Centro de Matemática. 10 de julio de 2007

Examen de Matemática I

Ejercicio 1. (a) Calcular

$$\int_0^1 \frac{x}{(x-2)(x-3)}dx.$$

(b) Calcular el volumen de revolución alrededor del eje Oy generado por la función

$$f(x) = x \operatorname{sen} x,$$

en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$.

(c) Calcular

$$\int_e^{e^2} \frac{\log\big(\log t\big)}{t \log t}dt.$$

Ejercicio 2. Se considera la función

$$g(x) = x^3 + \frac{3}{4}x.$$

(a) Esbozar el gráfico de la función g.

(b) Determinar los puntos fijos de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = g(x_n)$ y clasificarlos.

(c) Hallar el límite utilizando el método gráfico de la ecuación en diferencias anterior para las siguientes condiciones iniciales:

$$\text{(i) } x_0 = -\frac{1}{2}, \qquad \text{(ii) } x_0 = 1, \qquad \text{(iii) } x_0 = \frac{1}{4}.$$

Ejercicio 3. Un modelo para el crecimiento de una población es:

$$x' = 3(2000 - x).$$

(a) Interpretar el significado de la ecuación indicando una de las siguientes proposiciones (sólo una es correcta):

(i) La tasa de crecimiento de la población es proporcional a la cantidad de individuos;

(ii) La tasa de crecimiento de la población es menor cuando hay 1900 individuos que cuando hay 200;

(iii) La tasa de crecimiento de la población no depende de la cantidad de individuos.

(b) Resolver la ecuación diferencial con la condición inicial $x(0) = 200$.

(c) Hallar el límite

$$\lim_{t\to\infty} x(t),$$

para la solución hallada en (b).

(d) ¿Qué sucede con la población cuando ha pasado mucho tiempo?

Centro de Matemática. 10 de julio de 2007

Soluciones del Examen de Matemática I

1. (a) Utilizando el método de fracciones simples tenemos que

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{(x-2)(x-3)}dx &= -2\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx + 3\int_0^1 \frac{1}{x-3}dx\\ &= -2(\ln|x-2|)\Big|_0^1 + 3(\ln|x-3|)\Big|_0^1\\ &= 2\ln(2) + 3\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{32}{27}\right) \sim 0,170.\end{aligned}$$

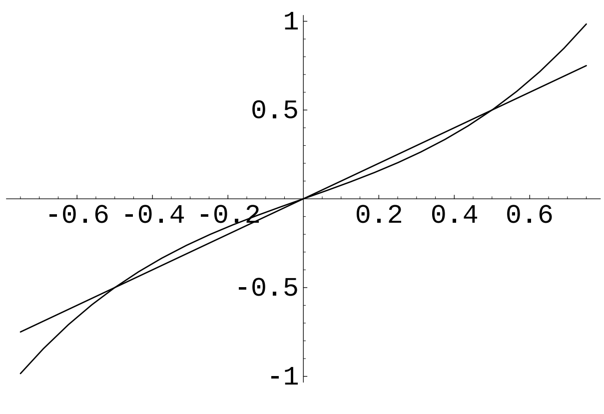
(b)

$$\begin{aligned}V_{Oy} &= 2\pi\int_0^\pi x^2\text{sen}(x)dx = 2\pi\left(x^2(-\cos(x))\Big|_0^\pi + 2\int_0^\pi x\cos(x)\right)\\ &= 2\pi\left(\pi^2 + 2\left(x\,\text{sen}(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \text{sen}(x)dx\right)\right)\\ &= 2\pi\left(\pi^2 + 2\left(\cos(\pi)-\cos(0)\right)\right) = 2\pi(\pi^2-4) \sim 36,90.\end{aligned}$$

(c) Utilizamos el cambio de variable $u = \log(\log(t))$. Entonces $\frac{du}{dt} = \frac{1}{\log(t)}\frac{1}{t}$ y $u(e)=0$, $u(e^2) = \log(2)$. Entonces

$$\int_e^{e^2} \frac{\log(\log(t))}{t\log(t)}dt = \int_0^{\log(2)} u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^{\log(2)} = \frac{(\log(2))^2}{2} \sim 0,24.$$

2. (a) Vemos que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Por otro lado $g'(x) = 3x^2 + \frac{3}{4} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $g(0)=0$. Por lo tanto el un bosquejo del gráfico de g es:



donde también graficamos $y = x$.

(b) Resolvemos

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{3}{4}x &= x \\ x^3 - \frac{1}{4}x &= 0 \\ x(x^2 - \frac{1}{4}) &= 0. \end{aligned}$$

Entoces los puntos fijos de g son $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Para clasificar los puntos fijos utilizamos $g'(x) = 3x^2 + \frac{3}{4}$. Entonces $|g'(0)| = \frac{3}{4} < 1$ y por lo tanto $x = 0$ es un punto fijo **atractor**.
$|g'(\frac{1}{2})| = |g'(-\frac{1}{2})| = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} > 1$ y por lo tanto $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$ son puntos fijos **repulsores**.

(c) Si $x_0 = -1/2$ tenemos $\lim x_n = -1/2$, por ser punto fijo, si $x_0 = 1$ tenemos $\lim x_n = +\infty$ (se ve por el método gráfico), si $x_0 = 1/4$ tenemos $\lim x_n = 0$ (idem).

3. (a) Cuando hay 1900 individuos, $x' = 300$ y cuando hay 200 individuos $x' = 5400$, por lo tanto la respuesta correcta es (ii).

(b)

$$\begin{aligned} \frac{x'}{(2000 - x)} &= 3 \\ \int_0^t \frac{x'}{(2000 - x)}\, dt &= \int_0^t 3\, dt \\ \int_{200}^{x(t)} \frac{1}{(2000 - x)}\, dx &= 3t \\ -\left(\ln|2000 - x|\right)\Big|_{200}^{x(t)} &= 3t \\ \ln\left|\frac{2000 - x(t)}{1800}\right| &= -3t \\ \frac{2000 - x(t)}{1800} &= e^{-3t} \\ 2000 - x(t) &= 1800e^{-3t} \\ x(t) &= 2000 - 1800e^{-3t} \end{aligned}$$

(c) $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} 2000 - 1800e^{-3t} = 2000$.

(d) La población se estabiliza con tamaño 2000.