Introducción a la Probabilidad y Estadística
Curso 2008

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen (15 de julio de 2008)

1. Si X, Y tienen distribución uniforme en $(0, a)$ y son independientes, definimos $Z = \frac{X}{Y}$.

   a) Hallar la densidad de Z.

   b) Investigar la existencia de momentos de Z.

   c) Si $T = \text{mín}\{Z, 1\}$ hallar $E(T)$.

   d) Sean $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ variables i.i.d. con distribución igual a la de T.
   Estudiar la convergencia en probabilidad y casi segura de $\text{máx}\{T_1, \ldots, T_n\}$.

2. Dados dos sucesos A y B en un espacio de probabilidad sobre cierto conjunto Ω tales que:

$$P(A) < 1, \quad P(B) < 1, \quad P(A \cap B) \neq 0, \quad A \cup B = \Omega.$$

   Supongamos que es posible repetir el experimento n veces en forma independiente. Se definen:
   $X =$"cantidad de veces que ocurre A en las n pruebas",
   $Y =$"cantidad de veces que ocurre B en las n pruebas",
   $Z =$"cantidad de veces que ocurren A y B en las n pruebas".

   a) Hallar la distribución de cada una de las 3 variables.

   b) Hallar el coeficiente de correlación entre las variables Z y $X + Y$.

   c) Hallar la distribución conjunta del par X, Y.

   d) Demostrar que para todo $i = 0, 1, 2, ..., n$ se cumple que $\sum_{j=n-i}^{n} C_{i+j-n}^{n} C_{n-j}^{2n-i-j} = 2^i C_i^n$.
   (Sugerencia: asignar probabilidades adecuadas a los sucesos A, $A \cap B$ y usar la parte anterior.)

3. Consideramos $\{X_n\}_{n \in N}$ sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \in L^\alpha$ para todo $\alpha > 0$.
   Demostrar las siguientes propiedades.

   a) Si $X_n \xrightarrow{P} a \in \mathbb{R}$ y existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que para todo n se tiene que $P(|X_n| > k) = 0$, entonces $E(X_n) \to a$.

   b) Si $X_n \xrightarrow{P} a$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} V(X_n) < +\infty$, entonces $X_n \xrightarrow{c.s.} a$.

   c) Si $P(X_n = a_n) = p_n$, $P(X_n = b_n) = 1 - p_n$, donde $a_n \to a$, $b_n \to b$, con $a \neq b$. Entonces son equivalentes:

      I) $X_n \xrightarrow{c.s.} a$.

      II) $X_n \xrightarrow{P} a$.

      III) $E(|X_n - a|^\alpha) \to 0$ cualquiera sea $\alpha > 0$.

      IV) $p_n \to 1$.