Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática I–Curso 2004

Examen

22 de febrero de 2005

1. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} e^{x^2 \operatorname{sen} x} + bx & \text{si } x < \pi \\ \ln(2 + \cos x) + a & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$

   a) Hallar a y b para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

   b) Para los valores de a y b hallados en *a*), sea $g := f'$.
   Calcular:

$$\int_0^\pi g(x)\, dx \qquad \int_0^\pi x g'(x)\, dx \qquad \int_\pi^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} x\, dx$$

2. Se considera la ecuación diferencial $x' = x \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t$. Resolver la ecuación suponiendo $x(0) = 0$, y hallar el máximo de la solución en el intervalo $[0, \pi]$.

3. Para cada $a > 0$ se considera la función $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_a(x) = x^3 - ax^2 + a$$

   a) Probar que -1 es un punto fijo de f_a, y hallar los puntos fijos restantes.

   b) Clasificar los puntos fijos de f_a en los siguientes casos:

   1) $a \in (0, 1)$.
   2) $a \in (1, 2)$.
   3) $a = 1$.

   c) Supóngase que $a = 1$, y sean $x_0 = \frac{5}{6}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq 0$. Hallar $\lim_n x_n$.

Duración: 3 horas