

Examen. 18 de agosto del 2003

1. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(\Omega) = 1$. Sean $Y_1, Y_2, Y_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Sea \mathcal{B} la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} . Se definen los números reales

$$p_i(E) = \mu(Y_i^{-1}(E)), \quad F_i(x) = p_i((-\infty, x]),$$

para $i = 1, 2, 3$; $E \in \mathcal{B}$ y $x \in \mathbb{R}$. Probar que:

- a) p_i es una medida de Borel en \mathbb{R} y p_i es la restricción a \mathcal{B} de la medida de Lebesgue–Stieltjes μ_{F_i} (completa) asociada a la función F_i . Se cumple, además, $F_i(-\infty) = 0$ y $F_i(+\infty) = p_i(\mathbb{R}) = 1$.
- b) Para toda $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ medible Borel, $h \in L^1(\mathbb{R}, p_i)$ si y sólo si $h \circ Y_i \in L^1(\Omega, \mu)$. En ese caso,

$$\int_{\Omega} h \circ Y_i d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF_i(x).$$

Si $Y_1 \in L^1(\Omega, \mu)$, entonces $\int_{\Omega} Y_1 d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_1(x)$. (*Sugerencia:* inducción en L^1 .)

- c) Sea \mathfrak{m} la restricción a \mathcal{B} de la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . Si $p_2 \ll \mathfrak{m}$, entonces existe $f_2 \in L^1(\mathbb{R}, \mathfrak{m})$ con $f_2 \geq 0$ \mathfrak{m} -ctp tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_2(x) dx$$

para toda función compleja $h \in L^1(\mathbb{R}, p_2)$. Si además $Y_2 \in L^1(\Omega, \mu)$ entonces $\int_{\Omega} Y_2 d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_2(x) dx$.

- d) Si $Y_3 \in L^+(\Omega, \mu)$ entonces $\int_{\Omega} Y_3 d\mu = \int_0^{+\infty} (1 - F_3(x)) dx$. (*Sugerencia:* aplicar Fubini.)

2. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida finito y sea $f \in L^\infty(\mu)$ (con la norma del supremo esencial). Supongamos que $\|f\|_\infty = 1$ y definamos, para $n \geq 1$:

$$I_n = \int_X |f|^n d\mu.$$

- a) Probar que $I_n^2 \leq I_{n-1} I_{n+1}$ y que $I_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Concluir que I_{n+1}/I_n es una sucesión creciente. (*Sugerencia:* usar la desigualdad de Cauchy–Schwartz.)
- b) Demostrar que $I_{n+1} \leq I_n$ y concluir que I_{n+1}/I_n converge a un número $b \leq 1$.
- c) Demostrar que

$$\int_X |f|^n d\mu \leq \left(\int_X |f|^{n+1} d\mu \right)^{n/(n+1)} \mu(X)^{1/(n+1)}$$

(*Sugerencia:* usar la desigualdad de Hölder.)

- d) Probar que $\|f\|_n$ tiende a $1 = \|f\|_\infty$ por la izquierda, cuando $n \rightarrow +\infty$. Deducir que

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} \rightarrow 1, \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty.$$

(*Sugerencia:* utilizar la definición de supremo esencial.)

3. Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \mathbf{m})$ el espacio de medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . Los conjuntos \overline{E} , ∂E y E° son respectivamente la clausura, la frontera y el interior topológicos de $E \subset \mathbb{R}^n$. Los conjuntos \widehat{E} , bE y E_\circ son la *adherencia*, el *borde* y el *interior esenciales* de $E \in \mathcal{L}$, definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\widehat{E} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{m}(E \cap B(x, \varepsilon)) > 0 \text{ para todo } \varepsilon > 0\} \\ bE &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \mathbf{m}(E \cap B(x, \varepsilon)) < \mathbf{m}(B(x, \varepsilon)) \text{ para todo } \varepsilon > 0\} \\ E_\circ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{existe } \varepsilon_x > 0 \text{ tal que } \mathbf{m}(E \cap B(x, \varepsilon_x)) = \mathbf{m}(B(x, \varepsilon_x))\}\end{aligned}$$

Se llama *exterior esencial* de E al interior esencial de E^c , $(E^c)_\circ$, o lo que es lo mismo, $(\widehat{E})^c$. Probar las siguiente afirmaciones:

- a) E_\circ es abierto y $(E^c)_\circ = (\widehat{E})^c$, luego \widehat{E} es cerrado.
 $bE = \widehat{E} \cap (\widehat{E^c}) = \widehat{E} \setminus E_\circ$, luego bE es cerrado.
 El interior, borde y exterior esenciales de E forman una partición medible de \mathbb{R}^n .
 $E^\circ \subset E_\circ \subset \widehat{E} \subset \overline{E}$ y el exterior esencial de E contiene al topológico.
 $bE \subset \partial E$ y $\partial E \setminus bE = (\overline{E} \setminus \widehat{E}) \cup (E_\circ \setminus E^\circ)$.
- b) Se cumple $bE = \partial E$ si y sólo si $E_\circ = E^\circ$ y $\widehat{E} = \overline{E}$. En ese caso, también el exterior esencial y el topológico de E coinciden. Si U es abierto, entonces $\widehat{U} = \overline{U}$, y si F es cerrado entonces $F_\circ = F^\circ$. (*Sugerencia:* $(F_\circ)^c = \widehat{(F^c)}$.)
- c) Probar que para todo $n \geq 1$ existen en \mathbb{R}^n conjuntos U abierto, F cerrado y $E \in \mathcal{L}$ tales que $bU \neq \partial U$, $bF \neq \partial F$, $bE \neq \partial E$, $E_\circ \neq E^\circ$ y $\widehat{E} \neq \overline{E} = \mathbb{R}^n$. (*Sugerencia:* para $n = 1$ considerar $F^c = U = (-1, 0) \cup (0, 1)$ y $E = (F \cap \mathbb{Q}) \cup (U \cap \mathbb{Q}^c)$.)
- d) Para todo $E \in \mathcal{L}$ se cumple $\mathbf{m}(E \setminus \widehat{E}) = 0$. (*Sugerencia:* \mathbf{m} -ctp x pertenece al conjunto de Lebesgue de la función $\chi_E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{m})$.)