

1. Sea $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Calcular el determinante de A .
- (b) Hallar una base de $\ker A$ y calcular la dimensión de la imagen de A .
- (c) Verificar que $(-3, 0, 3)$ está en la imagen de A .
- (d) Calcular Ax , donde $x = (1, -2, 2)$, y hallar una base de la imagen de A .

2. El crecimiento de una población de hembras se ajusta al modelo de Leslie correspondiente a la matriz

$$L := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcular el polinomio característico de L .
- (b) Determinar el comportamiento a largo plazo de la población.
- (c) Si a la larga hay 800 individuos en la clase más joven de la población, ¿cuántos individuos habrá, aproximadamente, en las restantes clases?

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 e^{y-x} - 4y$.

- (a) Hallar los puntos estacionarios de f y clasificarlos.
- (b) Calcular el máximo y el mínimo de f en el conjunto D encerrado por las rectas $x = 1$, $y = 0$, $y = x$.

SOLUCIONES

1. (a) $\det A = 0$.
 (b) $\{(1, -2, 1)\}$ es una base de $\ker A$ y la imagen de A tiene dimensión $3-1=2$.
 (c) $(-3, 0, 3) = A(0, 1, 0)$.
 (d) $A(1, -2, 2) = (-2, 1, 4)$. Además la imagen de A contiene a $(-3, 0, 3)$ y a $(-2, 1, 4)$, que son linealmente independientes, y por lo tanto forman una base de la imagen de A .

2. (a) $-\lambda^3 + 1/2\lambda + 1/2$
 (b) El valor propio dominante es 1, por lo tanto la población tiende a estabilizarse.
 (c) Un vector propio para el valor propio 1 es $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto habrá aproximadamente 400 individuos en la clase 2 y 200 en la 3.

3. (a) $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (x(2-x)e^{y-x}, x^2e^{y-x} - 4)$. Entonces $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si y sólo si $x = 2, y = 2$. Es un punto de silla ya que el hessiano de f en $(2, 2)$ es $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
 (b) El mínimo de f en D es -3, y se da en $(1, 1)$. El máximo de f en D es $1/e$, y se da en $(1, 0)$.