Algebra I

Segundo semestre 2002

Práctico 2

1. Sea $\mathbb{H}$ el anillo de los cuaterniones. Dado $x \in \mathbb{H}$, $x = \alpha_0 + \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$, se define $\overline{x} = \alpha_0 - \alpha_1\mathbf{i} - \alpha_2\mathbf{j} - \alpha_3\mathbf{k}$, $N(x) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, y $T(x) = 2\alpha_0$.

Probar que:

a. $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$ y $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$.

b. Para todo $x \in \mathbb{H}$ se tiene que $x\overline{x} = N(x)$ y $x^2 - T(x)x + N(x) = 0$.

c. $N(xy) = N(x)N(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{H}$.

d. Hallar el centro $C(\mathbb{H})$ de $\mathbb{H}$, es decir, el conjunto

$$C(\mathbb{H}) = \{x \in \mathbb{H} : xy = yx, \quad \forall y \in \mathbb{H}\}.$$

2. Sea R un anillo.

a. Un elemento $e \in R$ es *idempotente* si $e^2 = e$. Probar que si R es un dominio, entonces los únicos elementos idempotentes de R son 0 y 1.

b. Un elemento $z \in R$ es *nilpotente* si existe un entero positivo n tal que $z^n = 0$. Probar que si R es un dominio, entonces 0 es el único elemento nilpotente.

c. Sean x e y elementos nilpotentes de R. Probar que $x + y$ es nilpotente si R es conmutativo. Probar con un ejemplo que este resultado no vale en general si R no es conmutativo.

d. Probar que $\mathbb{Z}_n$ tiene elementos nilpotentes distintos de 0 sii n es divisible por el cuadrado de un número primo.

e. Sean R un anillo con unidad y $z \in R$ nilpotente, y n tal que $z^n = 0$, Probar que $1 - z$ tiene inversa $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.

3. Sean R un anillo con unidad y $z \in R$ un anillo con inverso a la derecha *i.e.* existe x tal que $zx = 1$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) z tiene más de un inverso a la derecha.

ii) z no es invertible.

iii) z es divisor de cero a la izquierda *i.e.* existe $0 \neq t$ tal que $zt = 0$.

4. Probar que todo dominio de integridad finito es un cuerpo.

5. a. Hallar los homomorfismos de anillos $\phi : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m$.

b. Hallar los homomorfismos de anillos $\phi : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ que llevan la unidad en la unidad.

c. ¿Cuántos homomorfismos de anillos hay de $\mathbb{Z}_4$ en $\mathbb{Z}_{10}$?¿Y de $\mathbb{Z}_{12}$ en $\mathbb{Z}_3$?

6. Hallar los ideales del conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$, cuando X tiene dos elementos.

7. Dado un ideal I de un anillo R, sea $[R : I] = \{r \in R : xr \in I \quad \forall x \in R\}$. Probar que $[R : I]$ es un ideal de R que contiene a I.

8. Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros,

a. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ y $d = mcd(m, n)$ y $q = mcm(m, n)$. Probar que:

$$m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = q\mathbb{Z}, \quad (m\mathbb{Z})(n\mathbb{Z}) = mn\mathbb{Z}, \quad m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}.$$

b. Probar que $d = mcd(m, n)$ si y sólo si $d|m$, $d|n$ y existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $d = am + bn$. Deducir que $mcd(m, n) = 1$ si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $am + bn = 1$.

9. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un anillo R que verifica:

$$\text{si } a \sim a' \text{ y } b \sim b' \Rightarrow a + b \sim a' + b' \text{ y } ab \sim a'b'.$$

Probar que $I := \{a \in R : a \sim 0\}$ es un ideal de R y que $a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b(\bmod I)$.

10. Sea S el anillo de funciones de $[0, 1]$ en R. Dado $A \subset [0, 1]$, sea

$$I_A = \{f \in S : f(x) = 0, \quad \forall x \in A\}.$$

a. Probar que $I_A \lhd S$, y que S/I_A es isomorfo al anillo de funciones de A en R.

b. Sean $A_1 = [0, 1/2]$ y $A_2 = [1/2, 1]$. Probar que $I_{A_1} I_{A_2 =} I_{A_1} \cap I_{A_2} = \{0\}$.

Nota: La resolución del problema 7) deberá ser incluida en la carpeta de ganancia de curso cuyo plazo de presentación vence el 4 de noviembre.