CENTRO DE MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS.

Lunes 21 *de julio de 2008.*

Examen de Introducción a la Topología, curso 2008.

APELLIDOS **NOMBRES** **Nº DE CÉDULA**

1. Sea $(X;\tau)$ un espacio topológico.

   a) Definir conexion y conexión por caminos para un conjunto $A \subset X$.

   b) Sea $\alpha > 0$ un número irracional. Demostrar que $D = \{m\alpha + n \,/\, m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$ con la topología del orden. [Sugerencia: Probar que $P = \{x \in D \,/\, x > 0\}$ no tiene mínimo.] Concluir que para todo $u_0 \in \mathbb{R}$: $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x = u_0 + (m\alpha + n)2\pi;\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$

   c) Consideremos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$ con la topología relativa:

   $$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y,z) = (t, \operatorname{sen}(\frac{1}{t}), \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{2}}{t})),\ t \in (0,1]\}$$

   Demostrar que

   $$\overline{X} = X \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 0,\ -1 \le y \le 1,\ -1 \le z \le 1\}$$

   [Sugerencia: Para $(y,z) \in [-1,1] \times [-1,1]$, considere $u = u_0 + (\sqrt{2}m + n)2\pi$, $m, n \in \mathbb{Z}$; tal que $\operatorname{sen}((u_0/\sqrt{2} + 2m\pi) = y$.]

   d) Hallar las componentes conexas y las componentes conexas por caminos de $\overline{X}$. Justificar cada afirmación.

2. *a*) Definir X espacio topológico segundo axioma de numerabilidad.

   b) Sea X espacio topológico que cumple el segundo axioma de numerabilidad. Probar que si $Y \subset X$ es no numerable, entonces Y contiene una infinidad no numerable de sus puntos de acumulación. [Sugerencia: Considere un denso numerable en Y]

   c) Demostrar que si M es un espacio métrico separable, entonces cumple el segundo axioma de numerabilidad.

   d) Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$. Decimos que $U \subset X$ es un conjunto abierto:
   i) Si $U \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$ U es abierto si es abierto con la topología relativa heredada de la topología usual de R^2.
   ii) Si $(0,0) \in U$ entonces $(U \backslash \{(0,0)\})^c$ es finito o todo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$.
   ¿Es X un espacio metrizable? Justificar la respuesta.

3. Se considera el espacio topológico $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la topología relativa.

   a) Demostrar que $I = \{x \in [0,1] \,/\, x \text{ es irracional } \}$ es un conjunto residual (i.e.: intersección numerable de abiertos densos).

   b) Sea $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, sucesión conteniendo todos los números racionales de $[0,1]$. Para cada k definimos $f_k(x) = \frac{1}{x-r_k}$, $x \in I$. Demostrar que f_k es continua en I. Demostrar que $\phi_k : I \times I \to \mathbb{R}$

   $$\phi_k(x,y) = \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{1 + |f_k(x) - f_k(y)|} \text{ es continua en } I \times I$$

   y se extiende continuamente a todo $[0,1]^2 \setminus \{(r_k, r_k)\}$, valiendo $0 \leq \phi_k(x,y) \leq 1$.

   c) Se considera la función

   $$\rho(x,y) = |x-y| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(x,y)}{2^k} \qquad x, y \in I\,.$$

   Demostrar que $\rho(x,y)$ está bien definida y es una distancia en I [Ayuda: aceptar como válido que $\phi_k(x,y) \leq \phi_k(x,z) + \phi_k(z,y)$, para todo $x,y,z \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$.]

   d) Mostrar que I con la métrica $\rho(x,y)$ es completo. [Sugerencia: Mostrar que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para $\rho(x,y)$ entonces es de Cauchy para $|x-y|$, pero si $x_n \to r \in \mathbb{Q}$ con la métrica usual $|\ \ |$ entonces no es de Cauchy para $\rho(x,y)$.]
   ¿Puede dotarse a $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ de una métrica que lo convierta en un espacio métrico completo?