

EXAMEN

15 de julio de 2004

1.
 - a) Calcular el volumen engendrado al girar en torno al eje Ox la gráfica de la función $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - \alpha \sin x$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante.
 - b) Hallar el valor de la constante α para el cual el volumen hallado en (a) es mínimo.

2. Sea $f(x) = x^2 + \lambda x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - a) Hallar λ para que 1 sea punto fijo de f .
 - b) Mostrar que 1 es el único punto fijo de f para el valor de λ hallado en (a).
 - c) Si λ es como en (a) y $N_{t+1} = f(N_t), \forall t \geq 0$, usando el método gráfico hallar $\lim_{t \rightarrow +\infty} N_t$ cuando $N_0 = 2$ y cuando $N_0 = \frac{1}{2}$.
 - d) Probar que para el valor de λ hallado en (a), la función f no tiene 2-ciclos.

3. Se considera la ecuación diferencial

$$(*) \quad x' = (x^2 + 2x)e^{\beta x},$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es una constante.

- a) Hallar las soluciones constantes de (*).
- b) Sea φ la solución de la ecuación (*) tal que $\varphi(0) = -1$. Hallar $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$.
- c) Hallar la solución general de (*) en el caso en que $\beta = 0$.