

El Proceso de Ornstein Uhlenbeck Fraccionario.

Juan Kalemkerian.

jkalem@cmat.edu.uy, jkalem@fing.edu.uy.

Facultad de Ciencias (Centro de Matemática),
Facultad de Ingeniería (IMERL).
Universidad de la República.

5º Coloquio Uruguayo de Matemática, Montevideo,
Uruguay.

21 al 23 de diciembre de 2015.

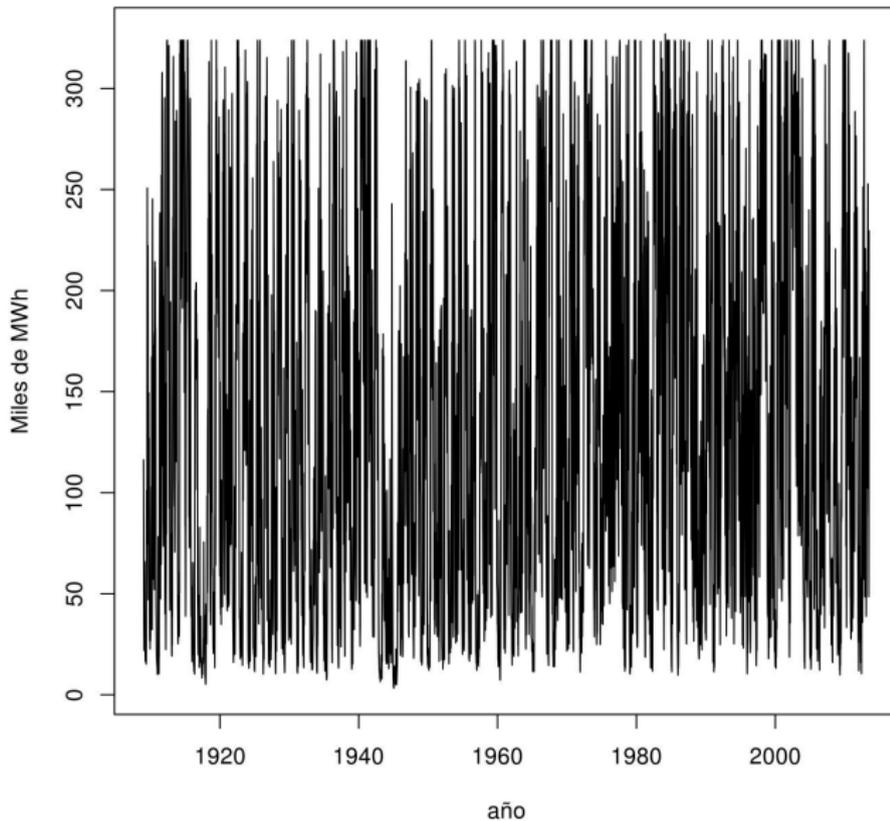
Contenidos

- 1 Introducción-Preliminares
- 2 mBf
 - Procesos autosimilares.
 - Movimiento Browniano fraccional.
 - Dos pilares.
 - mBf como límite de caminatas aleatorias.
- 3 FOU
 - Definición y propiedades.
 - Historia.
- 4 Estimación de parámetros
 - Predicción.
- 5 Aplicación
- 6 FOU de orden p
 - Definición y propiedades.
 - Estimadores de los parámetros.
 - Consistencia y normalidad asintótica.
- 7 Referencias

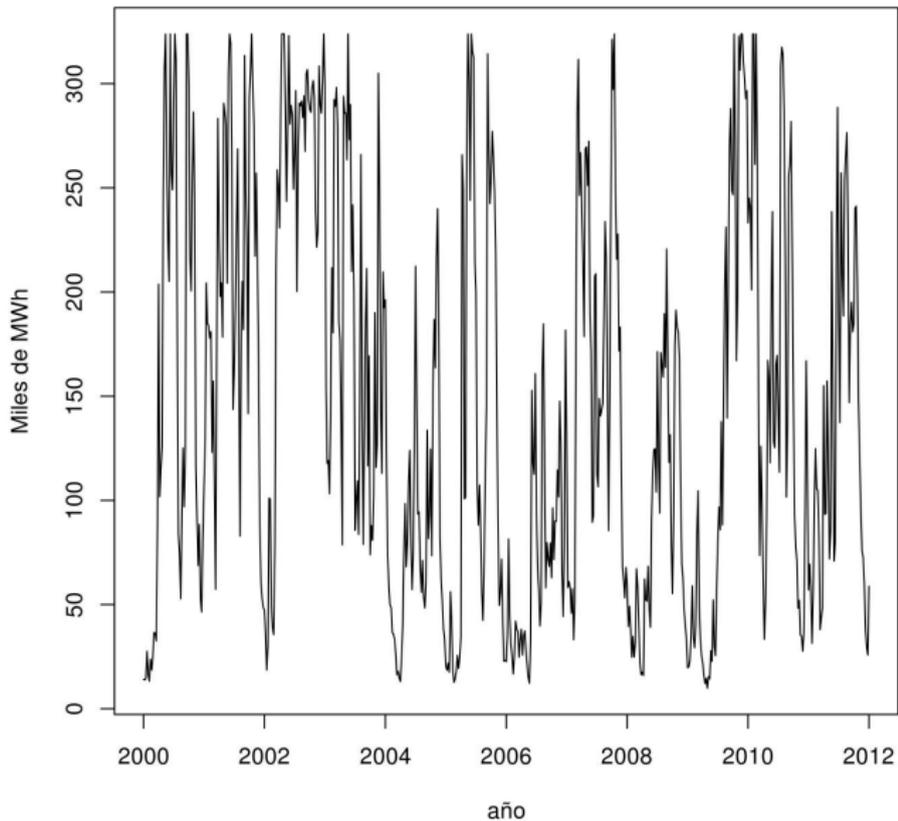
Contenidos

- 1 Introducción-Preliminares
- 2 mBf
 - Procesos autosimilares.
 - Movimiento Browniano fraccional.
 - Dos pilares.
 - mBf como límite de caminatas aleatorias.
- 3 FOU
 - Definición y propiedades.
 - Historia.
- 4 Estimación de parámetros
 - Predicción.
- 5 Aplicación
- 6 FOU de orden p
 - Definición y propiedades.
 - Estimadores de los parámetros.
 - Consistencia y normalidad asintótica.
- 7 Referencias

Energía semanal acumulada por las represas de Uruguay. Período 1909 (semana 1)-2013 (semana 26).



Energía semanal acumulada por las represas de Uruguay. Período 2000 (semana 1)-2012 (semana 52).



Definición

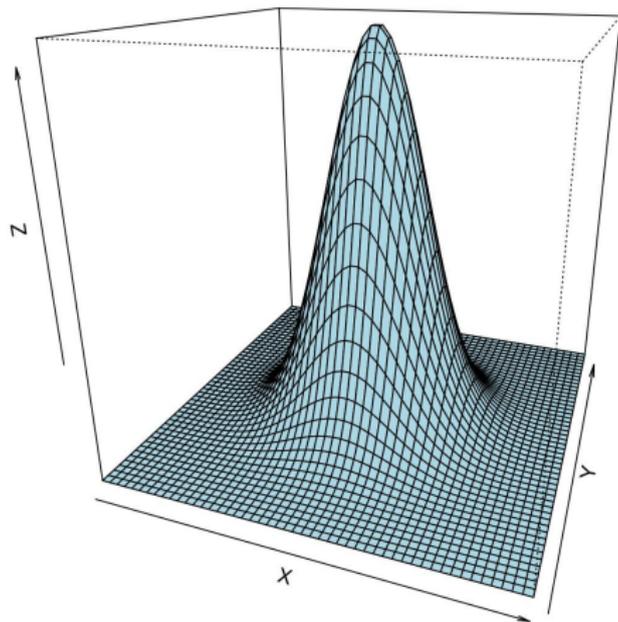
Dado un vector $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ y una matriz $n \times n$ simétrica definida positiva Σ , se dice que $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ tiene distribución normal multivariada con parámetros (μ, Σ) si y sólo si su densidad conjunta tiene la forma

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}}$$

para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Notación: $X \sim N(\mu, \Sigma)$.

Normal bivariada centrada, con matriz de covarianzas igual a la identidad.



Proposición

Si $X \sim N(\mu, \Sigma)$ entonces se cumplen las siguientes propiedades.

- 1 $\sum_{i,j} = \text{COV}(X_i, X_j)$ para todos $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$,
 $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
- 2 Si B es una matriz $k \times n$, entonces $BX \sim N(B\mu, B\Sigma B^T)$.
- 3 $X_i \sim N(\mu_i, \Sigma_{ii})$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
- 4 X_1, X_2, \dots, X_n son independientes si y sólo si Σ es diagonal.
- 5 Todo subvector de X sigue una distribución normal multivariada con su correspondiente vector de medias y matriz de covarianzas.

Observación

Si $X \sim N(\mu, \Sigma)$ entonces toda combinación lineal de las X_i es normal.

Observación

Si $X \sim N(\mu, \Sigma)$ entonces incorrelación implica independencia.

Proposición

Si $(X, Y)^T \sim N(\mu, \Sigma)$ siendo $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$,

$Y = (Y_1, \dots, Y_k)$, $\mu = (\mu_X, \mu_Y)^T$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_X & \Sigma_{X,Y} \\ \Sigma_{Y,X} & \Sigma_Y \end{pmatrix}$

entonces

$Y/X = x \sim N(\mu_{Y/X}, \Sigma_{Y/X})$ siendo

$$\mu_{Y/X} = \mu_Y + \Sigma_{Y,X} \Sigma_X^{-1} (x - \mu_X) \text{ y}$$

$$\Sigma_{Y/X} = \Sigma_Y - \Sigma_{Y,X} \Sigma_X^{-1} \Sigma_{X,Y}.$$

Definición

Si Σ es simétrica semidefinida positiva, se define en este caso $X \sim N(\mu, \Sigma)$ como $X = \mu + AZ$ siendo $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$ donde Z_1, Z_2, \dots, Z_n son i.i.d $\sim N(0, 1)$ y A una matriz tal que $AA^T = \Sigma$.

Definición

Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathbb{A}, P) y un intervalo I , se dice que $\{X_t\}_{t \in I}$ es un proceso estocástico, si y sólo si $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son variables aleatorias para todo $t \in I$.

Dada una familia de distribuciones en dimensión finita, que cumplan una condición de compatibilidad entre ellas, existe un proceso estocástico tal que sus distribuciones finito dimensionales coinciden con las de la familia. Precisamos lo anterior con el siguiente teorema de existencia de Kolmogorov.

Teorema (Kolmogorov)

Dada una familia de distribuciones finito dimensionales

$$\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n, n \in \mathbb{N}\}$$

tales que para todos $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ y para todos $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ y $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_m$ con $\{s_1, s_2, \dots, s_m\} \subset \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ se cumple que

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n} \circ \pi^{-1} = F_{s_1, s_2, \dots, s_m}$$

siendo $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la proyección a las s_1, s_2, \dots, s_m coordenadas, entonces existe un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ tal que para todos n y $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0$ se cumple que la distribución de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ es F_{t_1, t_2, \dots, t_n} .

Definición

Se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in I}$ es un proceso gaussiano si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ y todos $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$ se cumple que la distribución de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ es normal multivariada.

Definición

Se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in I}$ es débilmente estacionario si y sólo si se cumple que:

- $X_t \in L^2$ para todo $t \in I$ (esto es $\mathbb{E}(X_t^2) < +\infty$),
- $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ para todo $t \in I$,
- $\text{COV}(X_t, X_{t+k}) = \rho(k)$ para todos $t \in I$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $t+k \in I$.

Definición

Se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in I}$ es fuertemente estacionario si y sólo si para todos $n, k \in \mathbb{N}$, y todos $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$ con $t_1 + k, t_2 + k, \dots, t_n + k \in I$ se cumple que la distribución de $(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k})$ es la misma que la de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$.

Observación

Todo proceso en L^2 fuertemente estacionario, es débilmente estacionario.

Observación

Un proceso gaussiano es fuertemente estacionario si y sólo lo es débilmente.

Definición

Se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in I}$ tiene incrementos independientes si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$, y todos $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in I$ se cumple que $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_{n-1}} - X_{t_n}$ son independientes.

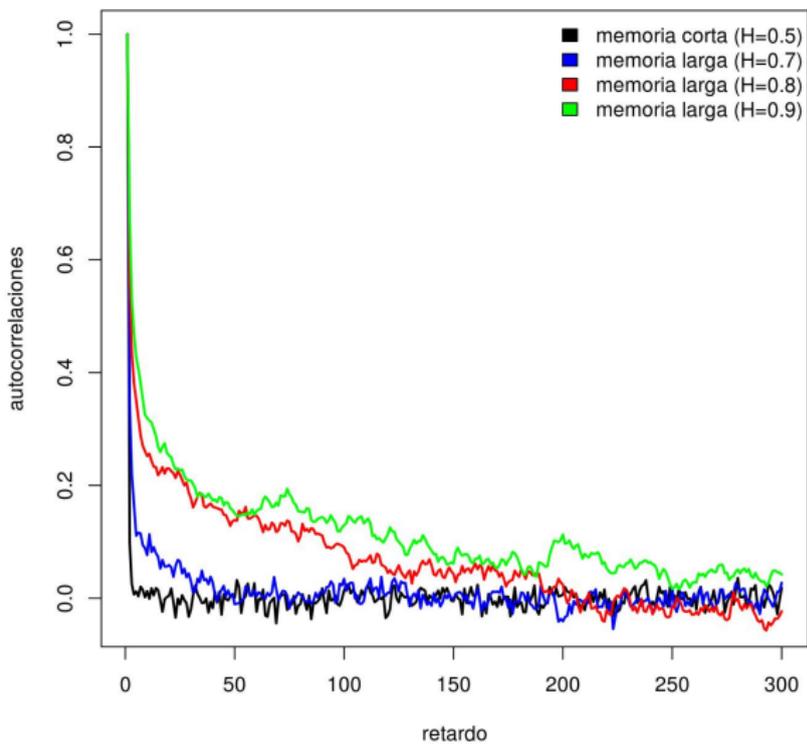
Definición

Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ en L^2 , débilmente estacionario se dice que es de memoria larga si y sólo si

$$\rho(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{+\infty} |\rho(n)| = +\infty.$$

Se verá en el gráfico siguiente la superposición de funciones de autocorrelación correspondientes a modelos ARMA(1,0) (memoria corta), y ARFIMA(1,d,0) (memoria larga con distintos parámetros H), ambos modelos serán definidos más adelante.

Función de autocorrelación para 5000 datos simulados.



Definición

Dado un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$, se dice que $\{X'_t\}_{t \geq 0}$ es una versión de $\{X_t\}_{t \geq 0}$ si y sólo si está definido sobre el mismo espacio de probabilidad, y se cumple que

$$P(X_t = X'_t) = 1 \text{ para todo } t \geq 0.$$

El siguiente teorema de continuidad de Kolmogorov, asegura que acotaciones adecuadas de los momentos de los incrementos del proceso, implican continuidad de las trayectorias.

