

Examen 09/07/2007

1. En  $\mathbb{R}$  consideramos la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{ \{x\} \cup [(a, b) \cap \mathbb{Q}] : x \in (a, b), x \in \mathbb{R} \}.$$

- Probar que  $\mathcal{B}$  es base de una topología que designaremos por  $\tau$ . Mostrar que  $\tau$  es más fina que la topología usual.
  - Probar que  $(\mathbb{R}, \tau)$  es Hausdorff. Probar que si  $J \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  entonces es cerrado.
  - Probar que  $(\mathbb{R}, \tau)$  no es un espacio regular y que no es  $N_2$  (no tiene base numerable).
  - Probar que  $C$  es compacto en  $(\mathbb{R}, \tau)$  si y solamente si se verifica:
    - $C \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$  es finito.
    - $C$  es compacto con la topología usual.
  - Es  $(\mathbb{R}, \tau)$  conexo?
2. Sean  $x, y \in \mathbb{R}^\omega$ , se define la siguiente métrica  $d(x, y) = 1/i$  donde  $i$  es la primer coordenada en la que difieren las sucesiones, y  $d(x, x) = 0$ , denotamos por  $X = (\mathbb{R}^\omega, d)$  con la topología métrica.
- Probar que la topología inducida por  $d$  es más fina que la topología producto.
  - Probar que  $X$  es completo.
  - Probar que la topología inducida en cada eje es la discreta.
  - Probar que  $X$  no es  $\sigma$ -compacto, ni localmente compacto.
  - Probar que  $X$  no es separable.
3. Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Decimos que  $A, B$  es una *separación* de  $X$  si  $A$  y  $B$  son abiertos no vacíos disjuntos tal que  $X = A \cup B$ . Decimos que  $X$  no separa dos puntos  $a, b \in X$  si para cualquier separación  $X = A \cup B$  se tiene que  $a, b \in A$  o bien  $a, b \in B$ . Un subconjunto  $K \subset X$  no separa los puntos  $a, b \in K$  si no los separa con la topología relativa.

- Definimos una relación en  $X$  así:  $x \sim y$  si  $X$  no separa los puntos  $x, y$ . Probar que  $\sim$  es una relación de equivalencia. A las clases de equivalencia las llamaremos *cuasi-componentes*.
- Mostrar que las cuasi-componentes son conjuntos cerrados. Mostrar que toda componente conexa de  $X$  está contenida en una cuasi-componente.
- Consideremos el siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  con la topología relativa:

$$X = \{(0, 0), (0, 1)\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1].$$

Probar que  $\{(0, 0), (0, 1)\}$  es una cuasi-componente.

- Supongamos que  $X$  es un espacio Hausdorff y compacto. Probar que toda cuasi-componente es una componente conexa. (Sug: Sean  $x, y$  puntos de una cuasi-componente. Considerar la familia  $\mathcal{F} = \{K \subset X : K \text{ es cerrado y no separa } x \text{ de } y\}$  y ordenarla por inclusión.