

## EXAMEN DE MATEMÁTICA I

13 de octubre de 2004

- §1. (a) *Integrando por partes, y usando la relación  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , hallar una primitiva de  $\sin^2 x$ .*
- (b) *Hallar el área encerrada entre la gráfica de la función  $(2 \sin x + \cos x)^2$  y el eje  $Ox$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .*

§2. *Para cada  $a \in \mathbb{R}$  se considera la función  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$f_a(x) = (a - x)[(e^x - 1)^2 + (x - a + 1)^2], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (a) *Estudiar el signo de  $f_a$ , discutiendo según  $a$ .*
- (b) *Calcular  $\int_0^1 f_0(x) dx$ .*
- (c) *Hallar  $a$  para la ecuación  $x' = f_a(x)$  tenga algún punto de equilibrio inestable, y determinar dicho punto.*
- (d) *Supóngase que  $\varphi$  es la solución de  $x' = f_a(x)$  que en 0 vale  $a - 1$ . ¿Es posible que  $\varphi(a + 2\pi) = a + 1$ ? Justificar la respuesta.*
- §3. *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ .*
- (a) *Comprobar que 1 es punto fijo de  $f$ , y hallar los otros puntos fijos*
- (b) *Hacer un bosquejo de la función  $f$ .*
- (c) *Clasificar los puntos fijos.*