

**EXAMEN - INTRODUCCION A LA PROBABILIDAD Y ESTADISTICA**

1. Se considera una urna con  $n$  bolitas blancas y  $m$  negras. Se extraen en forma sucesiva bolitas sin reposición hasta que salga la primera blanca. Se define la variable aleatoria  $X =$  “número de extracciones realizadas”.

a) Hallar la función de probabilidad de  $X$ .

b) Definimos las variables:  $Y_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la primera extracción es negra} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$  ;

$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_{j-1} = 1 \text{ y la } j - \text{ésima extracción es negra} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$  para  $j = 2, 3, \dots, m$ .

Hallar  $E(Y_j)$  para cada  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ .

c) Probar que  $E(X) = \frac{n+m+1}{n+1}$ .

2. Se considera  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución  $\text{Ber}(p)$  donde  $p \in (0, 1)$ . Sea  $h \in (0, 1)$  fijo. Se definen las sucesiones  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dadas por  $Y_n = \prod_{k=1}^n (1 - hX_k)$  y  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ .

a) Hallar  $E(S_n)$ .

b) Calcular el límite casi seguro de  $\sqrt[n]{Y_n}$ .

c) Clasificar la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ .

3. Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una M.A.S. con distribución como la de cierta  $X$  absolutamente continua con distribución  $F$ .

Definimos  $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  y  $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .

a) Probar que si  $y < x$ , entonces  $F_{X_{(n)}, X_{(1)}}(x, y) = F_{X_{(n)}}(x) - (F(x) - F(y))^n$  y deducir  $f_{X_{(n)}, X_{(1)}}$ .

b) Si ahora  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es una M.A.S. con distribución uniforme en el intervalo  $[\theta - 1, \theta + 1]$  donde  $\theta \in \mathbb{R}$ .

1) Probar que  $X_{(n)} \leq X_{(1)} + 2$  casi seguramente.

2) Probar que existen infinitos estimadores máximo verosímiles de  $\theta$ .

3) Hallar  $E(X_{(n)}X_{(1)})$ .

Sugerencia:  $\int_{\theta-1}^{\theta+1} x \left( \int_{\theta-1}^x y (x-y)^{n-2} dy \right) dx = \frac{2^n}{(2+n)n(n-1)} (2\theta^2 + \theta^2 n + 2 - n)$ .

4) Si  $\tilde{\theta} = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$  probar que es insesgado como estimador de  $\theta$  y teniendo en cuenta que  $V(X_{(n)}) = V(X_{(1)}) = \frac{4n}{(2+n)(1+n)^2}$ , deducir que  $\tilde{\theta}$  es fuertemente consistente.