Centro de Matemática. 3 de agosto de 2007

Examen de Matemática I

Ejercicio 1. Se considera la función $f\colon [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\log(1-ax)+\pi, & \text{si } x \in [-1/2, 0), \\ \log(1+x)+b, & \text{si } x \in [0, 1/2]. \end{cases}$$

(a) Calcular a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en su dominio.

(b) Demostrar que existe $c \in [-1/2, 1/2]$ tal que se verifica

$$f(c) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\, dx.$$

y hallarlo explícitamente. (Sugerencia: para el cálculo de c comparar $f(x)$ con $f(-x)$.)

(c) Calcular la integral

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\, dx.$$

Ejercicio 2. Se considera la función

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(a) Calcular

$$\int_0^1 f(x)\, dx.$$

(b) Clasificar la integral impropia

$$\int_1^\infty f(x)\, dx.$$

(c) Calcular el volumen de revolución obtenido al girar $f(x)$ alrededor del eje Ox en el intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 3. (a) Un modelo para el crecimiento de una población verifica la ecuación:

$$x' = -2x^2 t.$$

(i) Calcular la solución de la ecuación que verifica la condición inicial $x(0) = 1$.

(ii) Bosquejar la solución y determinar el tamaño de la población para valores grandes del tiempo.

(b) Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}.$$

(i) Determinar los puntos fijos y clasificarlos.

(ii) Determinar por el método gráfico el comportamiento de la solución para la condición inicial $x_0 = 0$.

Centro de Matemática. 3 de agosto de 2007

Soluciones del Examen de Matemática I

Ejercicio 1. (a) De la continuidad en $x = 0$ resulta $b = \pi$, de igualar las derivadas resulta $a = 1$.

(b) La existencia de c resulta del teorema del valor medio, dado que la longitud del intervalo de integración es 1. Además, como $f(x) - \pi = -f(-x) - \pi$ resulta que $c = 0$.

(c) De la observación anterior (o haciendo el cálculo) resulta

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx = \pi.$$

Ejercicio 2.

(a)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sqrt{2} - 1.$$

(b)

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \qquad \text{diverge.}$$

(c) El volumen da $3\pi/4$.

Ejercicio 3. (a)

(i) La solución es $x(t) = 1/(t^2 + 1)$.

(ii) Para valores grandes del tiempo la poblacióm tiende a cero.

(b)

(i) Los puntos fijos son $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ que resulta atractor y $x = (-\sqrt{5} - 1)/2$ que resulta repulsor.

(ii) Para la condición inicial $x_0 = 0$ la solución converge al punto fijo $x = (\sqrt{5} - 1)/2$.