16 de diciembre de 2004.

Examen de Matemática I.

1. Se considera la función
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+8x^3}}$$
   a) Determinar el dominio y el signo de f. Llamaremos $\mathcal{D}$ al dominio de f.
   b) En el caso de que existan, hallar el máximo y el mínimo de f en $\mathcal{D}$.
   c) Calcular el volumen del sólido obtenido al girar el gráfico de f comprendido entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$ en torno al eje Oy.

2. Una población con fuerte autocompetencia se modela con la ecuación
$$x_{n+1} = a - \frac{1}{x_n}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ positivo.}$$
   a) Para $a < 2$, probar que la ecuación no tiene puntos fijos.
   b) Para $a > 2$, probar que la ecuación tiene exactamente dos puntos fijos, de los cuales uno es mayor que 1.
   c) Clasificar los puntos fijos para $a > 2$.
   d) Hallar $\lim x_n$ si $x_0 = 1$ en los casos:
      1) $a \geq 2$,
      2) $a < 2$.

      Describir el futuro de la población en ambos casos.

3. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera la ecuación diferencial
$$(*) \qquad x' = x(1-x^2)(1+\alpha^2 e^x).$$
   a) Hallar y clasificar los puntos de equilibrio de la ecuación $(*)$.
   b) Para $\alpha = 0$ hallar la solución φ de $(*)$ tal que $\varphi(0) = 2$.