

Examen. 8 de agosto del 2001

1. Decimos que $t \in \mathbb{R}$ es un *número de Liouville* si existen reales $C > 0$ y $r > 2$ tales que

$$\left| t - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^r}$$

para todo p, q enteros. Sea $N(C, r)$ el conjunto de los $t \in [0, 1]$ que no satisfacen la condición anterior para algún par de enteros $0 \leq p \leq q$.

- a) Probar que $m(N(C, r)) \leq 2C \sum_{q \neq 0} 1/q^{r-1}$.
b) Mostrar que el complemento en $[0, 1]$ de los números de Liouville está contenido en

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} N\left(\frac{1}{m}, 3\right).$$

- c) Concluir que el complemento de los números de Liouville tiene medida 0.

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función Boreliana que verifica $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ (ecuación de Cauchy).

- a) Probar que f está acotada en un entorno del origen. (*Sugerencia:* el conjunto $\{x \mid |f(x)| \leq K\}$ tiene medida de Lebesgue positiva para algún K .)
b) Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones Borelianas que satisfacen la ecuación de Cauchy. Probar que si $f_n \rightarrow f$ en casi todo punto, entonces

$$\int_K f_n \rightarrow \int_K f$$

para todo compacto K .

3. Sea E un conjunto de números reales y $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $p_n \rightarrow 0$. Supongamos que $E + p_n = E$ para todo n . Sea

$$F(x) = m(E \cap [\alpha, x]), \quad x > \alpha.$$

- a) Probar que

$$F(x + p_n) - F(x - p_n) = F(y + p_n) - F(y - p_n)$$

para $\alpha + p_n < x < y$.

- b) Probar que F es derivable en casi todo punto y que $F'(x) = 1$ en casi todo punto $x \in E$. Concluir que E ó E^c tiene medida nula. (*Sugerencia:* usar la parte (a) y el hecho¹ de que $D_E(x) = 1$ para casi todo $x \in E$.)
c) Sea f una función medible Lebesgue periódica con períodos s y t , con s ó t irracional. Probar que f es constante en casi todo punto. (*Sugerencia:* considerar los conjuntos $E_\lambda = \{f > \lambda\}$ y probar que están en las hipótesis de las partes anteriores observando que el conjunto $\{ns + mt \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ es denso en \mathbb{R} y todos sus elementos son períodos de f .)

¹Recordar la definición de la densidad de E en el ejercicio 5 del práctico 6:

$$D_E(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(E \cap B_r(x))}{m(B_r(x))}$$