

Examen, Viernes 18 de mayo de 2007

**Ejercicio 1.** Calcular justificando detalladamente:

$$(a) \lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^x dx \quad (b) \lim_n \int_0^1 \frac{\log(n+x)}{n} e^{-x} \cos x dx$$

$$(c) \lim_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}} dx$$

**Ejercicio 2.** Sean  $\mu$  y  $\{\mu_n\}$  medidas de probabilidad (postivas y de masa total 1) en un espacio métrico  $S$  con la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{S}$ . Probar las siguientes equivalencias:

(a) Para toda  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  continua y acotada, se tiene

$$\int_S f(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int_S f(x) d\mu(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

(b) Para toda  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua y acotada, se tiene

$$\int_S f(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int_S f(x) d\mu(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

(c) Para todo  $F$  cerrado, se tiene

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F), \quad n \rightarrow \infty.$$

(d) Para todo  $G$  abierto, se tiene

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G), \quad n \rightarrow \infty.$$

(e) Para todo conjunto  $A$  tal que  $\mu(\delta A) = 0$  (donde  $\delta A$  es la frontera de  $A$ ), se tiene

$$\lim \mu_n(A) = \mu(A).$$

Sugerencia: Demostrar (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (a); (c)  $\Leftrightarrow$  (d); (c)  $\Leftrightarrow$  (e).

**Ejercicio 3.** Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida finito.  $T: X \rightarrow X$  medible que preserva la medida  $\mu$ . Si  $A \in \mathcal{A}$  se define

$$\tilde{A} = \{x \in A : T^j(x) \in A, \text{ para infinitos valores de } j \text{ enteros positivos}\}$$

Se define ahora  $N: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{Z}$  como  $N(x) = m$  si  $m > 0$ ,  $T^m(x) \in A$  y  $T^j(x) \notin A$ , para  $0 < j < m$

(a) Probar que  $\mu(A - \tilde{A}) = 0$  y que  $N$  es una función medible.

(b) Sea  $\tilde{T}: \tilde{A} \rightarrow X$  tal que  $\tilde{T}(x) = T^{N(x)}(x)$  probar que  $\tilde{T}(\tilde{A}) \subset \tilde{A}$ ,  $\mu(\tilde{A} - \tilde{T}(\tilde{A})) = 0$  y que si  $T$  es invertible entonces  $\tilde{T}$  preserva la medida  $\mu$ .

Sugerencia: considerar  $A_j = N^{-1}(j)$  y probar que  $\forall C \subset A_j$  medible se cumple que  $\mu(\tilde{T}(C)) = \mu(C)$ .

(c) Demostrar que  $T^m(A_j) \cap T^n(A_j) = \emptyset$ ,  $\forall 0 < m < n < j$  y deducir que  $N$  es integrable.