Teorema (Kolmogorov)

Si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso estocástico tal que existen constantes $p, c > 0$ y $\alpha > 1$ para las cuales se cumple que

$$\mathbb{E} (|X_t - X_s|^p) \leq c |t - s|^\alpha \text{ para todos } t, s \geq 0$$

entonces para todos $\varepsilon, T > 0$, existe $\{X'_t\}_{t \geq 0}$ versión de $\{X_t\}_{t \geq 0}$ y una variable aleatoria $Y_{\varepsilon, T}$ tales que casi seguramente se cumple

$$|X'_t - X'_s| \leq Y_{\varepsilon, T} |t - s|^{\alpha/p - \varepsilon} \text{ para todos } t, s \in [0, T].$$

Observación

El proceso $\{X'_t\}_{t \geq 0}$ tiene trayectorias de exponente $\alpha/p - \varepsilon$ Hölder continuas.

Contenidos

- 1 Introducción-Preliminares
- 2 **mBf**
 - Procesos autosimilares.
 - Movimiento Browniano fraccional.
 - Dos pilares.
 - mBf como límite de caminatas aleatorias.
- 3 FOU
 - Definición y propiedades.
 - Historia.
- 4 Estimación de parámetros
 - Predicción.
- 5 Aplicación
- 6 FOU de orden p
 - Definición y propiedades.
 - Estimadores de los parámetros.
 - Consistencia y normalidad asintótica.
- 7 Referencias

Definición

Dado un proceso $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ se dice que es autosimilar de parámetro $H \geq 0$ si y sólo si $\{X_{at}\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{d}{=} \{a^H X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ para todo $a > 0$, donde $\stackrel{d}{=}$ indica igualdad entre las distribuciones finito dimensionales.

Observación

Si $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es autosimilar, entonces $X_0 = 0$ c.s.

Observación

Si $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es autosimilar, en L^2 no nulo, entonces no puede ser estacionario, dado que si fuera estacionario, se tendría que

$$\mathbb{E} \left(X_t^2 \right) = \mathbb{E} \left(X_{2t}^2 \right) = 2^{2H} \mathbb{E} \left(X_t^2 \right)$$

entonces el proceso sería nulo.

Proposición

Si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es autosimilar, en L^2 y con incrementos estacionarios, entonces

$$\mathbb{E}(X_t X_s) = \frac{1}{2} \left(s^{2H} + t^{2H} - |s - t|^{2H} \right) \mathbb{E}(X_1^2).$$

Proof.

Partimos de

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t X_s) &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{E}(X_t^2) + \mathbb{E}(X_s^2) - \mathbb{E}(X_t - X_s)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(|t|^{2H} \mathbb{E}(X_1^2) + |s|^{2H} \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_0 - X_{s-t})^2 \right) = \\ \mathbb{E}(X_t X_s) &= \frac{1}{2} \left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s - t|^{2H} \right) \mathbb{E}(X_1^2). \end{aligned}$$



El siguiente teorema (Lamperti, 1962) vincula los procesos autosimilares con los estacionarios.

Teorema

Si $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es autosimilar de parámetro H , entonces el proceso definido como $Y_t = e^{-Ht} X_{e^t}$ es fuertemente estacionario. Recíprocamente, si $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es fuertemente estacionario, entonces el proceso definido por $X_t = t^H Y_{\ln t}$ es autosimilar de parámetro H .

Proof.

 \Rightarrow)

$$Y_{t+k} = e^{-H(t+k)} X_{e^{t+k}} = \\ e^{-kH} e^{-Ht} X_{e^t e^k} \stackrel{d}{=} e^{-Ht} X_{e^t} = Y_t.$$

 \Leftarrow) Dado $a > 0$, tenemos

$$X_{at} = a^H t^H Y_{\ln at} = a^H t^H Y_{\ln t + \ln a} \stackrel{d}{=} a^H t^H Y_{\ln t}.$$



Definición

Se dice que un proceso $\{B_H(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es un movimiento browniano fraccional (mBf) de parámetro $H \in (0, 1)$ si y sólo si:

- *es gaussiano;*
- *tiene trayectorias continuas c.s.;*
- *es centrado (esto es $\mathbb{E}(B_H(t)) = 0$ para todo t);*
- *$\mathbb{E}(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |s - t|^{2H})$ para todos s, t .*

Aceptando (por un momento) la existencia de un proceso que cumpla con esta definición, realizamos algunas observaciones que surgen de la definición.

Observación

Cuando $H = 1/2$ se tiene que

$\mathbb{E}(B_H(t)B_H(s)) = s \wedge t$ por lo que $\{B_{1/2}(t)\}_{t \geq 0}$ queda un movimiento browniano estándar.

Observación

$B_H(0) = 0$.

Observación

Todo movimiento browniano fraccional, es autosimilar de parámetro H .

Observación

El único proceso gaussiano autosimilar de parámetro H es el mBf.

Observación

$\mathbb{E} (B_H(t) - B_H(s))^2 = |t - s|^{2H}$. De esta igualdad, se deduce (teorema de continuidad de Kolmogorov mediante) que si $H > 1/2$ entonces las trayectorias del mBf son continuas casi seguramente con exponente de Hölder $H - \varepsilon$ (para todo $\varepsilon > 0$).

Observación

Si $H < 1/2$, en Mandelbrot y Van Ness (1968), se prueba que las trayectorias son continuas casi seguramente.

Proposición

Los incrementos del mBf son estacionarios y en el caso en que $H > 1/2$, son de memoria larga.

Proof.

Si le llamamos $X_t = B_H(t) - B_H(t - 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t X_{t+n}) &= \\ \mathbb{E}((B_H(t) - B_H(t - 1))(B_H(t + n) - B_H(t + n - 1))) &= \\ \frac{1}{2} [(n + 1)^{2H} + (n - 1)^{2H} - 2n^{2H}] &= \\ \frac{n^{2H}}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2H} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2H} - 2 \right] &\sim \\ H(2H - 1)n^{2H-2} & \end{aligned}$$

por lo que si $H > 1/2$ se tiene que $\rho(n) \rightarrow 0$ y

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \rho(n) = +\infty.$$



De aquí se deduce además que, para n suficientemente grande

- si $H > 1/2$ los incrementos del mBf están positivamente

correlacionados,

- si $H < 1/2$ los incrementos del mBf están negativamente correlacionados,
- si $H = 1/2$, los incrementos son no correlacionados y por lo tanto independientes.

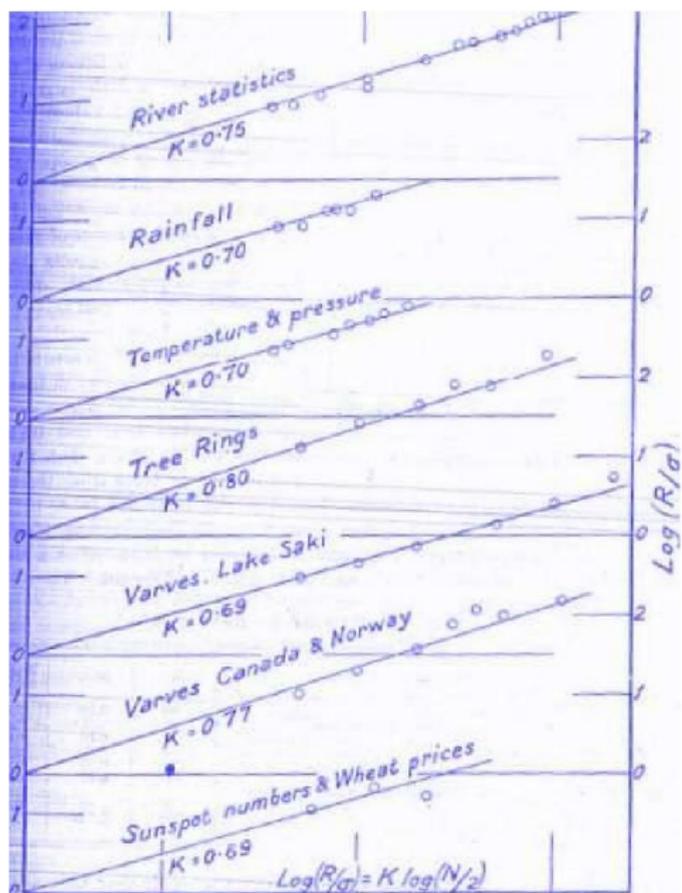


Harold Edwin Hurst, fue un hidrólogo inglés nacido el 1 de enero de 1880 en Leiceister y es conocido como “Abu Nil” (el padre del Nilo). En 1906 Hurst fue a El Cairo con la intención de quedarse unos meses para estudiar algunos aspectos hidrológicos del Nilo. Terminó quedándose 62 años hasta el día de su muerte el 7 de diciembre de 1978. A lo largo de esos años recorrió varias veces el Nilo, estudiando la manera de modelar estadísticamente diversos fenómenos naturales. En este caso en particular, Hurst se dio cuenta que los modelos estadísticos que se consideraban en esa época subestimaban la complejidad de las fluctuaciones hidrológicas. Hurst partió inicialmente del problema de construir un embalse de dimensiones tales que compensara la irregularidad del flujo de un río, en este caso el Nilo. Justamente en 1902 se inaugura la presa de Asuán, que resultó superada en su altura por las inundaciones del Nilo, fue levantada en 1907 y luego nuevamente en 1929. En 1933 fue ampliada y famosa se hizo la frase de Sir Murdoch en la inauguración: “Para que esta

presa se caiga hace falta que todos los dioses egipcios se pongan de acuerdo y nos echen el Nilo encima”. El 13 de octubre de 1946 comenzó una lluvia que no cesaría durante 10 días.

En su trabajo clave de 1951, Hurst calcula la distribución de la diferencia entre el máximo y el mínimo de un paseo al azar y prueba que $\mathbb{E}(R) \cong 1,25\sigma\sqrt{n}$ (siendo n la longitud de la serie observada y R una variable vinculada al rango muestral) y muestra que el exponente conveniente de n en estos casos es variable y es un parámetro de autosimilitud (que lo llamó K) vinculado con el fenómeno que hoy llamamos de memoria larga, y observó a su vez que este fenómeno se observaba también en otros registros de fenómenos naturales como lo son las precipitaciones, la temperatura, el grosor de los anillos de ciertos árboles, el grosor de las capas de barro en el lago Saki en Crimea, en las manchas solares y en fenómenos bursátiles como el valor de rescate de ciertas acciones. En Graneri (2014) se puede ver un análisis de parte de este

resultado demostrado por Hurst. Los modelos existentes hasta ese momento, sugerían utilizar $1/2$ como el exponente a tener en cuenta para n , sin embargo Hurst descubrió que en todos los ejemplos anteriormente citados había que considerar el exponente K que tomaría valores entre 0.69 y 0.8 . En la figura siguiente se observa una foto sobre los hallazgos de Hurst publicados en su artículo de 1951 .





Benoit Mandelbrot, nace en Varsovia el 20 de noviembre de 1924 y muere el 14 de octubre de 2010 en Cambridge, USA. Es conocido principalmente por el estudio matemático de los fractales. La foto es del 13 de febrero de 2010, dando una conferencia TED, la imagen que se ve a su espalda es el llamado conjunto de Mandelbrot, uno de los ejemplos más conocidos y estudiados de fractales. Los estudios de Hurst, llevaron a Mandelbrot a idear un modelo que no cumpliera el teorema funcional del límite. En 1965 propone un modelo estacionario donde las correlaciones tienden a cero muy lentamente, y el teorema central del límite no se cumple. Dicho modelo es el movimiento browniano fraccional. En su trabajo de 1968 donde define los procesos autosimilares, donde el mBf queda como caso particular. Es a partir de estos trabajos que el exponente de autosimilaridad lle vada el nombre H en homenaje a Hurst y el cual se ha mantenido hasta nuestros días.

Para demostrar que existe un proceso que cumple con la definición propuesta para el mBf, ya observamos que la hipótesis de continuidad de las trayectorias puede asegurarse vía el teorema de continuidad de Kolmogorov (para $H > 1/2$), o por lo probado por Mandelbrot & Van Ness (cuando $H \leq 1/2$), luego, debido al teorema de Kolmogorov de existencia de un proceso estocástico a partir de la definición de sus distribuciones finito dimensionales, bastará con ver la existencia de un proceso gaussiano que tenga a la función $\frac{1}{2} \left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |s - t|^{2H} \right)$ como función de covarianzas. La siguiente proposición prueba que la misma define una función de covarianzas.

Proposición

La función

$$r(s, t) := |t|^{2H} + |s|^{2H} - |s - t|^{2H}$$

es semidefinida positiva, esto es: para todo $n \in \mathbb{N}$ y todos

$$a_1, a_2, \dots, a_n, t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$$

se cumple que

$$\sum_{i,j=1}^n a_i a_j r(t_i, t_j) \geq 0.$$

Proof.

La prueba se esquematiza en tres pasos.

- (1) Se prueba que para todo $s > 0$ se cumple que

$$\int_0^{+\infty} (1 - e^{-xs}) x^{-1-H} dx = \frac{s^H \Gamma(1-H)}{H}.$$

Se integra por partes y luego se usa la definición de la función Γ .

- (2) Definimos $t_0 = 0$, $a_0 = -\sum_{i=1}^n a_i$ y utilizando en la fórmula anterior $s = |t_i - t_j|$ se llega a que

$$\sum_{i,j=1}^n a_i a_j r(t_i, t_j) = - \sum_{i,j=0}^n a_i a_j |t_i - t_j|^{2H} =$$

$$\frac{H}{\Gamma(1-H)} \int_0^{+\infty} \sum_{i,j=0}^n a_i a_j e^{-x(t_i - t_j)^2} x^{-1-H} dx.$$

Proof.

(3) Por último, utilizando que e^{-xt^2} es la función característica de una variable $N(0, 2x)$ se prueba que

$$\sum_{i,j=0}^n a_i a_j e^{-x(t_i - t_j)^2} \geq 0.$$



En el siguiente teorema, probamos que las trayectorias del mBf son casi seguramente no derivables en ningún punto.

Teorema

Dado un mBf $\{B_H(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, entonces

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{B_H(t) - B_H(t_0)}{t - t_0} \right| = +\infty \text{ c.s.}$$

Proof.

Teniendo en cuenta que el proceso tiene incrementos estacionarios y que es autosimilar de parámetro H , se tiene que

$$\frac{B_H(t) - B_H(t_0)}{t - t_0} \stackrel{d}{=} \frac{B_H(t - t_0)}{t - t_0} \stackrel{d}{=} (t - t_0)^{H-1} B_H(1).$$

Fijado $k > 0$, definimos los conjuntos

$$A_n := \left\{ \sup_{0 < s < 1/n} \left| \frac{B_H(s)}{s} \right| > k \right\},$$

entonces $A_n \supset A_{n+1}$. Luego,

$$P(A_n) \geq P\left(\left| \frac{B_H(1/n)}{1/n} \right| \geq k\right) =$$

$$P\left(|B_H(1)| \geq n^{H-1}k\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Observación

La demostración anterior se mantiene válida para cualquier otro proceso autosimilar de parámetro $H \in (0, 1)$ de incrementos estacionarios.

