

## Rango de una transformación lineal

En este capítulo definiremos el rango de una transformación lineal, que es un invariante numérico que mide el “tamaño” de la imagen.

**DEFINICIÓN 6.1.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Si  $T(V) = \text{Im}(T) \subset W$  tiene dimensión finita, se dice que  $T$  tiene *rango finito* y  $\dim(T(V))$  se llama el *rango de  $T$*  y se denota  $\dim T(V) = r(T)$ .

**DEFINICIÓN 6.2.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales,  $\alpha \in V^*$  y  $w \in W$ . Se define la transformación lineal  $\alpha|w : V \rightarrow W$  de la siguiente forma:  $(\alpha|w)(v) = \alpha(v)w$  – ver Ejemplo 2.2.38 parte (2).

**OBSERVACIÓN 6.3.** (1) En caso de que la dimensión de  $V$  o la de  $W$  sean finitas, se deduce que  $\dim T(V)$  es también finita y consecuentemente tiene sentido hablar del rango de  $T$ . La demostración de la finitud en los casos mencionados más arriba se deja como ejercicio. Puede suceder que  $\dim T(V)$  sea finita aunque la dimensión de  $V$  y de  $W$  sean infinitas como lo muestra el siguiente ejemplo.  $T : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[X]$   $T(p) = p'(0)(1+X+X^2)$ . (2) Si  $\alpha \neq 0 \in V^*$  y  $w \in W$  es un vector no nulo, es claro que la transformación lineal  $\alpha|w : V \rightarrow W$  tiene rango uno. El lema que sigue generaliza ese resultado.

**LEMA 6.4.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal de rango  $r$  y  $\{w_1, \dots, w_r\}$  una base de  $T(V)$ . Entonces existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V^*$  tales que  $T = \alpha_1|w_1 + \dots + \alpha_r|w_r$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $v \in V$ , escribimos  $T(v) = \alpha_1(v)w_1 + \dots + \alpha_r(v)w_r$  para ciertos escalares  $\alpha_1(v), \dots, \alpha_r(v)$ . Estos escalares definen funciones  $\alpha_i : V \rightarrow \mathbb{k}$  que son de hecho transformaciones lineales. De ahí se deduce inmediatamente el resultado.  $\square$

A continuación daremos un método para calcular el rango de una transformación lineal en términos de la matriz asociada en bases convenientes.

**LEMA 6.5.** Sean  $S : V' \rightarrow V$ ,  $T : V \rightarrow W$  y  $R : W \rightarrow W'$  transformaciones lineales. Si  $S$  y  $R$  son invertibles, entonces si el rango de  $T$  es finito también lo es el rango de  $RTS$  y además  $r(T) = r(RTS)$ .

**DEMOSTRACIÓN.**  $r(RTS) = \dim(RTS(V')) = \dim(RT(V)) = \dim(T(V)) = r(T)$ . La penúltima igualdad es consecuencia de que  $R$  es un isomorfismo de donde se deduce que  $R|_{T(V)} : T(V) \rightarrow R(T(V))$  es también un isomorfismo.  $\square$

**COROLARIO 6.6.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal entre espacios de dimensión finita. Si  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  son bases de  $V$  y  $W$  respectivamente, entonces  $r(T) = r(L_{\mathcal{C}[T]\mathcal{B}})$  – recordar que  $L_{\mathcal{C}[T]\mathcal{B}} : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$ , donde  $n$  y  $m$  son las dimensiones de  $V$  y  $W$  respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Este resultado se deduce inmediatamente del lema anterior y del hecho de que  $L_{c[T]_{\mathcal{B}}} = \mathbf{c}_C T \mathbf{c}_B^{-1}$ , donde  $\mathbf{c}_C$  y  $\mathbf{c}_B$  representan los mapas coordenados.  $\square$

Hemos reducido el problema de calcular el rango de una transformación lineal  $T$  al de calcular el rango de una transformación lineal de la forma  $L_A$ . Este último rango se calcula de la siguiente forma.

DEFINICIÓN 6.7. (1) Sea  $A \in M_{m \times n}$  y llamemos  $c_j(A)$ ,  $j = 1, \dots, n$  a los vectores de  $\mathbb{k}^m$  definidos por las columnas de  $A$ . En forma similar se definen  $f_i(A)$ ,  $i = 1, \dots, m$  a los vectores de  $\mathbb{k}^n$  definidos por las filas de  $A$ . Por razones mnemotécnicas representamos a los  $c_j(A)$  como vectores columna y a los  $f_i(A)$  como vectores fila.

(2) Se define el *rango por columnas* de la matriz  $A$  – y se denota como  $\text{rc}(A)$  – como la dimensión del subespacio de  $\mathbb{k}^m$  formado por los vectores  $c_j(A)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . En forma parecida se define el *rango por filas* de la matriz  $A$  – y se denota como  $\text{rf}(A)$  – como la dimensión del subespacio de  $\mathbb{k}^n$  formado por los vectores  $f_i(A)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

OBSERVACIÓN 6.8. Se puede probar (lo haremos más adelante, ver Corolario 8.??), que si  $A$  es una matriz arbitraria el rango por filas de  $A$  coincide con el rango por columnas de  $A$ .

LEMA 6.9. Sea  $A \in M_{m \times n}$  y  $L_A : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$  la correspondiente transformación lineal. Entonces  $L_A(\mathbb{k}^n) = \langle c_1(A), \dots, c_n(A) \rangle$  y  $\text{r}(L_A) = \text{rc}(A)$ .

DEMOSTRACIÓN. El resultado se deduce directamente del siguiente hecho: si  $j = 1, \dots, n$  entonces  $L_A(e_j) = c_j(A)$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 6.10. (1) Teniendo en cuenta que los rangos por filas y por columnas de una matriz arbitraria son iguales (como se verá mas tarde) el teorema anterior tiene también una versión “por filas”.

(2) En particular se deduce de lo anterior que si  $C$  y  $D$  son matrices invertibles, entonces el rango por columnas de la matriz  $CAD$  coincide con el rango por columnas de  $A$ . Teniendo en cuenta la igualdad del rango por filas y por columnas de una matriz, vale un resultado análogo para los rangos por filas.

(3) En definitiva, hemos probado que si  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal entre espacios de dimensión finita, entonces el rango de  $T$  coincide con el rango por columnas de cualquier matriz asociada a  $T$  en cualesquiera bases que elijamos. Teniendo en cuenta lo anterior vale un resultado análogo para el rango por filas.

EJEMPLO 6.11. Consideremos la transformación lineal  $D : \mathbb{k}_3[X] \rightarrow \mathbb{k}_3[X]$  definido como  $D(p) = p'$ . Queremos calcular el rango de  $D$ . Si  $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$  es la base standard de  $\mathbb{k}_3[X]$ , tenemos que la matriz asociada a  $D$  en esa base es  $_{\mathcal{B}}[D]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Como la primera columna es cero y las otras son múltiplos de los vectores  $e_1, e_2, e_3$  de la base canónica de  $\mathbb{k}^4$ , el espacio generado por las columnas de esta matriz, tiene dimensión tres.