

Examen 13/08/2007

1.
  - a) Decimos que dos conjuntos  $M$  y  $N$  de un espacio topológico  $X$  son separados si  $\overline{M} \cap N = \emptyset$  y  $\overline{N} \cap M = \emptyset$ . Probar que un subconjunto  $A$  de  $X$  es conexo si y solo si no es union de dos conjuntos no vacíos y separados.
  - b) Sea  $X$  un espacio topológico conexo y  $A \subset X$  conexo. Supongamos que  $A^c = M \cup N$  con  $M$  y  $N$  separados. Probar que  $A \cup M$  y  $A \cup N$  son conexos.
  - c) Un espacio topológico  $X$  se dice *unicoherente* si es conexo y se cumple lo siguiente: si  $A$  y  $B$  son conjuntos cerrados y conexos tal que  $X = A \cup B$  entonces  $A \cap B$  es conexo.  
Sea  $S$  un subconjunto conexo de un espacio unicoherente. Probar que la frontera de cualquier componente de  $S^c$  es conexa.
2. Sea  $X$  un espacio métrico compacto, dado  $\epsilon > 0$  se define una  $\epsilon$ -cadena entre  $x, y \in X$  como una sucesión finita de puntos  $\{x = x_1, x_2, \dots, x_n = y\}$  tal que  $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$ . Dado  $A \subset X$  se define  $C_\epsilon(A)$  el conjunto de los puntos que se pueden unir a algún punto de  $A$  por una  $\epsilon$ -cadena, y  $C(A) = \bigcap \{C_\epsilon(A) : \epsilon > 0\}$ .
  - a) Sea  $A \subset X$  y  $\epsilon > 0$ . Definimos  $V_0(A) = A$ ,  $V_1(A) = \{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}$ , y por recurrencia  $V_{n+1}(A) = V_1(V_n(A))$ . Probar que  $C_\epsilon(A) = \bigcup \{V_n(A) : n \in \mathbb{N}\}$ .
  - b) Probar que para cada  $\epsilon > 0$  y  $A \subset X$  el conjunto  $C_\epsilon(A)$  es abierto y cerrado.
  - c) Mostrar que si  $A$  es conexo, entonces  $C(A)$  es conexo. Deducir que entonces  $C(\{x\})$  es la componente conexa de  $x$ .
  - d) Probar que si  $A \subset X$  entonces  $C(A) = \bigcup \{C_x : x \in \overline{A}\}$  donde  $C_x$  es la componente conexa de  $x$ .
  - e) Dar un ejemplo de un subconjunto  $X$  cerrado de  $\mathbb{R}^2$  (en particular  $X$  es métrico localmente compacto) y *no conexo* tal que cualquier par de puntos pueden unirse con una  $\epsilon$ -cadena para todo  $\epsilon > 0$ .
3. Si  $I = [0, 1]$  sea  $H$  la familia de todas las funciones  $f : I \rightarrow I$  no decrecientes, con la topología relativa a la del producto  $I^I$ .
  - a) Probar que  $H$  es compacto y Hausdorff.
  - b) Probar que  $H$  es  $N_1$ . Deducir que  $H$  es secuencialmente compacto. (Sugerencia: Usar que el conjunto de puntos de discontinuidad de una  $f \in H$  es numerable.)
  - c) Mostrar que  $H$  es separable.
  - d) Mostrar que  $H$  no es métrico. (Considere  $A = \{f_t \in H : f_t([0, t)) = 0, f_t((t, 1]) = 1 \text{ y } f_t(t) = 1/2\}$ , observar que  $A' \cap A = \emptyset$ .)