

1. (30 puntos) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 12 & -20 & -10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 15 & -30 & -13 \end{pmatrix}$

- (a) Calcular los valores propios de A .
- (b) Calcular el rango de A .
- (c) Hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $AP = PD$.

2. (30 puntos) Sea r la recta de ecuación paramétrica $r : (t, 1 - t, -2t)$.

- (a) Calcular la ecuación de la recta s que es paralela a r y pasa por el punto $(-1, 0, -1)$.
- (b) Sea π el plano que contiene a r y a s . Hallar un vector v que sea normal a π y que tenga norma 1.
- (c) Si $P = (2, 1, -1)$, averiguar si P pertenece o no a r , s , o π .

3. (20 puntos)

- (a) Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$$

- (b) Hallar la solución del sistema de la parte anterior que verifica $x(0) = 2$, $y(0) = 6$

4. (20 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y$. Hallar los puntos estacionarios de f y clasificarlos.

—————Respuestas—————

1)(a) 2 y -3, (b) 3, (c) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2)(a) $s : (t - 1, -t, -2t - 1)$, (b) $v = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -3, 2)$, (c) $P \in \pi$, pero $P \notin r$ y $P \notin s$.

3) (a) $(x(t), y(t)) = (C_1 e^t + C_2 e^{3t}, C_1 e^t - C_2 e^{3t})$, (b) $(x(t), y(t)) = (4e^t - 2e^{3t}, 4e^t + 2e^{3t})$.

4) Mínimo relativo en $(1, 1)$