Enunciamos a continuación otras propiedades que tienen los mBf.

- Todo mBf tiene α - variación no acotada si y sólo si $\alpha H < 1$.
- Todo mBf tal que $H \neq 1/2$, no es una semimartingala.
- Todo mBf tal que $H \neq 1/2$, no es un proceso de Markov.

El hecho de que el mBf no tenga variación acotada, implica que no exista en muchos casos la $\int_a^b f(x)dB_H(x)$ como integral de Riemann-Stieltjes aún cuando f sea continua.

El resultado que enunciamos a continuación, se debe a Lamperti (1962) y en el mismo se ve que los procesos límites

de sumas parciales normalizadas son autosimilares y muestra también que todo proceso autosimilar puede ser pensado como límite de sumas parciales normalizadas.

Teorema

Si X_1, X_2, \dots sucesión estacionaria de variables aleatorias y $\{a_n\}$ es una sucesión real tal que $a_n \rightarrow +\infty$ tales que

$$\left\{ a_n^{-1} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i \right\}_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow{w} \{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$$

donde $P(Y_1 \neq 0) > 0$. Entonces existe $H > 0$ tal que

$\frac{a_{[nu]}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u^H$ para todo $u > 0$ y además $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es autosimilar

de parámetro H y tiene incrementos estacionarios.

Recíprocamente, si $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es autosimilar de parámetro H entonces existe X_1, X_2, \dots sucesión estacionaria de variables aleatorias y una sucesión real $\{a_n\}$ tales que $a_n \rightarrow +\infty$ y

$$\left\{ a_n^{-1} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i \right\}_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow{w} \{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Por último, mostramos en el siguiente teorema debido a Sottinen (2001), que el mBf puede ser obtenido también como límite de caminatas aleatorias.

Partimos de una sucesión $\{X_i^{(n)}\}_{i,n \in \mathbb{N}}$ de variables i.i.d definidas en determinado espacio de probabilidad tales que $\mathbb{E}(X_i^{(n)}) = 0$ y $\mathbb{V}(X_i^{(n)}) = 1$ para todos i, n . Utilizaremos en lo que sigue a la función

$$K_H(t, s) := C_H s^{1/2-H} \int_s^t (u-s)^{H-3/2} u^{H-1/2} du$$

definida para $t > s > 0$, siendo

$$C_H := \left(\frac{H(2H-1)}{B(H-1/2, 2-2H)} \right)^{1/2}.$$

Ahora definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ la sucesión de procesos

$\{B^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $B^{(n)} := \{B_t^{(n)}\}_{t \geq 0}$ mediante

$$B_t^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \left(n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K_H \left(\frac{[nt]}{n}, s \right) ds \right) X_i^{(n)}.$$

Teorema (Sottinen (2001))

$$B^{(n)} \xrightarrow{w} B_H.$$

Proof.

Para entender la prueba hay que utilizar resultados sobre convergencias de procesos estocásticos (no están definidos en estas notas), se sugiere ver el libro de Billingsley (1968). Se probará en primer lugar que las distribuciones finito dimensionales convergen en distribución a las del proceso B_H , y luego se probará que la sucesión es tensa. Fijados $d \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbb{R}$, $t_1, t_2, \dots, t_d \in [0, T]$, observamos en primer lugar que

$$\mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^d a_j B_H(t_j) \right)^2 = \int_0^T K_H(t_j, s) K_H(t_k, s) ds.$$

Probaremos ahora que la sucesión $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $Y_n := \sum_{j=1}^d a_j B_{t_j}^{(n)}$ verifica que \square

Proof.

$$Y_n \xrightarrow{d} N \left(0, \int_0^T K_H(t_j, s) K_H(t_k, s) ds \right).$$

Para todo n , se tiene que $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ porque $\mathbb{E}(X_i^{(n)}) = 0$ cualesquiera sean i, n . Definimos

$$C_{i,j,n} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K_H \left(\frac{[nt_j]}{n}, s \right) ds.$$

$$\mathbb{E} \left(B_{t_j}^{(n)} B_{t_k}^{(n)} \right) =$$

$$\mathbb{E} \left(n \sum_{i=1}^{[nt_j]} C_{i,j,n} X_i^{(n)} \sum_{h=1}^{[nt_k]} C_{h,k,n} X_h^{(n)} \right).$$



Proof.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y_n) &= \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_k a_j \mathbb{E} \left(B_{t_j}^{(n)} B_{t_k}^{(n)} \right) = \\ & n \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_k a_j \sum_{i=1}^{[nT]} C_{i,j,n} C_{i,k,n}. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio en ambas integrales, existen $s_{i,j,n}$ y $s_{i,k,n}$ en $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ tales que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y_n) &= \\ & \frac{1}{n} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d a_k a_j \sum_{i=1}^{[nT]} K_H \left(\frac{[nt_j]}{n}, s_{i,j,n} \right) K_H \left(\frac{[nt_k]}{n}, s_{i,k,n} \right). \end{aligned}$$

Ahora, si tomamos límite cuando $n \rightarrow +\infty$ y teniendo en cuenta que K_H es continua, se obtiene



Proof.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor nT \rfloor} K_H \left(\frac{\lfloor nt_j \rfloor}{n}, s_{i,j,n} \right) K_H \left(\frac{\lfloor nt_k \rfloor}{n}, s_{i,k,n} \right) \rightarrow \int_0^T K_H(t_j, s) K_H(t_k, s) ds.$$

Por lo tanto hemos probado que

$$\mathbb{V}(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^d a_j B_H(t_j) \right)^2.$$

Definimos ahora

$$Y_i^{(n)} := \sqrt{n} X_i^{(n)} \sum_{k=1}^d a_k \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K_H \left(\frac{\lfloor nt_k \rfloor}{n}, s \right) ds.$$

Entonces escribimos Y_n como suma de variables

Proof.

$Y_n = \sum_{i=1}^{[nt]} Y_i^{(n)}$ y verificaremos la hipótesis del teorema central del límite de Lindeberg. Entonces,

$$\left(Y_i^{(n)}\right)^2 = n \left(X_i^{(n)}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^d a_k \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K_H\left(\frac{[nt_k]}{n}, s\right) ds\right)^2$$

y utilizando la desigualdad de Cauchy Schwartz primero, luego que $K_H(t, s)$ es creciente como función de t , y luego nuevamente Cauchy Schwartz, obtenemos

$$\begin{aligned} \left(Y_i^{(n)}\right)^2 &\leq \\ \left(X_i^{(n)}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^d a_k\right)^2 \sum_{k=1}^d \left(\sqrt{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K_H(T, s) ds\right)^2 &\leq \end{aligned}$$



Proof.

$$\left(X_i^{(n)}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^d a_k\right)^2 d \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (K_H(T, s))^2 ds \leq$$

$$\left(X_i^{(n)}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^d a_k\right)^2 d \int_0^{\frac{1}{n}} (K_H(T, s))^2 ds$$

donde en la última desigualdad se debe a que $K_H(t, s)$ es decreciente como función de s . Definimos los conjuntos

$$A_{n,i} := \left\{ \left| Y_i^{(n)} \right| > \varepsilon \sqrt{\mathbb{V}(Y_n)} \right\}$$

y $B_{n,i} :=$

$$\left\{ \left(X_i^{(n)}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^d a_k\right)^2 d \int_0^{\frac{1}{n}} K_H(T, s) ds > \varepsilon^2 \mathbb{V}(Y_n) \right\},$$

Proof.

entonces la desigualdad anterior implica que $A_{n,i} \subset B_{n,i}$. Ahora teniendo en cuenta esta inclusión y el hecho de que las $X_i^{(n)}$ son idénticamente distribuidas, se tiene que

$$\mathbb{E} \left[\left(Y_i^{(n)} \right)^2 \mathbf{1}_{A_{n,i}} \right] \leq$$

$$\mathbb{V}(Y_n) \mathbb{E} \left[\left(X_i^{(n)} \right)^2 \mathbf{1}_{B_{n,i}} \right] = \mathbb{V}(Y_n) \mathbb{E} \left[\left(X_1^{(n)} \right)^2 \mathbf{1}_{B_{n,1}} \right]$$

luego,

$$\frac{1}{\mathbb{V}(Y_n)} \sum_{i=1}^{[nT]} \mathbb{E} \left[\left(Y_i^{(n)} \right)^2 \mathbf{1}_{A_{n,i}} \right] \leq$$

$$\mathbb{E} \left[\left(X_1^{(n)} \right)^2 \mathbf{1}_{B_{n,1}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Por lo tanto se verifica la condición de Lindeberg lo que



Proof.

concluye la prueba de que las distribuciones finito dimensionales de $\{B_t^{(n)}\}_{t \geq 0}$ convergen en distribución a las correspondientes a $\{B_H(t)\}_{t \geq 0}$. Probaremos ahora la tensión. Dados $0 < s < t$,

$$\mathbb{E} \left(B_t^{(n)} - B_s^{(n)} \right)^2 =$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\sqrt{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left[K_H \left(\frac{[nt]}{n}, u \right) - K_H \left(\frac{[ns]}{n}, u \right) \right] du X_i^{(n)} \right)^2 \\ &= n \mathbb{E} \sum_{i=1}^{[nt]} \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(K_H \left(\frac{[nt]}{n}, u \right) - K_H \left(\frac{[ns]}{n}, u \right) \right) du \right)^2 \end{aligned}$$

utilizando Cauchy Schwartz, la última expresión queda □

Proof.

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(K_H \left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}, u \right) - K_H \left(\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}, u \right) \right)^2 du \leq \\ &\int_0^t \left(K_H \left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}, u \right) - K_H \left(\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}, u \right) \right)^2 du = \\ &\quad \left| \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} - \frac{\lfloor ns \rfloor}{n} \right|^{2H}. \end{aligned}$$

Si $0 < s < t < u$, se tiene que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(B_t^{(n)} - B_s^{(n)} \right) \left(B_u^{(n)} - B_s^{(n)} \right) \leq \\ &\left[\mathbb{E} \left(B_t^{(n)} - B_s^{(n)} \right)^2 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E} \left(B_u^{(n)} - B_s^{(n)} \right)^2 \right]^{1/2} \leq \end{aligned}$$



Proof.

$$\left| \frac{[nt]}{n} - \frac{[ns]}{n} \right|^H \left| \frac{[nu]}{n} - \frac{[ns]}{n} \right|^H \leq \left| \frac{[nu]}{n} - \frac{[ns]}{n} \right|^{2H}.$$

Si $u - s < 1/n$, entonces s y t o t y u están en el mismo subintervalo $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n})$ para algún m por lo que

$$\mathbb{E} \left| B_t^{(n)} - B_s^{(n)} \right| \left| B_u^{(n)} - B_s^{(n)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

y si $u - s \geq 1/n$ entonces

$$\mathbb{E} \left| B_t^{(n)} - B_s^{(n)} \right| \left| B_u^{(n)} - B_s^{(n)} \right| \leq 2^{2H} |u - s|^{2H}$$

entonces como $H > 1/2$ el teorema 15.6 de Billingsley (1968) implica que $\{B^{(n)}\}$ es tensa. □

Contenidos

- 1 Introducción-Preliminares
- 2 mBf
 - Procesos autosimilares.
 - Movimiento Browniano fraccional.
 - Dos pilares.
 - mBf como límite de caminatas aleatorias.
- 3 FOU
 - Definición y propiedades.
 - Historia.
- 4 Estimación de parámetros
 - Predicción.
- 5 Aplicación
- 6 FOU de orden p
 - Definición y propiedades.
 - Estimadores de los parámetros.
 - Consistencia y normalidad asintótica.
- 7 Referencias

Definición

Dados $\lambda, \sigma > 0$ y $\{B_H(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ movimiento browniano fraccional, si para cada t definimos $X_t = \sigma \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} dB_H(s)$, entonces se dice que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es un proceso de Ornstein Uhlenbeck fraccionario.

Notación: $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}} \sim FOU(\lambda, \sigma, H)$.

Observación

La integral de la definición anterior respecto del mBf, es la de Riemann-Stieltjes, y su existencia está justificada en el siguiente teorema debida a Cheridito, Kawaguchi & Maejima (2003).

Teorema

Dados un mBf $\{B_H(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ con parámetro de Hurst $H \in (0, 1]$, $\lambda, \sigma > 0$, $a \in [-\infty, +\infty)$ y ξ variable aleatoria, entonces para casi todo $w \in \Omega$ se cumple que

- 1 $\int_a^t e^{\lambda s} dB_H(s, w)$ existe como integral de Riemann-Stieltjes y además es igual a

$$e^{\lambda t} B_H(t, w) - e^{\lambda a} B_H(a, w) - \lambda \int_a^t B_H(s, w) e^{\lambda s} ds.$$

- 2 Dada una variable aleatoria ξ , la única función continua que resuelve la ecuación $x(t) = \xi - \lambda \int_0^t x(s) ds + \sigma B_H(t)$ para $t \geq 0$ (la condición inicial es $x(0) = \xi$) es dada por

$$X_t(w) = e^{-\lambda t} \left(\xi(w) + \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dB_H(s, w) \right).$$

Proof.

Bastará con probar que $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{B_H(s)}{|s|^\gamma} = 0$ c.s. para todo $\gamma > H$,

ya que en ese caso $\int_a^t B_H(s) e^{\lambda s} ds$ existe, y luego, por el teorema de partes de la integral de Riemann-Stieltjes, $\int_a^t e^{\lambda s} dB_H(s)$ existe c.s. lo cual termina la prueba de 1.

- ① Probamos la afirmación observando que

$\tilde{B}_H(t) = \begin{cases} |t|^{2H} B_H(1/t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ es un mBf de parámetro H , luego escribimos

$$\frac{B_H(s)}{|s|^\gamma} = |t|^\gamma B_H(1/t) = \frac{\tilde{B}_H(t)}{|t|^{2H-\gamma}}.$$

Ahora aplicamos el teorema de continuidad de Kolmogorov y obtenemos el resultado.

- ② Le llamamos $z(t) = \int_0^t x(s) ds$, luego la ecuación toma la forma $z'(t) = \xi - \lambda z(t) + \sigma B_H(t)$, con $z(0) = 0$, cuya única

Proof.

solución es

$$z(t) = e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} (\xi + \sigma B_H(s)) ds.$$

Entonces, la solución buscada es

$$z'(t) = X_t = e^{-\lambda t} \left(\xi + \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dB_H(s) \right).$$

Corolario

$X_t(w) = e^{-\lambda t} \left(\xi(w) + \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dB_H(s, w) \right)$ es no derivable c.s.



Corolario

Bajo las hipótesis del teorema anterior, se tiene que en el caso particular de que $\xi = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda s} dB_H(s)$, resulta que la única solución continua de la ecuación es

$$X_t = \sigma \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} dB_H(s)$$

resultando además que esta solución es estacionaria.

