Universidad de la República

Facultad de Ciencias **17 de diciembre de 2007**

EXAMEN - INTRODUCCION A LA PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

1. En un pueblo donde hay r individuos, una persona le comenta un hecho a otra, quien a su vez se lo traslada a una tercera persona, ésta a otra y así sucesivamente. Se supone que en cada vez, la persona receptora del rumor sólo sabe quién le trasmite el rumor, pero desconoce quiénes más lo conocen. A su vez elige al azar a quién se lo va a trasmitir. Le llamamos A_n al suceso "el rumor pasa n veces sin regresar al que lo originó".

   a) Hallar $P(A_n)$.

   b) Hallar $P\left(\cap_{n=2}^{+\infty} \cup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$.

   c) Si X es la variable aleatoria que cuenta la cantidad de personas que se enteran del rumor hasta que a alguna le regresa el mismo, hallar su función de probabilidad.

2. Decimos que una variable aleatoria tiene distribución de Cauchy con parámetros μ, $\sigma > 0$ cuando tiene por densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\pi\left(1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)} \qquad \text{Not: } X \sim C(\mu,\sigma).$$

   a) Probar que si $X \sim C(0,a)$ e $Y \sim C(0,b)$ son independientes, entonces $X+Y \sim C(0,a+b)$.
   Se sugiere recordar que una primitiva de $\frac{1}{(a^2+x^2)\left(b^2+(z-x)^2\right)}$ es
   $\frac{z\left(\ln\left(a^2+x^2\right)\right)-z\left(\ln\left(b^2+z^2-2zx+x^2\right)\right)}{(b^2-2ba+z^2+a^2)(a^2+2ba+b^2+z^2)} + \frac{\left(\arctan\frac{x}{a}\right)\left(b^2+z^2-a^2\right)}{(b^2-2ba+z^2+a^2)(a^2+2ba+b^2+z^2)a} + \frac{\left(\arctan\frac{-z+x}{b}\right)\left(z^2-b^2+a^2\right)}{(b^2-2ba+z^2+a^2)(a^2+2ba+b^2+z^2)b}$

   b) Supongamos que $X_1, X_2, ..., X_n$ es una M.A.S. con distribución como la de cierta $X \sim C(0,1)$.

      1) Estudiar convergencia casi segura de $\overline{X_n}$.

      2) Estudiar convergencia en distribución de $\overline{X_n}$.

3. Si $X_1, X_2, ..., X_n$ es una M.A.S. con distribución como la de cierta $X \sim$Poisson(λ). Consideramos $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$, el parámetro $\theta = e^{-\lambda}$ y los estimadores $\widehat{\theta} = 1_{\{X_1=0\}}$ y $\widetilde{\theta} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{T_n}$.

   a) Probar que T_n tiene distribución Poisson$(n\lambda)$.

   b) Probar que $\widehat{\theta}$ y $\widetilde{\theta}$ son estimadores insesgados de θ.

   c) Probar que $V\left(\widetilde{\theta}\right) \leq V\left(\widehat{\theta}\right)$.

   d) Probar que $\widetilde{\theta}$ es débilmente consistente como estimador de θ.