**Algebra I**

Segundo semestre 2002

Práctico 10

Este práctico complementa el contenido de la última clase teórica. Es altamente recomendable pensar los ejercicios que contiene.

**1.** Sea $R$ un PID y $M \in {}_R\mathcal{M}$ un $R$-módulo finitamente generado. Sean $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$ y $M = M_1' \oplus \cdots \oplus M_s'$ dos descomposiciones en sub-módulos cíclicos no triviales, con $o(M_i) = (d_i)$, $i = 1, \ldots, t$ $o(M_j') = (d_j')$, $j = 1, \ldots, s$, con $d_1|d_2|\ldots|d_t$, $d_1'|d_2'|\ldots|d_s'$. Entonces $s = t$ y $d_i$ es asociado con $d_i'$, $i = 1, \ldots, t$.

**a.** Si $U + 1$ es el primer subíndice tal que $d_i = 0$ y $v + 1$ es el priemr subíndice tal que $d_j' = 0$, entonces $M_1 \oplus \cdots \oplus M_u = M_T = M_1' \oplus \cdots \oplus M_v'$, de donde $M_{u+1} \oplus \ldots\ oplusM_t \cong M/M_T \cong M_{v+1}' \oplus \ldots\ oplusM_s'$; con cada uno de los sumandos isomorfo a $R$. Al ser $M/M_T$ un módulo libre, tenemos que $t - u = s - v$.

**b.** Supongamos $u \geq v$. Si $u = 0$, entonces $v = 0$ y deducimos que $s = t$, por lo que $m$ es un módulo libre de rango $s$, y ambas son descomposiciones en términos de bases. Supongamos $U \neq 0$. Construímos un epimorfismo $\epsilon F \twoheadrightarrow M_T$, con $F$ libre de rango $u \geq v$. Queremos construir bases de $N = \mathrm{Ker}(\epsilon)$ asociadas a cada una de las descomposiciones de $M_T$ de un determinado tipo; ésto lo haremos en el item siguiente.

**c.** Sabemos que dado un epimorfismo como en b. y una descomposición en submódulos cíclicos no triviales $M_T = Rx_1 \oplus \cdots \oplus Rx_l$, $l \geq u$, $o(x_i) = b_i$ , $b_l|b_{l-1}\ldots|b_1$, existe una base $\{f_1, \ldots f_u\}$ de $F$ tal que $\epsilon(f_i) = y_i$ , $y_i \in Rx_i$, $o(f_i) = b_i$, $1 \leq i \leq l$, $\epsilon(f_i) = 0$ si $l < i \leq u$. Afirmamos que en este caso ($M_T$ de torsión) $N$ tiene el mismo rango libre que $F$, y que existe una base de $N$ tal que la matriz de cambio de base respecto a una base de $F$ es de la forma $\mathrm{diag}(1, \ldots 1, b_l, \ldots, b_1)$, con $u - l$ unos.

Alcanza con mostrar $N = R(b_1 f_1) \oplus \cdots \oplus R(b_l f_l) \oplus Rf_{l+1} \oplus Rf_u$.

**d.** De la parte c) se deduce que existen bases de $N$ con matriz de cambio de base respecto a una base (no necesariamente la misma)de la forma $A = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_u)$ y $B = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, d_1', \ldots, d_v')$. Como todaslas amtrices de cambio de base en un módulo libre son equivalentes, tenemos que $A \equiv B$. Pero entonces sabemos que los coeficientes $A_{ii}$ y $B_{ii}$ (notación obvia) son asociados.

**e.** Terminar el teorema.

**2.** Sea $M$ un módulo de torsión (es decir $M = T(M)$) finitamente generado sobre un dominio de ideales principales. Describir los submódulos de $M$, probar que, salvo isomorfismos, hay una cantidad finita y que para todo submódulo $N$ de $M$ existe un submódulo de $M$ isomorfo a $M/N$.

**3.** Determinar el número de grupos abelianos no isomorfos

i) de orden 360.

ii) de orden menor o igual a 20.