Observación

Todo proceso FOU(λ, σ, H) es gaussiano (por ser límite de procesos gaussianos), centrado y estacionario (porque los incrementos de un movimiento browniano fraccionario son estacionarios).

Observación

Integrando por partes se obtiene otra expresión para el proceso

$$X_t = \sigma B_H(t) - \sigma \lambda \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} B_H(s) ds.$$

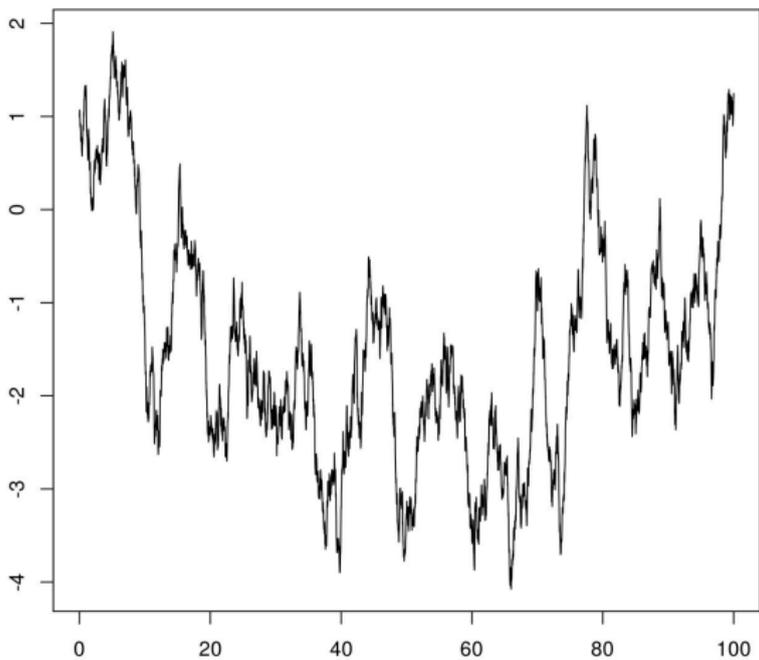
Observación

Cuando $H = 1/2$ se tiene el proceso de Ornstein Uhlenbeck habitual.

Así luce la trayectoria de un proceso

$FOU(\lambda = 0.3, \sigma = 1, H = 0.7)$ en el intervalo $[0, 100]$

observado en $n = 10.000$ puntos:



Langevin (1908) fue el primero en describir el movimiento de una partícula inmersa en líquido. El mismo describe la velocidad de la partícula v por la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{f}{m}v(t) + \frac{F(t)}{m}$$

siendo m la masa de la partícula, f el coeficiente de fricción, y $F(t)$ la fuerza resultante del choque con otras moléculas que puedan existir en las cercanías. Más tarde, Ornstein y Uhlenbeck (1930) imponen hipótesis de azar a la función $F(t)$ y con las mismas, deducen que para una condición inicial $v(0) = x \in R$, $v(t)$ queda con distribución normal con media $x e^{-\lambda t}$ y varianza $\frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t})$ siendo $\lambda = f/m$ y $\sigma^2 = 2fkT/m^2$ siendo k la constante de Boltzman y T la temperatura. En 1942, Doob notó que si $v(0)$ es una variable aleatoria normal e independiente de $F(t)$ para $t < 0$, entonces la solución de la ecuación de Langevin es estacionaria y se cumple además que $t^{1/2}v\left(\frac{\ln t}{2\lambda}\right)$ para $t > 0$ es un movimiento

browniano, de donde concluye que la solución de la ecuación es continua pero diferenciable en ningún punto.

Para enmendar esta aparentemente incongruencia (la solución de una ecuación diferencial no queda diferenciable), Doob le da un riguroso significado a las ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma $dX_t = -\lambda X_t dt + dN_t$ para el caso en el que $\{N_t\}$ sea un proceso de Levy, y mostró además que dicha ecuación estocástica con condición inicial $X_0 = x$, tiene por única solución

$$X_t = e^{-\lambda t} \left(x + \int_0^t e^{\lambda s} dN_s \right), t \geq 0.$$

La siguiente función será de utilidad puesto que aparecerá con mucha frecuencia en diversos cálculos y está vinculada con las covarianzas del proceso, en particular nos permitirá deducir que los FOU son procesos de memoria larga.

$$f_H(x) :=$$

$$e^{-x} \left(\Gamma(2H) - \int_0^x e^s s^{2H-1} ds \right) +$$

$$e^x \left(\Gamma(2H) - \int_0^x e^{-s} s^{2H-1} ds \right).$$

Probaremos a continuación propiedades de f_H . 

Teorema

f_H verifica las siguientes propiedades

- 1 f_H es decreciente.
- 2 f_H es derivable una vez pero no dos veces en $x = 0$.
- 3 $f_H(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$.
- 4 $f_H(x) \sim 2(2H - 1)x^{2H-2}$ cuando $x \rightarrow +\infty$.
- 5 $f_H(x) - f_H(0) = f_H(x) - 2\Gamma(2H) = -\frac{x^{2H}}{H} + o(x^{2H})$ cuando $x \rightarrow 0$.
- 6
$$f_H(x) = \frac{4\Gamma(2H)\sin(\pi H)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xs)s^{1-2H}}{1+s^2} ds =$$

$$\frac{4\Gamma(2H)\sin(\pi H)x^{2H}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(v)v^{1-2H}}{x^2+v^2} dv.$$

Proof.

- (1)
- (2) Evidente.
- (3) Se prueba similar a la demostración de (4).
- (4) Aplicaremos la regla de Bernoulli (L'Hôpital) y llegaremos a que el límite del cociente entre ambas expresiones es uno.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_H(x)}{x^{2H-2}} \stackrel{(*)}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \int_x^{+\infty} e^{-s} s^{2H-1} ds - e^{-x} \int_0^x e^s s^{2H-1} ds}{x^{2H-2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-s} s^{2H-1} ds - e^{-2x} \int_0^x e^s s^{2H-1} ds}{e^{-x} x^{2H-2}} \stackrel{\text{Bernoulli}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^{2H-1} + 2e^{-x} \int_0^x e^s s^{2H-1} ds}{-x^{2H-2} + (2H-2)x^{2H-3}} =$$

Proof.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{2H-1} - 2e^{-x} \int_0^x e^s s^{2H-1} ds}{x^{2H-2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x x^{2H-1} - 2 \int_0^x e^s s^{2H-1} ds}{e^x x^{2H-2}} \stackrel{\text{Bernoulli}}{=} 2(2H-1).$$

(*) se debe a que $e^{-x}/x^{2-2H} \rightarrow 0$.

(5)

$$\begin{aligned} f_H(x) - f_H(0) &= f_H(x) - 2\Gamma(2H) \\ &= \Gamma(2H) (e^x + e^{-x} - 2) \\ &\quad - e^{-x} \int_0^x e^s s^{2H-1} ds - e^x \int_0^x e^{-s} s^{2H-1} ds = \end{aligned}$$



Proof.

$$o(x^{2H}) = e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2H}}{n!(n+2H)} - e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2H}}{n!(n+2H)} =$$

$$o(x^{2H}) = \frac{x^{2H}}{H}.$$

- (6) En el corolario del teorema siguiente, obtendremos que $\mathbb{E}(X_0 X_t) = \frac{\sigma^2 H t^H (\lambda t)}{2 \lambda^{2H}}$, pero por otro lado, considerando las funciones $h(x) = e^{\lambda x} 1_{\{x \leq s\}}$ y $g(x) = e^{\lambda x} 1_{\{x \leq 0\}}$ y de acuerdo al producto interno definido en la página 289 de Pipiras & Taqqu (2000), se tiene que

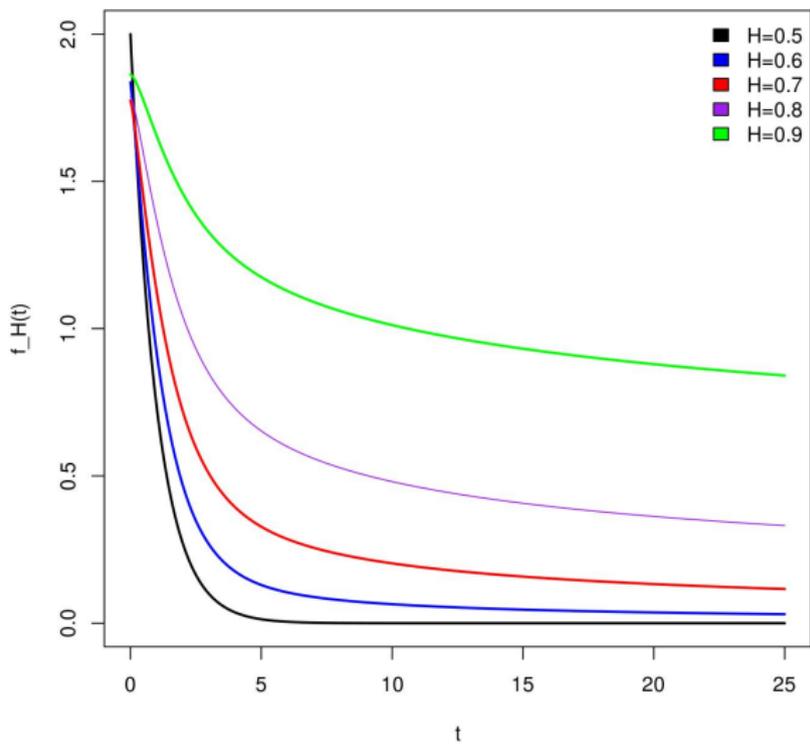
$$\mathbb{E}(X_0 X_t) = \sigma^2 e^{-\lambda s} \langle g, h \rangle =$$

$$\sigma^2 \frac{\Gamma(2H+1) \sin(\pi H)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} |x|^{1-2H}}{\lambda^2 + x^2} dx.$$

Proof.

Igualando ambas expresiones para $\mathbb{E}(X_0 X_t)$ y despejando f_H se obtiene el resultado. \square

Vemos los gráficos de las funciones f_H para distintos valores de H .

Gráfico de f_H para distintos valores de H 

Teorema

Dados

$X_t^{(1)} \sim FOU(\lambda_1, \sigma, H)$ y $X_t^{(2)} \sim FOU(\lambda_2, \sigma, H)$ generados por el mismo movimiento browniano fraccional $\{\sigma B_H(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Entonces para $t > 0$ se tiene que

$$\mathbb{E} \left(X_0^{(1)} X_t^{(2)} \right) =$$

$$\frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \lambda_2^{1-2H} \left(\Gamma(2H) - \int_0^{\lambda_2 t} e^{-s} s^{2H-1} ds \right) +$$

$$\frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_1^{1-2H} e^{\lambda_1 t} \left(\Gamma(2H) - \int_0^{\lambda_1 t} e^{-s} s^{2H-1} ds \right).$$

Si $t < 0$ se tiene que

$$\mathbb{E} \left(X_0^{(1)} X_t^{(2)} \right) =$$

$$\frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \lambda_2^{1-2H} \left(\Gamma(2H) - \int_0^{-\lambda_2 t} e^s s^{2H-1} ds \right) +$$

$$\frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\lambda_1^{1-2H} e^{\lambda_1 t} \Gamma(2H) - \int_0^{-\lambda_1 t} e^{-s} s^{2H-1} ds \right).$$

En particular cuando $t = 0$, obtenemos

$$\mathbb{E} \left(X_0^{(1)} X_0^{(2)} \right) = \frac{\sigma^2 H \Gamma(2H)}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\lambda_2^{1-2H} + \lambda_1^{1-2H} \right) =$$

$$\frac{\sigma^2 \Gamma(2H + 1)}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\lambda_1^{1-2H} + \lambda_2^{1-2H} \right).$$

Proof.

La prueba está basada en un trabajo de Pipiras & Taqqu (2000) que muestran que

si $1/2 < H < 1$ y $f, g \in |\Lambda|^H :=$

$$\left\{ f : \iint |f(u)f(v)| \cdot |u - v|^{2H-2} dudv < +\infty \right\}$$

entonces

$$\mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) dB_H(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) dB_H(v) dv \right) =$$

$$H(2H - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)g(v)| \cdot |u - v|^{2H-2} dudv.$$

Calculamos entonces



Proof.

$$\mathbb{E} \left(X_t^{(1)} X_s^{(2)} \right) =$$

$$\sigma^2 E \left(\int_{-\infty}^t e^{-\lambda_1(t-u)} dB_H(u) \int_{-\infty}^s e^{-\lambda_2(s-v)} dB_H(v) \right) =$$

$$\sigma^2 H(2H - 1) \times$$

$$\int_{-\infty}^t e^{-\lambda_1(t-u)} du \int_{-\infty}^s e^{-\lambda_2(s-v)} |u - v|^{2H-2} dv$$

haciendo el cambio de variable en la integral doble $w = t - u$, $z = s - v$ obtenemos la siguiente expresión

$$\mathbb{E} \left(X_t^{(1)} X_s^{(2)} \right) = \sigma^2 H(2H - 1) \times$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 w} dw \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 z} |t - w + z - s|^{2H-2} dz.$$

De aquí se observa que $\mathbb{E} \left(X_t^{(1)} X_s^{(2)} \right)$ depende de $t - s$ por lo que alcanza con obtener una expresión para $\mathbb{E} \left(X_0^{(1)} X_t^{(2)} \right)$.

$$\mathbb{E} \left(X_0^{(1)} X_t^{(2)} \right) = \sigma^2 H(2H - 1) \int_0^{+\infty} dw \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 w - \lambda_2 z} |z - w - t|^{2H-2} dz,$$

que luego de hacer el cambio de variable $h = \lambda_1 w + \lambda_2 z$ en la integral en z queda

$$\frac{\sigma^2 H(2H-1)}{\lambda_2} \times$$

$$\int_0^{+\infty} dw \int_{\lambda_1 w}^{+\infty} e^{-h} \left| \frac{h - \lambda_1 w}{\lambda_2} - w - t \right|^{2H-2} dh =$$

$$\frac{\sigma^2 H(2H-1)}{\lambda_2^{2H-1}} \times$$

$$\int_0^{+\infty} dw \int_{\lambda_1 w}^{+\infty} e^{-h} |h - (\lambda_1 + \lambda_2) w - \lambda_2 t|^{2H-2} dh =$$

$$\frac{\sigma^2 H(2H-1)}{\lambda_2^{2H-1}} \times$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-h} dh \int_0^{h/\lambda_1} |h - (\lambda_1 + \lambda_2) w - \lambda_2 t|^{2H-2} dw.$$

Observamos que hasta esta última igualdad, vale cualesquiera sean t y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Ahora seguimos el cálculo en el caso $t \geq 0$ y separamos en zonas de acuerdo al valor absoluto que aparece en la última integral.

