Centro de Matemática. 5 de diciembre de 2007

Examen de Matemática I

Ejercicio 1. (a) Hallar

$$\int e^{\operatorname{sen}(x)+1}\cos(x)\,dx.$$

(b) Hallar

$$\int e^{\operatorname{sen}(x)+1}\cos(x)\operatorname{sen}(x)\,dx.$$

(c) Calcular el área de la figura comprendida entre el gráfico de la función

$$f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)+1}\cos(x)\operatorname{sen}(x)$$

y el eje Ox en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Ejercicio 2. Un modelo para el crecimiento de una población verifica la ecuación:

$$y' + 5y = e^{-5t}.$$

(a) Calcular la solución de la ecuación que verifica la condición inicial $y(0) = 0$.
(b) Averiguar el tamaño máximo que alcanza la población y el instante de tiempo en que éste se produce.
(c) Bosquejar la solución y determinar el límite del tamaño de la población cuando $t \to \infty$.

Ejercicio 3. Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

(a) Hallar los extremos relativos de f.
(b) Bosquejar el gráfico de f.
(c) Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

(i) Determinar los puntos fijos y clasificarlos.
(ii) Determinar por el método gráfico el

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

para las condiciónes iniciales $x_0 = 3/4$ y $x_0 = 2$.

Centro de Matemática. 5 de diciembre de 2007

Soluciones del Examen de Matemática I

Ejercicio 1. (a)

$$\int e^{\operatorname{sen}(x)+1}\cos(x)\,dx = e^{\operatorname{sen}(x)+1} + C.$$

(b) Por partes:

$$\int e^{\operatorname{sen}(x)+1}\cos(x)\operatorname{sen}(x)\,dx = e^{\operatorname{sen}(x)+1}(\operatorname{sen}(x)-1) + C.$$

(c) Evaluando

$$\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen}(x)+1}\cos(x)\operatorname{sen}(x)\,dx = e.$$

Ejercicio 2.

(a) Aplicando los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales obtenemos

$$y(t) = te^{-5t}.$$

(b) De resolver $y'(t) = 0$ resulta $t = 1/5$. Por el signo de la derivada es un máximo absoluto, que vale $y(1/5) = 1/(5e)$.

(c) El tamaño de la población tiende a cero si $t \to \infty$.

Ejercicio 3. (a) $f'(x) = 2x - \frac{1}{4} = 0$ implica $x = 1/4$. En $x = 1/4$ la función presenta el único extremo relativo, que es un mínimo, y toma el valor $f(1/4) = 7/16$.

(b) El bosquejo es una parábola con vértice en el mínimo hallado.

(c)(i) Resolviendo $f(x) = x$ resultan los puntos fijos $x = 1/2$ y $x = 1$. Como $f'(1) = 3/2$ el punto $x = 1$ es repulsor, como $f'(1/2) = 1/2$ el punto $x = 1/2$ es atractor.

(c)(ii) Para $x_0 = 3/4$ la sucesión x_n converge a $x = 1/2$, mientras que para $x_0 = 2$ la sucesión diverge a $+\infty$.