Algebra I

Segundo semestre 2002

Práctico 1

1. Sea G un grupo.

a. Probar que $(a^n)^m = a^{nm}$ y que $a^n a^m = a^{n+m} \quad \forall a \in G$ y $n, m \in \mathbb{Z}$.

b. Probar que si G es abeliano se tiene $(ab)^n = a^n b^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, $a, b \in G$.

c. Probar que si G es un grupo tal que $(ab)^2 = a^2 b^2$ para todo $a, b \in G$, entonces G es abeliano.

2. Sea X un conjunto no vacío, y $\mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia (es decir, la familia de subconjuntos de X). Si $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se define $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, y $AB = A \cap B$. Vimos en teórico que estas operaciones hacen de $\mathcal{P}(X)$ un anillo conmutativo con unidad. ¿Cuáles son los elementos invertibles?

3. Sea A un anillo con unidad 1.

a. Probar que $(-1)a = -a$ para todo $a \in A$.

bf b. Si $a \in A$ posee una inversa a izquierda b y otra a derecha c –es decir $ba = ac = 1$–, entonces $b = c$, y por lo tanto a tiene inverso.

4. Determinar cuáles de las siguientes estructuras son anillos y, en caso de que los sean, si son conmutativos y si tienen unidad.

a. $(\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\times})$, donde $n \tilde{+} m = n + m + 1$, $n \tilde{\times} m = n + m + nm$.

b. Los racionales que se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$, y b no es un múltiplo de 3, con la suma y el producto habituales.

c. Los racionales que se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$, y b no es un múltiplo de 4, con la suma y el producto habituales.

d. $A = \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{R} \}$, con las operaciones habituales en $M_2(\mathbb{C})$.

5. Un *anillo de Boole* es un anillo R tal que $x^2 = x$ para todo $x \in R$.

a. Probar que si R es un anillo de Boole se tiene que $x + x = 0$ para todo $x \in R$.

b. Probar que $\mathcal{P}(X)$, con la estructura definida en el ejercicio anterior, es un anillo de Boole.

6. *Anillo de cuaterniones.* Se consideran las matrices $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in M_2(\mathbb{C})$, dadas por:

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $K = \{ a\mathbf{Id} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$, donde $\mathbf{Id}$ es la matriz identidad.

a. Probar que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{Id}$ y que $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$.

b. Probar que K es un anillo con unidad no conmutativo con la suma y producto habituales en $M_2(\mathbb{C})$.

c. Si $x \in K$, y $x \neq 0$, probar que x es invertible (Sugerencia: probar que $x^{-1} = \lambda^{-1}(a\mathbf{Id} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k})$, si $x = a\mathbf{Id} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ y $\lambda = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$).

7. Dados un anillo R y un subconjunto no vacío S de R, sea

$$C(S) = \{ x \in R : xs = sx \quad \forall s \in S \}.$$

a. Probar que $C(S)$ es un subanillo de R.

b. El subanillo $C(R)$ se llama *centro* de R. Probar que el centro de R es un anillo conmutativo, que tiene unidad cuando R tiene.

8. a. Sean G un grupo abeliano, S un conjunto no vacío y $M(S,G)$ el conjunto de funciones de S en G. Se define la suma en $M(S,G)$ mediante: $(f+g)(s) = f(s)+g(s)$, para todo $f,g \in M(S,G)$, y $s \in S$. Probar que $M(S,G)$ es un grupo abeliano.
b. Sea R un anillo. Probar que $M(S,R)$ es un anillo con la multiplicación definida por: $(fg)(s) = f(s)g(s)$, para todo $f,g \in M(S,R)$, y $s \in S$.
c. Dado un grupo abeliano G, sea $\text{End}(G)$ el conjunto de endomorfismos de G en G (es decir, de funciones $f : G \longrightarrow G$ tales que $f(x+y) = f(x)+f(y)$). Probar que $\text{End}(G)$ es un subgrupo de $M(G,G)$, y que es un anillo con la composición como producto.

9. Sea $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i = \{a+bi : a,b \in \mathbb{Z}\}$. **a.** Probar que $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.
b. Probar que la función $\phi : \mathbb{Z}+\mathbb{Z}i \longrightarrow M_2(\mathbb{Z})$ dada por $\phi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es un homomorfismo de anillos.

NOTA: La resolución del problema 4 deberá ser incluida en la carpeta de ganancia de curso cuyo plazo de presentación vence el 17 de octubre.