Nos queda entonces $\frac{\sigma^2 H(2H-1)}{\lambda_2^{2H-1}} \times$

$$\int_0^{\lambda_2 t} e^{-h} dh \int_0^{h/\lambda_1} ((\lambda_1 + \lambda_2) w + \lambda_2 t - h)^{2H-2} dw +$$

$$\frac{\sigma^2 H(2H-1)}{\lambda_2^{2H-1}} \times$$

$$\int_{\lambda_2 t}^{+\infty} e^{-h} dh \int_0^{\frac{h-\lambda_2 t}{\lambda_1+\lambda_2}} (h - (\lambda_1 + \lambda_2) w - \lambda_2 t)^{2H-2} dw +$$

$$\frac{\sigma^2 H(2H-1)}{\lambda_2^{2H-1}} \times$$

$$\int_{\lambda_2 t}^{+\infty} e^{-h} dh \int_{\frac{h-\lambda_2 t}{\lambda_1+\lambda_2}}^{h/\lambda_1} ((\lambda_1 + \lambda_2) w + \lambda_2 t - h)^{2H-2} dw =$$

$$\frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \Gamma(2H) \lambda_2^{1-2H} -$$

$$\frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_2^{1-2H} \int_0^{\lambda_2 t} e^{-h} (\lambda_2 t - h)^{2H-1} dh$$

$$\frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_1^{1-2H} \int_0^{+\infty} e^{-h} (h + \lambda_1 t)^{2H-1} dh$$

luego de hacer los cambios de variables $s = \lambda_2 t - h$ en la primer integral y $s = h + \lambda_1 t$ en la segunda, nos queda

$$\frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \Gamma(2H) \lambda_2^{1-2H} -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_2^{1-2H} e^{-\lambda_2 t} \int_0^{\lambda_2 t} e^s s^{2H-1} ds + \\
& \frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_1^{1-2H} e^{\lambda_1 t} \int_{\lambda_1 t}^{+\infty} e^{-s} s^{2H-1} ds = \\
& \frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \Gamma(2H) \lambda_2^{1-2H} - \\
& \frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_2^{1-2H} e^{-\lambda_2 t} \int_0^{\lambda_2 t} e^s s^{2H-1} ds + \\
& \frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_1^{1-2H} \left[e^{\lambda_1 t} \Gamma(2H) - e^{\lambda_1 t} \int_0^{\lambda_1 t} e^{-s} s^{2H-1} ds \right] \\
& \frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \lambda_2^{1-2H} \left(\Gamma(2H) - \int_0^{\lambda_2 t} e^s s^{2H-1} ds \right) + \\
& \frac{\sigma^2 H}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_1^{1-2H} e^{\lambda_1 t} \left(\Gamma(2H) - \int_0^{\lambda_1 t} e^{-s} s^{2H-1} ds \right).
\end{aligned}$$

La fórmula para el caso en que $t \leq 0$ es completamente análoga. ■

Corolario

Si $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}} \sim FOU(\lambda, \sigma, H)$ entonces

$$\mathbb{E}(X_0 X_t) = \frac{\sigma^2 H f_H(\lambda t)}{2\lambda^{2H}}.$$

Proof.

Como los cálculos realizados en el teorema anterior se mantienen válidos para el caso en que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, sólo resta sustituirlos en la fórmula anterior y se obtiene el resultado. □

Observación

Tomando $t = 0$ en la igualdad anterior y teniendo en cuenta que $f_H(0) = 2\Gamma(2H)$, obtenemos la varianza de las variables que componen el proceso:

$$\mathbb{V}(X_t) = \frac{\sigma^2 \Gamma(2H + 1)}{2\lambda^{2H}}.$$

Observación

Dado que $\mathbb{E}(X_0 X_t) = \frac{\sigma^2 H f_H(\lambda t)}{2\lambda^{2H}} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$ sumado al hecho de que el proceso es gaussiano y centrado, se deduce que todo $\text{FOU}(\lambda, \sigma, H)$ es ergódico.

Observación

Dado el comportamiento asintótico de la función f_H , se deduce que cuando $1/2 < H < 1$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_0 X_n) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2H-2} = +\infty,$$

por lo que el proceso es de memoria larga.

Contenidos

- 1 Introducción-Preliminares
- 2 mBf
 - Procesos autosimilares.
 - Movimiento Browniano fraccional.
 - Dos pilares.
 - mBf como límite de caminatas aleatorias.
- 3 FOU
 - Definición y propiedades.
 - Historia.
- 4 **Estimación de parámetros**
 - **Predicción.**
- 5 Aplicación
- 6 FOU de orden p
 - Definición y propiedades.
 - Estimadores de los parámetros.
 - Consistencia y normalidad asintótica.
- 7 Referencias

A partir de ahora apuntamos a la estimación de los parámetros de un FOU.

Existen muchos métodos para estimar el parámetro de memoria larga, en Taqqu et al (1995), por ejemplo hay una descripción de los principales.

En Hu & Nualart (2010), se encuentran fórmulas explícitas para estimar λ y σ por máxima verosimilitud y se prueba consistencia y normalidad asintótica en el caso en que H es conocido.

Aquí veremos cómo estimar los tres parámetros a la vez, siguiendo lo propuesto por Brouste & Iacus (2013) donde además prueban la consistencia y la normalidad asintótica.

Definición

Se dice que $a = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ es un filtro de longitud $k + 1$ y orden $L \geq 1$ si y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:

- $\sum_{i=0}^k a_i i^l = 0$ para todo $0 \leq l \leq L - 1$.
- $\sum_{i=0}^k a_i i^L \neq 0$.

Si además el filtro cumple que $\sum_{i=0}^k (-1)^{i-1} a_i = 1$, se dice que el filtro está normalizado.

Ejemplo

$(-1, 1)$ es un filtro de orden 1 y longitud 2.

Ejemplo

$(-1, 2, -1)$ es un filtro de orden 2 y longitud 3.

Ejemplo

Más en general $(-1, k, -C_2^k, \dots, C_2^k, -k, 1)$ es un filtro de orden k y longitud $k + 1$.

Observación

Dado un filtro a de orden L y longitud $k + 1$, se puede construir uno de orden L y longitud $2k + 1$ que se llama filtro a dilatado y se define como

$$a^2 := (a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots, 0, a_k).$$

Se tienen n observaciones del proceso en el intervalo $[0, T]$ a tiempos equiespaciados

$$X_{\Delta}, X_{2\Delta}, \dots, X_{i\Delta}, \dots, X_{n\Delta} = X_T.$$

Dado un filtro a de longitud $k + 1$ y orden L , los autores definen

$$V_{n,a} := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-k} \left(\sum_{j=0}^k a_j X_{(i+j)\Delta_n} \right)^2$$

siendo $\Delta_n := T_n/n$ luego proponen estimar H y σ mediante

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{V_{n,a^2}}{V_{n,a}} \right),$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{-2V_{n,a}}{\Delta_n^{2\hat{H}} \sum_{k=0}^k \sum_{l=0}^k a_k a_l |k-l|^{2\hat{H}}}.$$

A partir de estos estimadores, proponen estimar λ mediante

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{2 \sum_{i=1}^n X_{i\Delta}^2}{n \hat{\sigma}^2 \Gamma(2\hat{H} + 1)} \right)^{\frac{-1}{2\hat{H}}}.$$

Las fórmulas para \hat{H} y $\hat{\sigma}$ (así como las pruebas de consistencia y normalidad asintótica) están basados de un trabajo de Iltis & Lang (1997), sobre procesos gaussianos de incrementos estacionarios donde H es el índice local de Hölder del proceso. En lo que sigue veremos de dónde salen estas fórmulas, así como la demostración de los teoremas de consistencia. Comenzamos definiendo el variograma y el índice local de Hölder de un proceso de incrementos estacionarios.

Definición

Si $\{X_t\}$ es un proceso en L^2 de incrementos estacionarios y centrado se define el variograma del proceso a la función:

$$v(t) := \frac{1}{2} E (X_s - X_{s+t})^2 .$$

Observación

$v(t) = \rho(0) - \rho(t)$ siendo $\rho(t) = \mathbb{E}(X_0 X_t)$.

Definición

Dados p entero y $r \in (0, 1)$ se dice que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es $p + r$ Hölderiana si $f^{(p)}$ es Lipschitz de orden r , esto es, si existen $k, \varepsilon > 0$ tales que : $|f^{(p)}(x) - f^{(p)}(y)| \leq k |x - y|^r$ para todos x, y tales que $|x - y| < \varepsilon$.

Definición

El índice local de Hölder de un proceso es

$$h := \sup \{p + r : X_t \text{ es Hölder de orden } p + r \text{ c.s.}\}.$$

Condición (A1).

Le llamamos D al máximo entero tal que v es $2D$ veces derivable, y suponemos que existen constantes $C > 0$ y $s \in (0, 2)$ tales que:

$$v^{(2D)}(t) = v^{(2D)}(0) + C(-1)^D |t|^s + r(t)$$

siendo $r(t) = o(|t|^s)$ cuando $t \rightarrow 0$.

Para procesos que satisfacen (A1), se define $h := D + s/2$, se prueba en Ibragimov & Rozanov (1978) que h es el índice local de Hölder del proceso.

Observación

Si $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}} \sim \text{FOU}(\lambda, \sigma, H)$ entonces $D = 0$ y $h = H$.

Definición

Dado un filtro $a = (a_0, a_1, \dots, a_p)$ definimos el proceso $\Delta_a X_j := \sum_{i=0}^p a_i X_{(i+j)\Delta}$ para $j = 1, 2, 3, \dots, n-p$ y su varianza por $\sigma_{a,\Delta}^2$. Definimos también la variación cuadrática correspondiente al filtro a como

$$V(n, a, \Delta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-p} \left(\frac{(\Delta_a X_j)^2}{\sigma_{a,\Delta}^2} - 1 \right).$$

Observación

$\{\Delta_a X_j\}_{j=1,2,3,\dots,n-p}$ es estacionario.

Condición (A2)

Dado un filtro a de longitud $p + 1$ y orden M , suponemos que

$$\sum_{l=0}^p \sum_{k=0}^p a_k a_l |k - l|^s \neq 0$$

para todo $s \in (0, 2M)$ que no sea entero par.

Ejemplo

$a = (1, -2, 1)$ verifica (A2) siendo $M = 2$, ya que

$$\sum_{l=0}^2 \sum_{k=0}^2 a_k a_l |k - l|^s = 2^{s+1} - 8.$$

Teorema (Teorema 1- Iatas & Lang -1997)

$X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso centrado con incrementos estacionarios que verifica (A1). Le llamamos $T = \sup_n \{n\Delta_n\}$.

- (1) Existen $\delta, G > 0, \gamma > s$ y $q > \gamma + 1/2, q$ entero tales que en $(0, \delta]$, $r(t)$ es q veces derivable y $|r^{(q)}(t)| \leq G|t|^{\gamma-q}$.
- (2) Si $\delta < T$ suponemos que existe un entero d tal que $d \geq s + 1/2$ y v es $2D + d$ veces derivable en $(\delta, T]$ y además $\int_{\delta}^T |v^{(2D+d)}(t)| dt < +\infty$, y si a es un filtro de orden M que cumple (A2) con $2M \geq \max \{2D + q, 2D + d\}$ entonces

$$V_{n,a,\Delta} \xrightarrow{c.s.} 0.$$

- (3) Si $s > 3/2$, supongamos que existe $\delta > 0$ tal que en $(0, \delta]$, $r(t)$ es exactamente 2 veces derivable y $r''(t) = o(|t|^{s-2})$.
- (4) Si $\delta < T$ y v es exactamente $2D + 2$ veces derivable en

Teorema (Teorema 1- Istas & Lang -1997)

$(\delta, T], \int_{\delta}^T |v^{(2D+2)}(t)| dt < +\infty$, *eligiendo un filtro a de orden $M \geq D + 1$ y Δ_n tal que $\sum \frac{1}{n^2 \Delta_n^{4s-6}} < +\infty$,*
entonces

$$V_{n,a,\Delta} \xrightarrow{\text{c.s.}} 0.$$

Teorema (Teorema 2- Istas & Lang-1997)

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso centrado con incrementos estacionarios que verifica (A1). Le llamamos $T = \sup_n \{n\Delta_n\}$.

- 1 Si el resto $r(t)$ en (A1) y los filtros $a^{(i)}$ satisfacen las condiciones impuestas en el teorema 1.
- 2 Si $s > 1$, elegimos Δ_n tal que $n\Delta_n^{s-1} \rightarrow +\infty$, entonces

$$\sqrt{n}V_{n,a,\Delta} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(a)).$$

- 3 Si $s > 3/2$, supongamos que existe $\delta > 0$ tal que $r(t)$ es exactamente 2 veces derivable en $(0, \delta]$ y $r''(t) = o(|t|^{s-2})$.
- 4 Si $\delta < T$ y v es exactamente $2D + 2$ veces derivable en $(\delta, T]$, $\int_{\delta}^T |v^{(2D+2)}(t)| dt < +\infty$, eligiendo un filtro a de orden $M = D + 1$ y Δ_n tal que $n\Delta_n \rightarrow +\infty$, entonces

$$\sqrt{n}\Delta_n^{s-3/2} V_{n,a,\Delta} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(a)).$$

Veremos en lo que sigue un procedimiento de estimación de los parámetros C y h mediante la aplicación de los teoremas anteriores.

Consideramos en primer lugar, dado un filtro a de longitud $p + 1$, la variación cuadrática empírica definida como

$$U_{n,a,\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-p} \left(\sum_{j=0}^p a_j X_{(i+j)\Delta} \right)^2.$$

Se prueba que

$$\sigma_{a,\Delta}^2 = -C(-1)^D \Delta^{2h} \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p a_k a_l |k-l|^{2h} + o(\Delta^{2h})$$

por lo que cuando $\Delta_n \rightarrow 0$, se tiene que

$$\sigma_{a,\Delta}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\cong} -C(-1)^D \Delta^{2h} \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p a_k a_l |k-l|^{2h} =$$

$$2 \sum_{k=0}^p \sum_{m=0}^{p-k} a_k a_{k+m} \left[-C(-1)^D (m\Delta)^{2h} \right].$$

Además, para cada Δ fijo, se tiene que

$$U_{n,a,\Delta} \xrightarrow{\text{c.s.}} -C(-1)^D \Delta^{2h} \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p a_k a_l |k-l|^{2h}$$

Considerando l distintos filtros $(a^{(i)})_{i=1,2,3,\dots,l}$, de longitudes $p_i + 1$ planteamos l igualdades a partir de

$$U_{n,a^{(i)},\Delta} = 2 \sum_{k=0}^{p_i} \sum_{m=0}^{p_i-k} a_k^{(i)} a_{k+m}^{(i)} \left[-C(-1)^D (m\Delta)^{2h} \right]$$

y a partir de estas igualdades estimamos C y h mediante regresión lineal.

