $M_2(\mathbb{Z})$  y calcular su inversa.

#### 10. Teorema chino de los restos

a. Sean  $R$  un anillo con unidad, e  $I_1, I_2$  ideales de  $R$  *primos entre sí* es decir tales que  $I_1 + I_2 = R$ . Probar que si  $a_1, a_2 \in R$  entonces existe  $a \in R$  tal que  $a \equiv a_1 \pmod{I_1}$  y  $a \equiv a_2 \pmod{I_2}$ .

b. Generalizar para más de dos ideales: si  $I_1, I_2, \dots, I_n$  son ideales de  $R$  tales que  $I_j + I_k = R$  cuando  $j \neq k$ , dados  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$  existe  $a \in R$  tal que  $a \equiv a_i \pmod{I_i}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . (Sugerencia: probar que en ese caso  $A_j + \bigcap_{i \neq j} A_i = R$  para todo  $j=1, \dots, n$ .)

11. Probar que si  $I_1$  e  $I_2$  son ideales primos entre sí e  $I = I_1 \cap I_2$ , entonces

$$R/I \simeq R/I_1 \times R/I_2.$$

**Nota:** La resolución del problema 5) deberá ser incluida en la carpeta de ganancia de curso cuyo plazo de presentación vence el 4 de noviembre.