

Examen. 31 de julio del 2003

1. En un espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) , sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejas medibles tal que:
 - $f_n \rightarrow f$, μ -c.t.p.;
 - Existe $g_n \in L^1(\mu)$ tal que $|f_n| \leq g_n$ μ -c.t.p para todo $n \in \mathbb{N}$;
 - $g_n \rightarrow g$, μ -c.t.p.;
 - $g \in L^1(\mu)$ y $\int g_n d\mu \rightarrow \int g d\mu$
 - a) Probar que: $f_n, f \in L^1(\mu)$ y $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$. (*Sugerencia:* lema de Fatou para $g_n + f_n$ y $g_n - f_n$ cuando f_n es real.)
 - b) Probar que $f_n \rightarrow f$ en norma $L^1(\mu)$.
 - c) Si $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones complejas de $L^1(\mu)$ que converge μ -c.t.p. a $h \in L^1(\mu)$ y además $\|h_n\|_1 \rightarrow \|h\|_1$, probar que $h_n \rightarrow h$ en norma $L^1(\mu)$.
 - d) Para $1 < p < +\infty$, si $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones complejas de $L^p(\mu)$ que converge μ -c.t.p. a $h \in L^p(\mu)$ y además $\|h_n\|_p \rightarrow \|h\|_p$, probar que $h_n \rightarrow h$ en norma $L^p(\mu)$. (*Sugerencias:* lema de Fatou para $(|h| + |h_n|)^p - |h - h_n|^p$. Desigualdad de Minkowski para $\| |h| + |h_n| \|_p^p$.)
2. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida finita y sea $T : X \rightarrow X$ una función medible. Un conjunto $A \in \mathcal{M}$ se dice T -invariante si $T^{-1}(A) = A$. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{M} -medible (con la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}), se dice que es T -invariante si $f \circ T = f$ en todo punto de X .
 - a) Probar que la familia \mathcal{A} de los conjuntos de \mathcal{M} que son T -invariantes es una σ -álgebra.
 - b) Probar que f es T -invariante si y solo si es \mathcal{A} -medible (es decir $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo Boreliano $B \subset \mathbb{R}$).
 - c) Probar que la familia $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{M} \mid \mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)\}$ contiene a \mathcal{A} , es una clase monótona cerrada en complementos y en uniones numerables de conjuntos disjuntos dos a dos.
 - d) Probar que $\mathcal{N} = \{B \in \mathcal{C} \mid E \cap B \in \mathcal{C} \text{ para todo } E \in \mathcal{C}\}$ es no vacía, cerrada en complementos y en intersecciones finitas. ¿Es \mathcal{N} una σ -álgebra?
3. Sea X un espacio topológico LCH (localmente compacto y de Hausdorff). Sea μ una medida de Radon en la σ -álgebra de Borel de X . Sea $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible compleja tal que $\mu(E) < \infty$, donde $E = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Sea $\varepsilon > 0$ dado.
 - a) Si $\|f\|_\infty < \infty$, probar que existe $A \subset E$ tal que $\mu(E \setminus A) < \varepsilon$ y $f|_A$ es continua. (*Sugerencias:* $C_c(X)$ es denso en $L^1(\mu)$, subsucesión μ -c.t.p. convergente, teorema de Egoroff.)
 - b) Si $\|f\|_\infty = \infty$ probar que existe $B \subset E$ tal que $\mu(E \setminus B) < \varepsilon$ y $\|f|_B\|_\infty < \infty$. Deducir que también existe $A \subset E$ como en la parte a).

- c) Probar que existen K compacto y V abierto tales que $K \subset A \subset E \subset V$ y verifican que $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$ y $f|_{K \cup V^c}$ es continua. (*Sugerencia:* regularidad de conjuntos con medida de Radon finita.)
- d) Probar que existe $g \in C_c(X)$ tal que $\mu(\{x \in X \mid g(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$. (*Sugerencia:* teorema de extensión de Tietze.)