De esta manera si le llamamos U al vector de componentes

$U_{n,a^{(i)},\Delta}$ y A a la matriz de dimensiones $l \times p$ siendo

$\rho = \max \{ \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l \}$ definida mediante

$$A_{ij} = 2 \sum_{k=0}^{\rho_i - j} a_k^{(i)} a_{k+j}^{(i)} \text{ si } j = 1, 2, 3, \dots, \rho_i,$$

$$A_{ij} = 0 \text{ en otro caso.}$$

Si le llamamos Z al vector cuyas componentes son

$-C(-1)^D (j\Delta)^{2h}$, se tiene entonces que $U \xrightarrow{C.S.} AZ$.

Si tomamos los filtros $a^{(i)}$ de modo que A tenga rango

completo, se tendrá que $\hat{Z} = (A^T A)^{-1} A^T U$ será un estimador

consistente de Z . Tomando logaritmos a las coordenadas del

vector formado por $|Z_j|$ se obtienen los estimadores de C y de

h :

$$\hat{h} = \frac{\sum_{j=1}^p \log |\hat{Z}_j| \log(j\Delta) - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \log |\hat{Z}_j| \sum_{j=1}^p \log(j\Delta)}{2 \left(\sum_{j=1}^p \log^2(j\Delta) - \frac{1}{p} \left(\sum_{j=1}^p \log(j\Delta) \right)^2 \right)}$$

$$\log(\widehat{C}) = \frac{1}{p} \left(\sum_{j=1}^p \log |\widehat{Z}_j| - 2\widehat{h} \sum_{j=1}^p \log(j\Delta) \right).$$

Planteamos ahora un teorema de consistencia y normalidad asintótica de estos estimadores.

Teorema (Teorema 3 Istas & Lang-1997)

Si $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso centrado de incrementos estacionarios que cumple (A1), $(a^{(i)})_{i=1,2,3,\dots,l}$ son filtros de longitudes $p_i + 1$ que cumplen (A2) y son tales que la matriz A definida anteriormente es de rango completo. Dado $\alpha > 0$ definimos $\Delta_n = n^{-\alpha}$.

- Si el resto $r(t)$ en (A1) y los filtros $a^{(i)}$ satisfacen las condiciones impuestas en el teorema 1 (1), es decir, existen $\delta, G > 0, \gamma > s$ y $q > \gamma + 1/2$, q entero tales que $r(t)$ es q veces derivable en $(0, \delta]$ y $|r^{(q)}(t)| \leq G|t|^{\gamma-q}$.

- 2 Si $\delta < T$ suponemos que existe un entero d tal que $d \geq s + 1/2$ y v es $2D + d$ veces derivable en $(\delta, T]$ y además $\int_{\delta}^T |v^{(2D+d)}(t)| dt < +\infty$, y si $a^{(i)}$ es un filtro de orden M_i que cumple (A2) con $2M_i \geq \max \{2D + q, 2D + d\}$, entonces

$$\left(\widehat{h}, \widehat{C}\right) \xrightarrow{c.s.} (h, C).$$

- 3 Si $\alpha < 1/(4s - 6)$ y el resto $r(t)$ en (A1) y los filtros $a^{(i)}$ satisfacen las condiciones impuestas en el teorema 1 (ii), es decir si $s > 3/2$, supongamos que existe $\delta > 0$ tal que $r(t)$ es exactamente 2 veces derivable en $(0, \delta]$ y $r''(t) = o(|t|^{s-2})$.

- 4 Si $\delta < T$ y v es exactamente $2D + 2$ veces derivable en $(\delta, T]$, $\int_{\delta}^T |v^{(2D+2)}(t)| dt < +\infty$, eligiendo filtros $a^{(i)}$ de orden $M_i \geq D + 1$ y Δ_n tal que $\sum \frac{1}{n^2 \Delta_n^{4s-6}} < +\infty$,

entonces

$$\left(\widehat{h}, \widehat{C}\right) \xrightarrow{c.s.} (h, C).$$

- 5 Si el resto $r(t)$ en (A1) y los filtros $a^{(i)}$ satisfacen las condiciones impuestas en el teorema 2 (1).
- 6 Si $s \leq 1$ suponemos que para cierto $\tau > 0$, se cumple que $r(t) = o(|t|^{s+\tau})$ cuando $t \rightarrow 0$, elegimos $\alpha > 1/(2\tau)$. Si $s > 1$, suponemos que para cierto $\tau > s - 1$, se cumple que $r(t) = o(|t|^{s+\tau})$ cuando $t \rightarrow 0$, elegimos $1/(2\tau) < \alpha < 1/(2s - 2)$.

Entonces

$$\sqrt{n}(\widehat{h} - h) \xrightarrow{w} N\left(0, \sigma_h^2(h, C, a)\right).$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\log n}(\widehat{C} - C) \xrightarrow{w} N\left(0, \sigma_C^2(h, C, a)\right).$$

- 7 Si el resto $r(t)$ en (A1) y los filtros $a^{(i)}$ satisfacen las condiciones impuestas en el teorema 2 (2).

- 8 Suponemos que para cierto $\tau > 0$, se cumple que $r(t) = o(|t|^{s+\tau})$ cuando $t \rightarrow 0$, elegimos α tal que $1/(2\tau + 2s - 3) < \alpha < 1$. Entonces

$$n^{1/2-\alpha(s-3/2)} (\hat{h} - h) \xrightarrow{w} N\left(0, \bar{\sigma}_h^2(h, C, a)\right).$$

$$\frac{n^{1/2-\alpha(s-3/2)}}{\log n} (\hat{C} - C) \xrightarrow{w} N\left(0, \bar{\sigma}_C^2(h, C, a)\right).$$

En lo que sigue, planteamos el método de estimación de los parámetros C y h .

Usaremos una fórmula más simple (aunque no es la misma) que las planteadas mediante regresión para estimar ambos parámetros. La idea radica en que para n grande y Δ_n chico, se tiene que

$$U_{n,a,\Delta} \cong -C(-1)^D \Delta^{2h} \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p a_k a_l |k-l|^{2h}$$

entonces

$$\frac{U_{n,a^2,\Delta}}{U_{n,a,\Delta}} \cong 2^{2h} \frac{-C(-1)^D \Delta^{2h} \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p a_k a_l |k-l|^{2h}}{-C(-1)^D \Delta^{2h} \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p a_k a_l |k-l|^{2h}}$$

o sea que

$$\frac{U_{n,a^2,\Delta}}{U_{n,a,\Delta}} \cong 2^{2h}$$

por lo que igualando ambas expresiones y despejando h se obtiene

$$\hat{h} = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{U_{n,a^2,\Delta}}{U_{n,a,\Delta}} \right).$$

Nuevamente, usando la fórmula planteada por Ista & Lang obtenemos un estimador de C

$$\hat{C} = \frac{U_{n,a,\Delta}}{(-1)^D \Delta^{2\hat{h}} \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p a_k a_l |k-l|^{2\hat{h}}}.$$

En los siguientes dos teoremas, se prueba la consistencia y la normalidad asintótica de los estimadores propuestos. 

Teorema (Brouste & Iacus-2013)

Si el filtro a tiene orden $L \geq 2$, $T \rightarrow +\infty$ y $\Delta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$, entonces

1

$$(\hat{H}, \hat{\sigma}) \xrightarrow{\text{c.s.}} (H, \sigma).$$

2

$$\sqrt{n} (\hat{H} - H) \xrightarrow{w} N(0, \Gamma_1(H, \sigma, a))$$

3

$$\frac{\sqrt{n}}{\log n} (\hat{\sigma} - \sigma) \xrightarrow{w} N(0, \Gamma_2(H, \sigma, a)).$$

Proof.

Se verifican las hipótesis del teorema de Iltas & Lang (1997). Debido a la propiedad 6 de f_H se tiene que $D = 0$, por lo que para verificar la hipótesis (A1), se utiliza la propiedad 5 de f_H se obtiene que

$$\begin{aligned}v(t) = \rho(0) - \rho(t) &= \frac{\sigma^2 H}{2\lambda^{2H}} (2\Gamma(2H) - f_H(\lambda t)) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2} |t|^{2H} + o(|t|^{2H}).\end{aligned}$$

Entonces, el índice local de Hölder del proceso es H . Luego, se verifica la hipótesis (i) del teorema 3 de Iltas & Lang (1997), tomando $q = 4$, $\gamma = 2H + 1 - \varepsilon$, con $\varepsilon < 1$ y $H > 1/2$, para la hipótesis (i) y para la hipótesis (ii) sólo hay que observar que se puede elegir $\alpha \in \left(\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2(2H-1)}\right)$ y considerar $\Delta_n = n^{-\alpha}$ y que $r(t) = o(|t|^{2H+t})$. □

Teorema (Brouste & Iacus-2013)

Si $H \in (1/2, 3/4)$ y existe $p > 1$ tal que $n\Delta_n^p \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$, entonces

1

$$\hat{\lambda} \xrightarrow{\text{c.s.}} \lambda.$$

2

$$\sqrt{T_n} (\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{w} N \left(0, \lambda \left(\frac{\sigma_H}{2H} \right)^2 \right).$$

$$\text{siendo } \sigma_H^2 = (4H - 1) \left(1 + \frac{\Gamma(1-4H)\Gamma(4H-1)}{\Gamma(2-2H)\Gamma(2H)} \right).$$

Proof.

Ya se había visto que

$$\mathbb{V}(X_t) = \frac{\sigma^2 \Gamma(2H+1)}{2\lambda^{2H}} \text{ para todo } t.$$

Si se cumpliera que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i\Delta}^2 \xrightarrow{c.s.} \mathbb{V}(X_t)$, entonces igualando

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i\Delta}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2 \Gamma(2\hat{H}+1)}{2\lambda^{2\hat{H}}}$$

despejando λ se obtendría

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{2 \sum_{i=1}^n X_{i\Delta}^2}{n \hat{\sigma}^2 \Gamma(2\hat{H}+1)} \right)^{\frac{-1}{2\hat{H}}}$$

el cual queda consistente. En Hu & Nualart (2010) se prueba que si $H \in (1/2, 3/4)$ y $n\Delta^p \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para algún

Observación

$\Delta_n = \frac{\ln(n)}{n}$ verifica las distintas condiciones de los teoremas.

Observación

σ_H^2 es una función creciente de H .

En las siguientes tablas dadas en el trabajo de Brouste & Iacus (2013) se ve en distintos casos la convergencia de los estimadores de cada uno de los parámetros.

En las próximas dos tablas se simularon 500 veces, $n = 1000$ observaciones de un FOU en el intervalo $[0, 100]$ con $\lambda = 2$ y se estimaron los parámetros H y σ para diferentes valores. En cada entrada de la tabla va el promedio de las estimaciones y entre paréntesis la desviación estándar de las mismas.

\hat{H}	$H = 0.5$	$H = 0.7$	$H = 0.9$
$\sigma = 1$	0.499 (0.035)	0.697 (0.033)	0.898 (0.031)
$\sigma = 2$	0.498 (0.033)	0.700 (0.034)	0.898 (0.033)

$\hat{\sigma}$	$H = 0.5$	$H = 0.7$	$H = 0.9$
$\sigma = 1$	1.024 (0.262)	1.016 (0.282)	1.081 (0.437)
$\sigma = 2$	2.035 (0.51)	2.073 (0.564)	2.213 (1.11)

En las próximas dos tablas va lo mismo pero ahora considerando $n = 100.000$.

\hat{H}	$H = 0.5$	$H = 0.7$	$H = 0.9$
$\sigma = 1$	0.500 (0.003)	0.700 (0.003)	0.900 (0.003)
$\sigma = 2$	0.500 (0.004)	0.700 (0.003)	0.900 (0.003)

$\hat{\sigma}$	$H = 0.5$	$H = 0.7$	$H = 0.9$
$\sigma = 1$	1.000 (0.025)	1.001 (0.026)	0.999 (0.036)
$\sigma = 2$	2.001 (0.053)	2.002 (0.053)	1.997 (0.073)

En las próximas dos tablas se simulan 500 veces FOU en $[0, 1]$ con $n = 100.000$ en el primer caso y 500 veces FOU en $[0, 100]$ con $n = 1.000$ en el segundo, se observa cómo para la convergencia de λ se requiere la hipótesis $T \rightarrow +\infty$.

\hat{H}	$H = 0.5$	$H = 0.7$	$H = 0.9$
$\lambda = 0.5$	0.093 (0.037)	0.214 (0.057)	0.353 (0.069)
$\lambda = 1$	0.138 (0.052)	0.276 (0.068)	0.432 (0.078)

$\hat{\sigma}$	$H = 0.5$	$H = 0.7$	$H = 0.9$
$\lambda = 0.5$	0.476 (0.148)	0.514 (0.166)	0.605 (0.298)
$\lambda = 1$	0.906 (0.227)	0.940 (0.238)	1.005 (0.412)

En lo que sigue veremos cómo se puede utilizar un proceso $\text{FOU}(\lambda, \sigma, H)$ para predecir valores futuros en una serie de tiempo estacionaria centrada de memoria larga.

Dado un instante de tiempo fijo t , y un ε fijo, observamos que la esperanza condicional de $X_{t+\varepsilon}$ condicionado a la observación del proceso hasta el instante t , es una función de los parámetros λ, σ y H , llamémosle

$$E(\lambda, \sigma, H) := \mathbb{E}\left(X_{t+\varepsilon} / \{X_s\}_{s \leq t}\right).$$

La predicción al instante $t + \varepsilon$ luego de haber observado todo el proceso hasta el instante t , la definimos como

$$\hat{X}_{t+\varepsilon} = \hat{\mathbb{E}}\left(X_{t+\varepsilon} / \{X_s\}_{s \leq t}\right)$$

siendo

$$\hat{\mathbb{E}}\left(X_{t+\varepsilon} / \{X_s\}_{s \leq t}\right) = E\left(\hat{\lambda}, \hat{\sigma}, \hat{H}\right),$$

es decir estimamos la esperanza condicional sustituyendo los valores de los parámetros por sus estimadores. 

En la práctica, para el cálculo de $\widehat{X}_{t+\varepsilon}$ se cuenta con las observaciones del proceso discretizado en el intervalo $[0, t]$, digamos

$$X_{t/n}, X_{2t/n}, \dots, X_t.$$

Como el proceso es gaussiano y centrado, la distribución condicional de $X_{t+\varepsilon}$ condicionado a $X_{t/n}, X_{2t/n}, \dots, X_t$ es normal. Si le llamamos Σ a la matriz de covarianzas del vector $(X_{t/n}, X_{2t/n}, \dots, X_t, X_{t+\varepsilon})$, podemos escribir Σ en la forma

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{n,n} & \Sigma_{n,1} \\ \Sigma_{1,n} & \Sigma_{(n+1),(n+1)} \end{pmatrix}$$

donde los subíndices en las matrices $\Sigma_{n,n}$, $\Sigma_{n,1}$ y $\Sigma_{1,n}$ indican las dimensiones de las matrices consideradas mientras que

$$\Sigma_{(n+1),(n+1)} = \mathbb{V}(X_{t+\varepsilon}) = \mathbb{V}(X_0).$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}(X_{t+\varepsilon} / (X_{t/n}, X_{2t/n}, \dots, X_t)) = (X_{t/n}, X_{2t/n}, \dots, X_t)$$

$$\sum_{1,n} \left(\sum_{n,n} \right)^{-1} (x_{t/n}, x_{2t/n}, \dots, x_t)^T.$$

Luego tendríamos que la predicción al instante $t + \varepsilon$, una vez observado el proceso hasta el instante t , lo obtendríamos mediante la fórmula????, sustituyendo

$$\widehat{x}_{t+\varepsilon} = \widehat{\sum}_{1,n} \left(\widehat{\sum}_{n,n} \right)^{-1} (x_{t/n}, x_{2t/n}, \dots, x_t)^T$$

donde en las matrices \sum se sustituye (λ, σ, H) por $(\widehat{\lambda}, \widehat{\sigma}, \widehat{H})$, obteniendo de esa manera $\widehat{\sum}_{1,n}$ y $\widehat{\sum}_{n,n}$.

