Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática I–Curso 2004

Examen

8 de marzo de 2005

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^3 + x & \text{si } x < 0 \\ e^x \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

   a) Probar que f es derivable en $x = 0$.

   b) Se define $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Calcular $F(x)$ para $x > 0$ y para $x < 0$.

   c) Resolver la ecuación diferencial $\begin{cases} x' + f(t)x = 0, & t \in (-\infty, 0) \\ x(-1) = e^{\frac{1}{4}} \end{cases}$

2. Se considera la función $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a\, x\, e^{\frac{x}{x+1}},\ \ a > 0.$$

   a) Hallar los puntos fijos de f.

   b) Clasificarlos sabiendo que $a \in (\frac{1}{e}, 1)$.

   c) Suponiendo que $x_{n+1} = f(x_n)$, hallar $\lim_n x_n$ si:

      1) $x_0 = -\ln a$

      2) $x_0 = 3$ y $\ln a = -\frac{2}{3}$,

3. Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1 + ta}$, donde $a > 0$.

   a) Calcular el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar el gráfico de f en el intervalo $[0, 1]$ con respecto al eje Ox.

   b) Mostrar que el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar el gráfico de f en el intervalo $[0, 1/a]$ con respecto al eje Ox no depende de a, y hallar su valor.

4. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2}{1+t^{40}} dt, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

a) Mostrar que F es una función impar, es decir: $F(-x) = -F(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Estudiar el crecimiento de $x - F(x)$.

c) Teniendo en cuenta que F está acotada en $\mathbb{R}$, mostrar que F tiene exactamente un punto fijo en $(0, +\infty)$, y que éste es mayor que 1.

d) Deducir que F tiene exactamente tres puntos fijos, y clasificarlos.

Duración: 3 horas