Examen. 26 de febrero del 2004

1. Se considera sobre el conjunto $X = (0, \infty)$ (con la topología usual) una medida de Borel μ, regular y positiva. Si $\theta \in (-1, 1)$, se define $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo $\pi\theta$:

$$R_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \pi\theta & -\operatorname{sen} \pi\theta \\ \operatorname{sen} \pi\theta & \cos \pi\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Sea $Z = \bigcup_{q \in \widetilde{Q}} R_q(X)$, donde $\widetilde{Q} = \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$. Sobre Z se considera la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$.

a) Probar que si $E \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, entonces $\mathcal{B}_E = \{F \cap E \mid F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\}$.

b) Probar que $\mathcal{B}_Z$ es la menor σ–álgebra sobre Z que contiene a $\mathcal{B}_X$ y que es invariante por cada R_q, con $q \in \widetilde{Q}$.

c) Demostrar que μ tiene una única extensión a una medida $\bar{\mu} : \mathcal{B}_Z \to [0, \infty]$ tal que $\bar{\mu}(E) = \bar{\mu}\big(R_q(E)\big)$, para todo $E \in \mathcal{B}_Z$ y $q \in \widetilde{Q}$. Mostrar que $\bar{\mu}$ es σ–finita.

d) Sea $\widetilde{\mu} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \to [0, \infty]$ dada por $\widetilde{\mu}(E) = \bar{\mu}(E \cap Z)$ para $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, donde $\bar{\mu}$ es la medida hallada en (c). Probar que $\widetilde{\mu}$ es una medida σ–finita que extiende a $\bar{\mu}$. Hallar la descomposición de Lebesgue de esta medida con respecto a la medida de Lebesgue.

e) Si $\bar{\mu}$ es la medida hallada en (c), probar que existe una medida de Borel regular en $\mathbb{R}^2$ que extiende a $\bar{\mu}$ si y sólo si $\mu = 0$.

2. En un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles convergente a f en casi todo punto.

a) Probar que $f_n \to f$ en medida si $\mu(X) < +\infty$, pero que no necesariamente es cierto si $\mu(X) = +\infty$.

b) Supongamos que para ciertas constantes $1 \leq p < +\infty$ y $k > 0$ se cumple $f_n \in \mathrm{L}^p(\mu)$ y $\|f_n\|_p = k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $f \in \mathrm{L}^p(\mu)$ y $\|f\|_p \leq k$, pero que no necesariamente se cumple que $\|f\|_p = k$ ni que $\{f_n\}$ es convergente en $\mathrm{L}^p(\mu)$.

c) Además de las hipótesis de la parte (b), supongamos que existen, para todo $\varepsilon > 0$, un natural $N(\varepsilon)$ y una función $g_\varepsilon \in \mathrm{L}^p(\mu)$ tales que $\|f_n - g_\varepsilon\|_p < \varepsilon$ para todo $n \geq N(\varepsilon)$. Probar que $\|f\|_p = k$ y $f_n \to f$ en $\mathrm{L}^p(\mu)$.

3. Sea $\mathcal{M}$ la familia de medidas de Borel sobre $[0, 1]$ con medida total 1 y sea $\mathcal{C}$ el conjunto de las funciones de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ continuas. Si $\{\mu_n\}$ y μ están en $\mathcal{M}$, decimos que $\{\mu_n\}$ converge débilmente a μ (y lo notamos $\mu_n \Rightarrow \mu$) si

$$\int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu, \quad \text{cuando } n \to +\infty,$$

para toda $f \in \mathcal{C}$.

a) Probar que si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones de $[0,1]$ en $[0,1]$ medibles cualesquiera, tal que $f_n \to f$ en μ–medida, con $\mu \in \mathcal{M}$; entonces

$$\int (\varphi \circ f_n - \varphi \circ f)\, d\mu \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}$.

b) Sean $\mu \in \mathcal{M}$, $\{f_n\}$ y f como en (a) y sean $\mu_{f_n}(B) = \mu\big(f_n^{-1}(B)\big)$ y $\mu_f(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big)$ para todo boreliano B. Probar que $\mu_{f_n} \Rightarrow \mu_f$.

c) Probar que si f es constante μ–ctp y $\mu_{f_n} \Rightarrow \mu_f$, entonces $f_n \to f$ en μ–medida.

d) Sea

$$A_n = \Big[0, \frac{1}{2^n}\Big) \cup \Big[\frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}\Big) \cup \cdots \cup \Big[\frac{2^n-4}{2^n}, \frac{2^n-3}{2^n}\Big) \cup \Big[\frac{2^n-2}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}\Big),$$

$f_n = \chi_{A_n}$ y $\mu = \mathsf{m}$ la medida de Lebesgue. Probar que μ_{f_n} converge débilmente a una medida en $\mathcal{M}$, pero $\{f_n\}$ **no** converge μ–medida a ninguna función.