En el caso de querer simular k observaciones siguientes a los momentos $t + 1/n, t + 2/n, \dots, t + k/n$, se procede de manera similar. Ahora le llamamos \sum a la matriz de covarianzas del vector

$$(x_{t/n}, x_{2t/n}, \dots, x_t, x_{t+1/n}, x_{t+2/n}, \dots, x_{t+k/n})$$

mediante la fórmula

$$\left(\widehat{X}_{t+1/n}, \widehat{X}_{t+2/n}, \dots, \widehat{X}_{t+k/n} \right) =$$

$$\widehat{\Sigma}_{k,n} \left(\widehat{\Sigma}_{n,n} \right)^{-1} \left(X_{t/n}, X_{2t/n}, \dots, X_t \right)^T$$

Contenidos

- 1 Introducción-Preliminares
- 2 mBf
 - Procesos autosimilares.
 - Movimiento Browniano fraccional.
 - Dos pilares.
 - mBf como límite de caminatas aleatorias.
- 3 FOU
 - Definición y propiedades.
 - Historia.
- 4 Estimación de parámetros
 - Predicción.
- 5 **Aplicación**
- 6 FOU de orden p
 - Definición y propiedades.
 - Estimadores de los parámetros.
 - Consistencia y normalidad asintótica.
- 7 Referencias

Ahora mostraremos el comportamiento predictivo del modelo FOU con el de un FARIMA, por lo tanto, comenzaremos dando la definición de los modelos ARMA y FARIMA.

Definición

Si $\{Y_t\}$ es un proceso estocástico estacionario y centrado, se dice que Y_t es un proceso ARMA(p, q) si y sólo si existen constantes $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ y un proceso $\{\varepsilon_t\}$ donde se verifica

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

donde $\{\varepsilon_t\}$ es ruido blanco (variables no correlacionadas e idénticamente distribuidas con media cero).

Observación

La expresión anterior se escribe también como

$$\Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

siendo B es el operador shift, es decir, $BX_t = X_{t-1}$,

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p,$$

$$\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q.$$

Definición

Si $\{X_t\}$ es un proceso estocástico estacionario y centrado, se dice que es un proceso FARIMA(p, q) si y sólo si existen $d \in (-1/2, 1/2)$, p y q tales que $Y_t = (1 - B)^d X_t$ es un proceso ARMA(p, q). Más explícitamente,

$$Y_t = \sum_{s=0}^{+\infty} b(s) X_{t-s} \text{ donde } b(s) = \prod_{k=1}^s \frac{k-d+1}{k} = \frac{\Gamma(s+d)}{\Gamma(d)\Gamma(s+1)}.$$

Entonces $\{X_t\}$ es un proceso FARIMA(p, q) si y sólo si existen polinomios Φ de grado p , Θ de grado q y $d \in (-1/2, 1/2)$ tales que

$$\Phi(B)(1 - B)^d X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

donde $\{\varepsilon_t\}$ es ruido blanco.

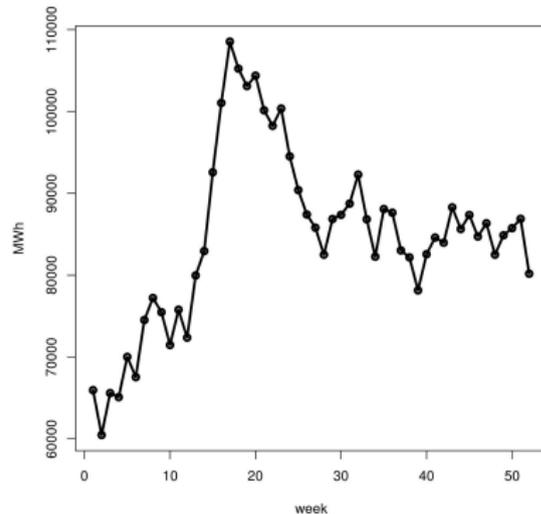
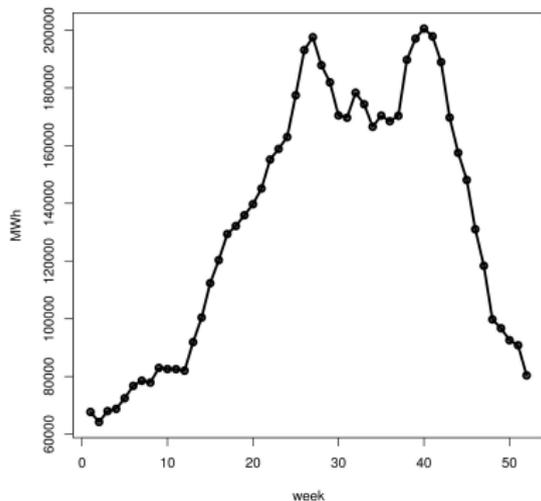
Vamos a la aplicación en concreto.

- Se cuenta con la serie de tiempo cuyos datos son la energía afluyente generada por las represas hidroeléctricas semanales en MWh desde la primer semana de 1909 hasta la semana 26 de 2013.
- Estimando el parámetro H por diversos métodos, se obtienen en todas ellas estimaciones claramente superiores a $1/2$, lo que sugiere la conveniencia de modelar mediante una serie de tiempo de memoria larga.
- El objetivo es el de pronosticar de la mejor manera posible a partir de algún modelo de memoria larga, la energía acumulada semestral.
- Se mostrarán los resultados de dos modelos: FARIMA(3,d,1) con parámetros estimados por máxima verosimilitud y FOU.
- En los gráficos que mostraremos a continuación, superponemos los valores realmente observados, con los

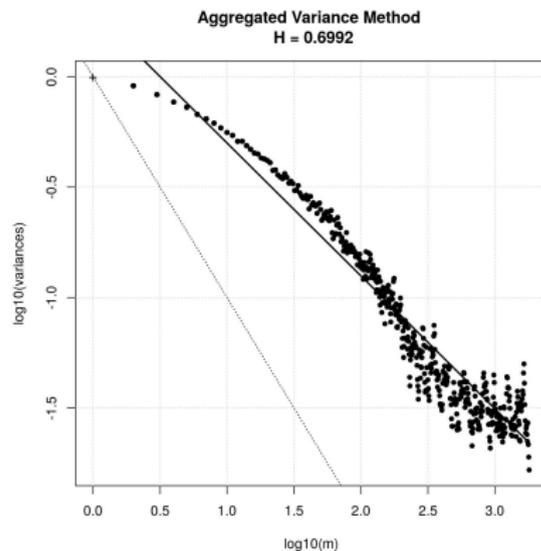
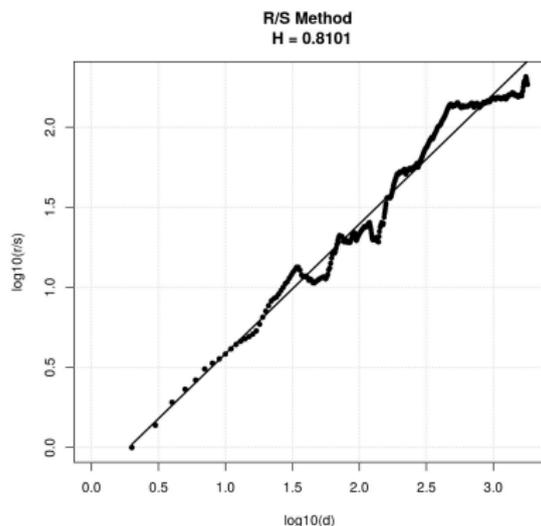
pronosticados por el FOU y los pronosticados por el FARIMA.

- En todos los casos, se estiman los modelos hasta la última semana de determinado año, y con ello se pronostican las 52 semanas del años siguiente.
- Se ve un caso en donde las predicciones del FOU son mejores que las de FARIMA, y otro donde la situación es a la inversa.
- Veremos un caso en el que FOU pronostica muy mal.
- Por último se muestran los gráficos con las predicciones a 5 años, junto con las observaciones reales.

Comenzamos observando los promedios semanales (en el gráfico de la derecha) y los desvíos semanales (en el gráfico de la izquierda) de cada una de las 52 semanas.



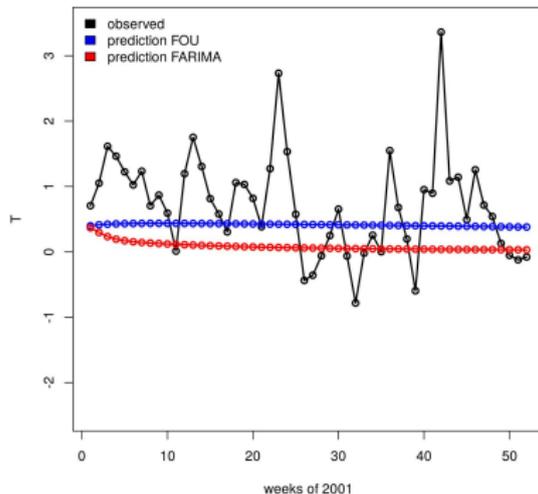
Luego de desestacionalizar la serie, estimamos H por los métodos R/S y por la varianza agregada, para ver que conviene modelar con memoria larga.



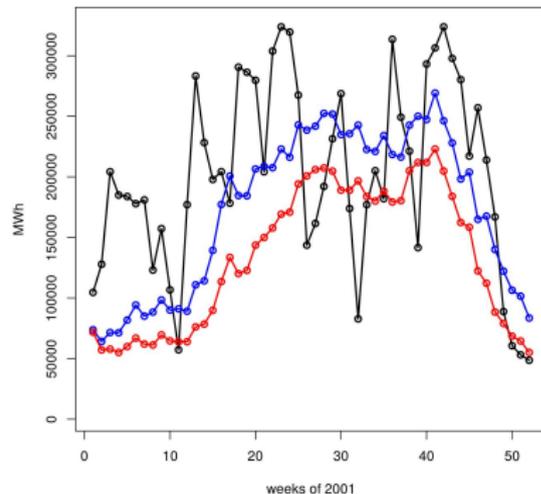
Vemos ahora cómo quedan las predicciones de ambos modelos un año para adelante.

Se estiman ambos modelos hasta la última semana de 2000 y se pronostican los valores de las 52 semanas de 2001. En el gráfico de la derecha para los datos desestacionalizados y centrados, en la segunda los pronósticos concretos.

Predictions and observed values for 2001 in
Gaussian space $T = \text{phi}^{(-1)} \circ F$

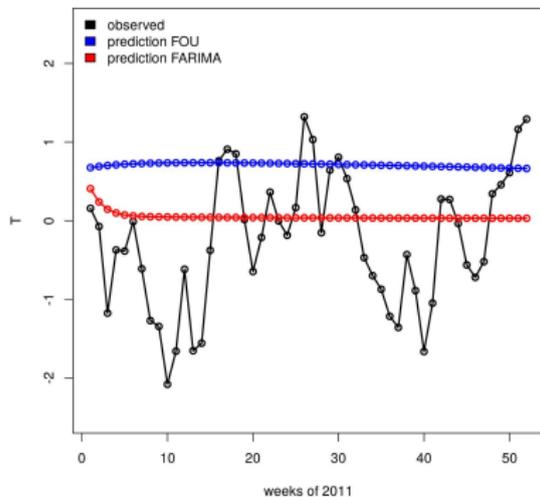


Predictions and observed values for 2001

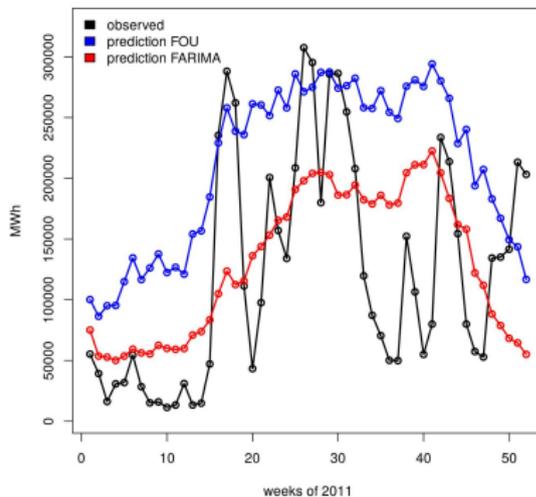


Se estiman ambos modelos hasta la última semana de 2010 y se pronostican los valores de las 52 semanas de 2011. En el gráfico de la derecha para los datos desestacionalizados y centrados, en la segunda los pronósticos concretos.

