Solución.

13 de julio de 2005

1. $tx' = (2-t)x \Rightarrow \frac{x'}{x} = \frac{2}{t} - 1 \Rightarrow \ln|x| = 2\ln|t| - t + k$. Como $x(1) = 1$ se tiene $\ln|1| = 2\ln|1| - 1 + k$ de donde $k = 1$. Por lo tanto $x(t) = t^2 e^{1-t}$.

2. *a*) Para que f sea derivable en 1 debe ser continua en 1 , de donde $a + b = 2$. Además, la derivabilidad en 1 implica que $2a + b = -1$. Como $a + b = 2$ y $2a + b = -1$ se tiene $a = -3, b = 5$.

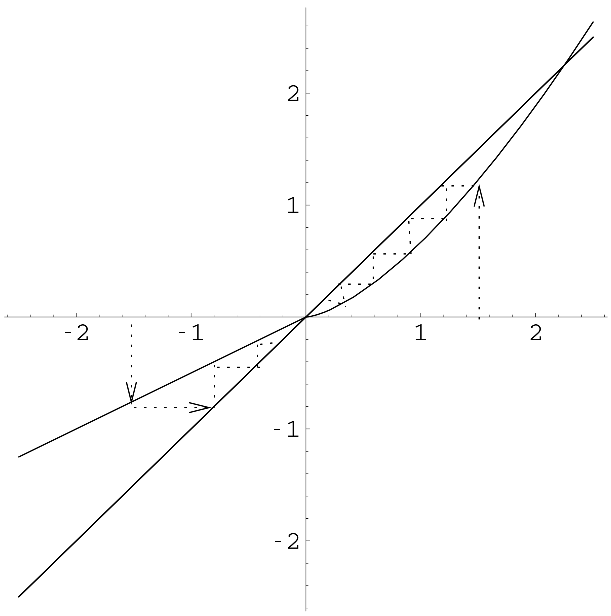
   b) En $(-\infty, 1]$, $f'(x) = -6x + 5$, así que $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 5/6$.
   En $[1, +\infty)$, $f'(x) = \frac{-1+2\ln x}{x^3}$ tiene raíz $\sqrt{e}$.
   Por lo tanto f es creciente en $(-\infty, 5/6)$, decreciente en $(5/6, \sqrt{e})$, y creciente en $(\sqrt{e}, \infty)$. En consecuencia f tiene un máximo relativo en $5/6$, que vale $-3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 5\frac{5}{6} = -\frac{25}{12} + \frac{50}{12} = \frac{25}{12} = 2 + \frac{1}{12}$; y f tiene un mínimo relativo en $\sqrt{e}$, que vale $f(\sqrt{e}) = 2 - \frac{\ln\sqrt{e}}{e} = 2 - \frac{1/2}{e} = 2 - \frac{1}{2e}$.
   Por otra parte, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Por lo tanto f no tiene mínimo absoluto, y su máximo absoluto es $f(5/6) = 2 + \frac{1}{12}$.

   c) Como $x \geq 1$: $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 (-3t^2 + 5t)dt + \int_1^x \left(2 - \frac{\ln t}{t^2}\right) dt.$
   La primera integral de la suma es $\left[-t^3 + \frac{5}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{3}{2}$. Integrando por partes se ve que la segunda integral es $\left[2t + \frac{\ln t + 1}{t}\right]_1^x = 2x + \frac{1+\ln x}{x} - 3$.
   Se deduce entonces que:
   $$\int_0^x f(t)dt = 2x + \frac{1+\ln x}{x} - \frac{3}{2}.$$

   d) La serie a clasificar es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$. Como la función $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ en $[1, +\infty)$ es positiva decreciente, podemos aplicar el criterio integral y clasificar la siguiente integral impropia:
   $$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left[1 - \frac{1+\ln x}{x}\right] = 1$$
   y por lo tanto la serie en cuestión converge.

3. *a*) El gráfico de f puede verse más abajo.

   b) En $(0, +\infty)$ los puntos fijos verifican $\frac{2}{3}\sqrt{x} = 1$ de donde $x = \frac{9}{4}$ es el único.
   En $(-\infty, 0]$ el único punto fijo es 0.
   Además $f'(\frac{9}{4}) = \frac{3}{2} > 1$ por lo que $\frac{9}{4}$ es repulsor.
   Como f no es derivable en 0, no podemos usar el criterio de la derivada para clasificar al punto fijo 0, por lo que acudimos al método gráfico y notamos que es un punto fijo atractor:



   c) $f'(x) = \sqrt{x}$ por lo que hay que calcular
   $$\int_1^2 \sqrt{1+x}dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}).$$