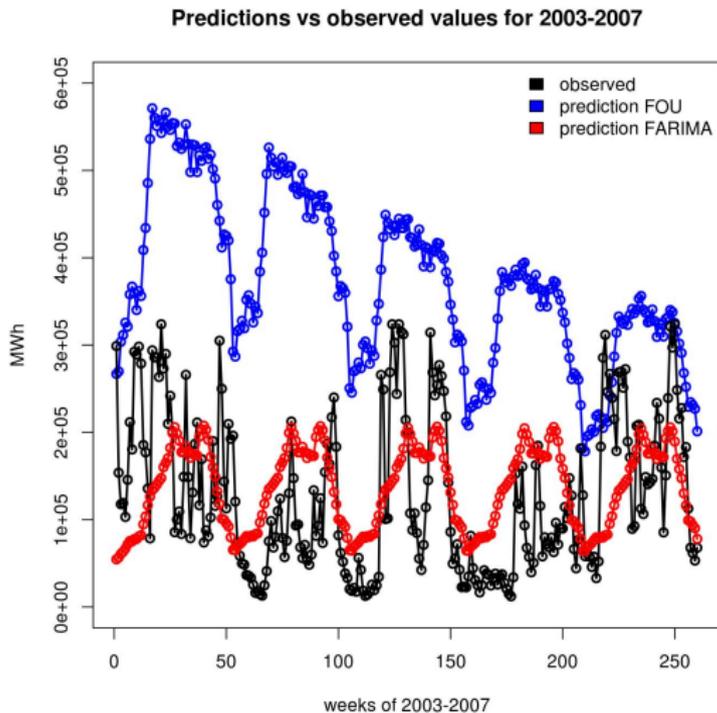
Predictions and observed values for 2011 in
Gaussian space $T = \text{phi}^{(-1)} \circ F$



Predictions and observed values for 2011

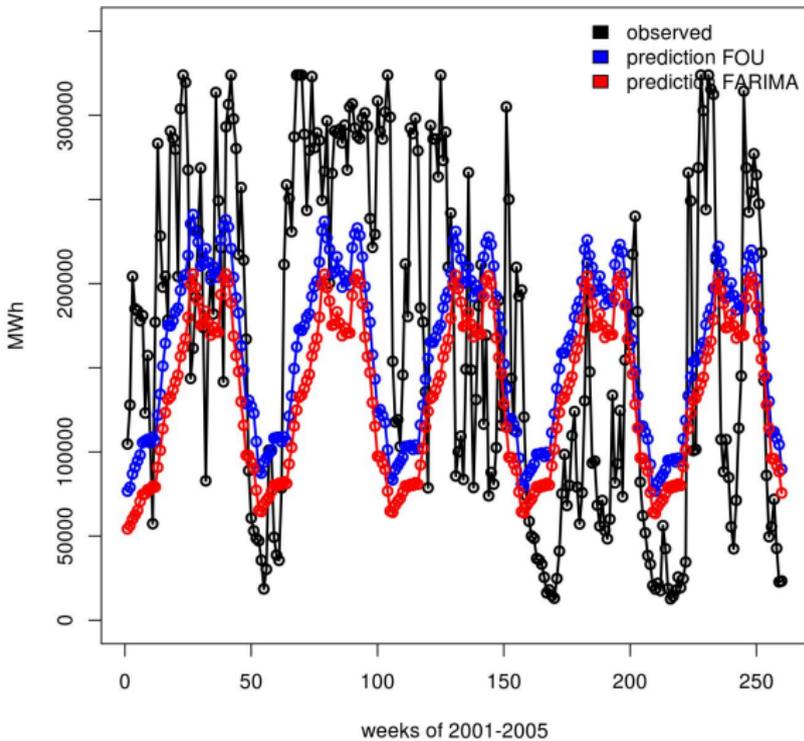


En el próximo gráfico vemos un caso en que FOU pronostica muy mal.

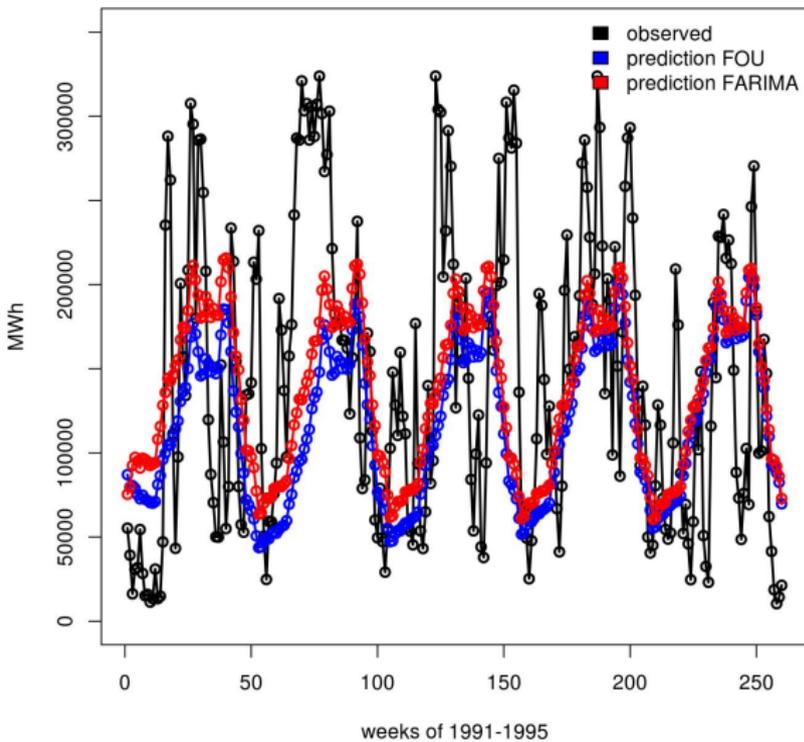


En los próximos 3 gráficos mostramos el comportamiento de las predicciones a 5 años. En el último de ellos, se agrega el promedio semanal, y se observa cómo ambos modelos, predicen como el promedio en la medida que queramos predecir a largo plazo.

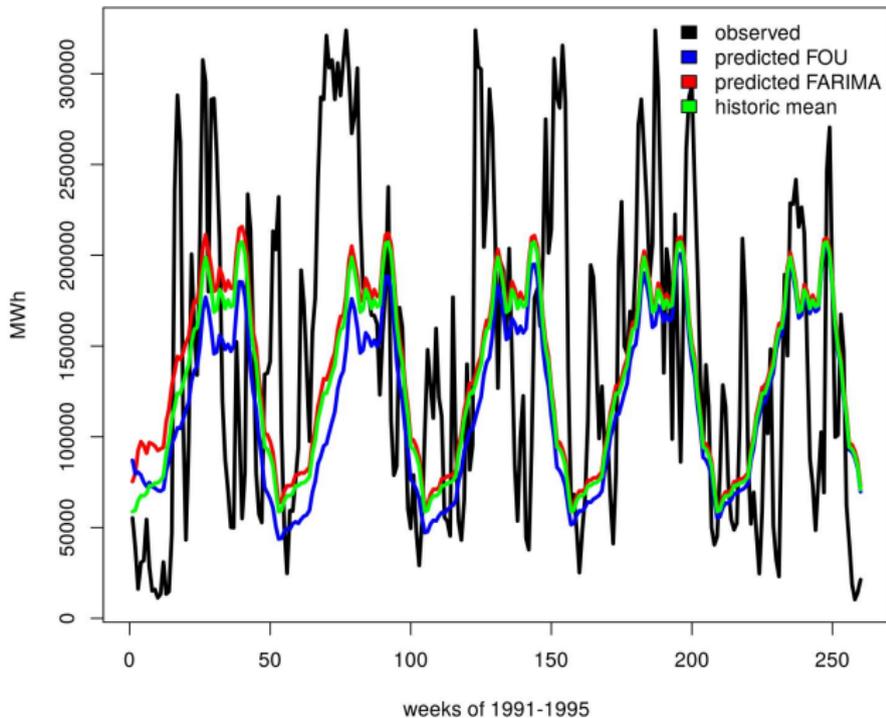
Predictions vs observed values for 2001-2005



Predictions vs observed values for 1991-1995



Prediction vs observed values 1991-1995



Contenidos

- 1 Introducción-Preliminares
- 2 mBf
 - Procesos autosimilares.
 - Movimiento Browniano fraccional.
 - Dos pilares.
 - mBf como límite de caminatas aleatorias.
- 3 FOU
 - Definición y propiedades.
 - Historia.
- 4 Estimación de parámetros
 - Predicción.
- 5 Aplicación
- 6 FOU de orden p
 - Definición y propiedades.
 - Estimadores de los parámetros.
 - Consistencia y normalidad asintótica.
- 7 Referencias

- Definimos los operadores $T_\lambda(y)(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} dy(s)$ (OU de parámetro $\lambda > 0$) y $T_\lambda^{(h)}(y)(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} \frac{(-\lambda(t-s))^h}{h!} dy(s)$ (OU de grado h y parámetro λ).
- Arratia, Cabaña & Cabaña (2013) prueban que si componemos los operadores T_λ , con distintos valores de λ obtenemos una combinación lineal entre los mismos, mientras que si componemos T_λ para determinado λ p veces, resulta una combinación lineal de los operadores $T_\lambda^{(h)}$.

Más explícitamente Arratia, Cabaña & Cabaña (2013) prueban la siguiente fórmula.

Teorema

Si componemos p operadores de modo de que aparezca p_1 veces λ_1 , p_2 veces λ_2 , ..., p_q veces λ_q , donde $p_1 + p_2 + \dots + p_q = p$, entonces la compuesta queda en la forma

$$\prod_{h=1}^q T_{\lambda_h}^{p_h} = \sum_{h=1}^q K_h(\lambda) T_{\lambda_h}^{p_h} = \sum_{h=1}^q K_h(\lambda) \sum_{j=0}^{p_h-1} C_j^{p_h-1} T_{\lambda_h}^{(j)}$$

siendo

$$K_h(\lambda) = K_h(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q) = \frac{1}{\prod_{\lambda_l \neq \lambda_h} (1 - \lambda_l / \lambda_h)}.$$

Definición

Dado $\{\sigma B_H(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$ un movimiento browniano fraccionario de orden H y varianza σ^2 y dados $(\lambda_1, p_1), (\lambda_2, p_2), \dots, (\lambda_q, p_q)$, siendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q > 0$ y $p_1, p_2, \dots, p_q \in \mathbb{N}$ tales que $p_1 + p_2 + \dots + p_q = p$, diremos que el proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ definido como

$$X(t) = \prod_{h=1}^q T_{\lambda_h}^{p_h}(\sigma B_H)(t) = \sum_{h=1}^q K_h(\lambda) \sum_{j=0}^{p_h-1} C_j^{p_h-1} T_{\lambda_h}^{(j)}(\sigma B_H)(t)$$

es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck fraccionario de orden p , cuyos parámetros son $\sigma, H, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q, p_1, p_2, \dots, p_q$.

En el caso particular en que los p_i sean todos iguales a la unidad, entonces los parámetros serán $\sigma, H, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ y el proceso queda en la forma

$$X(t) = \prod_{h=1}^p T_{\lambda_h}(\sigma B_H)(t) = \sum_{h=1}^p K_h(\lambda) T_{\lambda_h}(\sigma B_H)(t).$$

Propiedades. Si $\{X_t\} \sim \text{FOU}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \sigma, H)$ donde los λ_i son todos distintos entre sí, entonces

- 1 El proceso es gaussiano, centrado, estacionario.
- 2 El proceso es de memoria larga.
- 3 Las trayectorias son continuas y no diferenciables en casi todo punto.
- 4 El proceso es autosimilar de parámetro H .

Estimadores de los parámetros. En primer lugar se estiman H y σ independientemente de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{V_{n,a^2}}{V_{n,a}} \right)$$

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{-2V_{n,a}}{\Delta_n^{2\hat{H}} \sum_{k=0}^k \sum_{l=0}^k a_k a_l |k-l|^{2\hat{H}}} \right)^{1/2}$$

Consistencia y normalidad asintótica de \hat{H} y $\hat{\sigma}$.

Teorema

Si el filtro a tiene orden $L \geq 2$, $T_n \rightarrow +\infty$ y $\Delta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$, entonces

1

$$\left(\hat{H}, \hat{\sigma} \right) \xrightarrow{\text{c.s.}} (H, \sigma).$$

2

$$\sqrt{n} \left(\hat{H} - H \right) \xrightarrow{w} N(0, \Gamma_1(H, \sigma, a))$$

3

$$\frac{\sqrt{n}}{\log n} \left(\hat{\sigma} - \sigma \right) \xrightarrow{w} N(0, \Gamma_2(H, \sigma, a))$$

- Arratia, Cabaña & Cabaña (2003) prueban que un $OU(p)$ (compuesta del operador OU aplicado p veces a un browniano), puede ser visto como una versión continua de un $ARMA(p, q)$ con $q < p$.
- Comte & Renault (1996) prueban que un FOU puede ser visto como el análogo continuo de un FARIMA (1,d,0).
- Combinando ambos resultados, se puede probar que un $FOU(p)$ puede ser visto como el análogo continuo de un $FARIMA(p, d, q)$ con $q < p$.

Contenidos

- 1 Introducción-Preliminares
- 2 mBf
 - Procesos autosimilares.
 - Movimiento Browniano fraccional.
 - Dos pilares.
 - mBf como límite de caminatas aleatorias.
- 3 FOU
 - Definición y propiedades.
 - Historia.
- 4 Estimación de parámetros
 - Predicción.
- 5 Aplicación
- 6 FOU de orden p
 - Definición y propiedades.
 - Estimadores de los parámetros.
 - Consistencia y normalidad asintótica.
- 7 Referencias

- 1 Arratia, A., Cabaña, A. & Cabaña, E. "*Modeling stationary data by a class of generalized Ornstein Uhlenbeck-process*", Advances in Intelligent Data Analysis XIII, 13th International Symposium, IDA 2014, Leuven, Belgium, october 30, november 1, 2014, Proceedings.
- 2 Billingsley, P., "*Convergence of Probability Measures*", John Wiley & Sons, New York, 1968.
- 3 Brouste, A. & Iacus, S., "*Parameter estimation for the discretely observed fractional Ornstein–Uhlenbeck process and the Yuima R package*", Computational Statistics, 28(4): 1529-1547, 2013.
- 4 Cheridito, P., Kawaguchi, H. & Maejima, M. "*Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes*". Electronic Journal of Probability, 8(3): 1-14,2003.
- 5 Comte, F. & Renault, E. (1996), "*Long memory continuous time models*", Journal of Econometrics 73, 101-149.
- 6 Doob, J.L., "*The Brownian movement and stochastic equations*", Ann. of Math. (2) 43, 351-369, 1942.

- 7 Graneri, J. R., "*Análisis de datos hidrológicos y procesos de memoria larga*", tesis de maestría, 2014.
- 8 Hu, Y. & Nulart, D. "*Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes*". *Statistics and Probability Letters*, 80(11-12): 1030-1038, 2010.
- 9 Ibragimov, I. A. & Rozanov, Y. A. "*Gaussian Random Processes*", Springer, Verlag, 1978.
- 10 Iltas, I. & Lang, G. "*Quadratic variations and estimation and estimation of the local hölder index of a gaussian processes*", *Annals de l'Institut Henry Poincaré*, 23(4): 407-436, 1997.
- 11 Kessler, M. "*Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations*". *Scandinavian Journal of Statistics*, 24:211-229, 1997.
- 12 Langevin, P., "Sur la théorie du mouvement brownien", *C.R. Acad. Sci. Paris* 146, 530-533, 1908.
- 13 Lamperti, J. W., "*Semi-stable stochastic processes*", *Trans. Amer. Math. Soc.* 104, 62-78.

- 14 Mandelbrot, B., *“Une classe de processus stochastiques homothétiques a soi, application a loi climatologique de H. E. Hurst”*, Comptes REdnus, Acad. Sci. Paris, 240: 3274-3277, 1965.
- 15 Mandelbrot, B. & Van Ness, J. *“Fractional Brownian motions, fractional noises and application”*. SIAM Review, 10:422-437, 1968.
- 16 Pipiras, V. and Taqqu, M., *“Integration questions related to fractional Brownian motion”*, Prob. Th. Rel. Fields 118, 121-291, 2000.
- 17 Sottinen, T., *“Fractional brownian motion, random walks and binary market models”*, Finance and Stochastic 5 (3), 343-355, 2001.
- 18 Taqqu, M.S., Teverovsky, M. & Willinger, W., *“Estimators for long range dependence: an empirical study”*, Fractals, 3, 785-798 (1995).
- 19 Ornstein, L.S. & Uhlenbeck, G.E., *“On the theory of Brownian Motion”*; physical Review 36, 823-841, 1930.